DIAGONALISATION
D'UNE MATRICE

Aimé DIUMI DIKOLO

www.wiscorp.com

I. INTRODUCTION

I.1 Matrice carrée

Une matrice carrée est une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes.

Exemples

$A = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 0 \\ -5 & 9 & 34 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice ayant 3 lignes et 3 colonnes, donc une matrice carrée.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 45 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice ayant 2 lignes et 2 colonnes, donc une matrice carrée

Etant donné que le nombre de lignes égal au nombre de colonnes, au lieu de dire que la matrice est de type $n \times n$, on dira simplement que la matrice est d'ordre n. Dans l'exemple ci-dessus, la première matrice est d'ordre 3 et la deuxième est d'ordre 2.

I.2 Matrice diagonale

Une matrice diagonale est une matrice carrée dont tous les éléments sont nuls sauf ceux de la diagonale principale.

Exemples :

$A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales

Si en particulier, tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1, on parle d'une matrice unité ou unitaire ou encore une matrice identité notée I_n, où n représente l'ordre de la matrice.

Exemples :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est matrice unitaire d'ordre 3, donc I_3

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est matrice unité d'ordre 2, donc I_2

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice unité d'ordre 3, donc I_4

I.3. Diagonaliser une matrice

Diagonaliser une matrice c'est trouver une matrice diagonale qui lui est semblable. Cela signifie que certaines matrices sont diagonalisables et les autres ne le sont pas.

Exemple :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, la matrice diagonale qui lui est semblable est la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

I. DIAGONALISATION D'UNE MATRICE

Nous allons apprendre pas à pas à diagonaliser une matrice carrée. La diagonalisation d'une matrice passe par les étapes suivantes :

- Calcul du polynôme caractéristique
- Détermination des valeurs propres
- Détermination des vecteurs propres
- Formation de la matrice de passage P et calcul de son inverse
- Trouver la matrice diagonale

Pour l'illustration de la marche à suivre pour diagonaliser une matrice, nous allons utiliser la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

II.1. Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique de matrice A noté par $P_A(\lambda)$ est le déterminant donné par la formule :

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_n)$ $\quad$ I_n : la matrice unité et n : l'ordre de la matrice

Dans notre cas, la matrice est d'ordre 3, donc le polynôme caractéristique est donné par :

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_3)$

Trouvons d'abord $A - \lambda\, I_3$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0-0 & 2-0 \\ 2-0 & 2-\lambda & 2-0 \\ -4-0 & 0-0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -4 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

Remarquez que pour trouver la dernière matrice, il suffisait seulement de soustraire λ des éléments de la diagonale principale.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -4 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

Trouvez ce déterminant en utilisant une méthode que vous maitrisez, dans notre cas, utilisons la méthode de cofacteur, développons par rapport à la deuxième rangée car elle contient déjà deux zéros.

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)[(4-\lambda)(-2-\lambda) + 8]$$

$$= (2-\lambda)(-8 - 4\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 8)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)\, \lambda\, (\lambda - 2)$$

II.2. Valeurs propres

Pour trouver les valeurs propres, on égale le polynôme caractéristique à zéro et on résout l'équation ainsi formée, les solutions obtenus sont des valeurs propres de la matrice.

$P_A(\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \; (2-\lambda)\,\lambda\,(\lambda-2) = 0$

$\Leftrightarrow 2-\lambda = 0 \;\; ou\; \lambda = 0 \;\; ou \;\; \lambda - 2 = 0 \qquad\qquad car\; A.B.C = 0 \;\Leftrightarrow A = 0\; ou\; B = 0\; ou\; C = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 2 \;\; ou \;\; \lambda = 0 \quad ou \;\; \lambda = 2$

Nous avons trouvé deux valeurs propres

$0\text{:} \;\; une\ racine\ simple$

$2\text{:} \;\; une\ racine\ double$

II.3. Vecteurs propres

Pour trouver le vecteur propre, on se sert de l'égalité suivante :

$AX = \lambda X \qquad$ Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

Ou on peut former un système d'équations suivant :

$(A - \lambda\, I_n)\, X = 0$

On doit trouver le vecteur ou sous espace propre associé à chaque valeur propre.

<u>Sous espace propre pour $\lambda = 0$</u>

$AX = \lambda X$ On remplace λ par 0

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4x + 2z \\ 2x + 2y + 2z \\ -4x - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} 4x + 2z = 0 \ \ (1) \\ 2x + 2y + 2z = 0 \ \ (2) \\ -4x - 2z = 0 \ \ (3) \end{cases}$$

Ici, il n'est pas question de résoudre le système d'équations, mais d'établir une relation entre les variables (inconnues) $x, y\ et\ z$

Partant de (1), on a : $2z = -4x \Rightarrow z = -2x$ (4)

$(4)\ \ dans\ \ (2)\ :\ \ 2x + 2y + 2(-2x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y = 2x$$

$$\Leftrightarrow y = x$$

$$\begin{cases} 4x + 2z = 0 \ \ (1) \\ 2x + 2y + 2z = 0 \ \ (2) \\ -4x - 2z = 0 \ \ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x \\ y = x \end{cases}$$

$V(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -2x\ ; y = x;\ \ x \in \mathbb{R}\}$

En remplaçant $z\ et\ y\ par\ leurs\ valeurs, on\ a$:

$V(0) = \{(x, x, -2x) :\ \ x \in \mathbb{R}\}$

$\quad = \{x(1, 1, -2):\ x \in \mathbb{R}\}$

En posant $x = 1$, on obtient :

$$V(0) = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

D'où $V(0)$ est un sous espace vectoriel de dimension 1 et a pour base le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

<u>Sous espace propre pour $\lambda = 2$</u>

$AX = \lambda X$ On remplace λ par 2

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4x+2z \\ 2x+2y+2z \\ -4x-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} 4x+2z=2x \\ 2x+2y+2z=2y \\ -4x-2z=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2z=0 \\ 2x+2z=0 \\ -4x-4z=0 \end{cases}$$

Divisons les deux premières équations par 2 et la dernière par 4 :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x+z=0 \\ -x-z=0 \end{cases}$$

Multiplions la troisième équation par -1 :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

Les trois équations sont identiques

$$\begin{cases} x+z=0 \\ x+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x+z=0 \quad \Leftrightarrow x=-z$$

$$V(2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=-z, y\ et\ z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(-z,y,z),\ y\ et\ z \in \mathbb{R}\}$$

Décomposons ce vecteur en une somme de deux vecteurs, dans un vecteur, on aura que y et dans l'autre que z

Nous avons $(-z,y,z) = (\ ,\ ,\ ) + (\ ,\ ,\ )$

On va décomposer chaque composante en $y\ et\ z$

Pour la première composante, nous avons $-z = 0y - z = (0) + (-z)$

Pour la deuxième composante, nous avons : $y = y + 0z = (y) + (0)$

Pour la troisième composante : $z = 0y + z = (0) + (z)$

$$(-z,y,z) = (0,y,0) + (-z,0,z)$$

$$V(2) = \{(0,y,0) + (-z,0,z), y\ et\ z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{y(0,1,0) + z(-1,0,1), y\ et\ z \in \mathbb{R}\}$$

En remplaçant y et z par 1, on a :

$$V(2) = Span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

D'où $V(2)$ est un sous espace vectoriel de dimension 2 qui a pour base les vecteurs $V_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $et\ V_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Remarque

Pour qu'une matrice soit diagonalisable, elle doit vérifier au moins un des critères suivants :

- L'ensemble de ses vecteurs propres sont linéairement indépendants
- Elle admet n racines dans ℝ (si la matrice est définie dans ℝ) et l'ordre de multiplicité de chaque racine correspond à la dimension de son sous espace vectoriel associé
- Elle est symétrique

Pour notre cas d'illustration : La matrice est d'ordre 3 et définie dans ℝ

- Elle admet trois valeurs propres : 0, 2, 2, donc 0 est une racine simple et 2 une racine double.
- La multiplicité de 0 est 1 (racine simple) et la dimension de son sous espace vectoriel associé est 1
- La multiplicité de 2 est 2 (racine double), la dimension de son sous espace vectoriel associé est 2

Donc la matrice A est diagonalisable

II.4. Détermination de la matrice de passage et de son inverse

La matrice de passage notée P est la matrice formée des vecteurs propres de la matrice A.

$P = (\ V_1\ \ V_2\ \ V_3)$

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 1 & 0\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ensuite, il faut trouver l'inverse de P

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\1 & 1 & 1\\-2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

II.5. Trouver la matrice diagonale

La matrice diagonale D semblable à A est donnée par la formule :

$D = P^{-1}\,A\,P$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4+0+4 & 0+0+0 & -2+0+2 \\ 4+2-4 & 0+2+0 & 2+2-2 \\ -8+0+4 & 0+0+0 & -4+0+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 2+2-4 & 0+2+0 & -2+0+2 \\ -4+0+4 & 0+0+0 & 4+0-2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice diagonale semblable à A est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$