DOMAINE DE DEFINITION D’UNE FONCTION

Aimé DIUMI DIKOLO

www.wiscorp.com

DOMAINE DE DEFINITION D'UNE FONCTION

Nous allons voir comment trouver le domaine de définition de quelques fonctions.

1 fonction polynôme

Une fonction polynôme est définie pour tout réel.

$D_f = \mathbb{R}$.

Exemples

1) $f(x) = x^2+2x - 3 + 7x^3$ $\quad$ D$f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = x^3 + \frac{2x-5}{5}$ $\quad$ D$f = \mathbb{R}$

Pour ceux qui ont un problème pour reconnaitre une fonction polynôme, voici quelques éléments pour vous :

Une fonction polynôme :

- N'a pas de variable sous le signe radical
- N'a pas de variable au dénominateur

Exemples

$f(x) = 2x^2 - x + 3$; $f(x) = 2x + \sqrt{3}$; $f(x) = \frac{2x+4}{3}$ sont des fonctions polynômes.

Contre-exemples

$f(x) = \sqrt{2x+3} + x^2 - 1$; $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ ne sont pas de fonctions polynômes.

2 Fonction rationnelle

Une fonction rationnelle est une fonction ayant la forme suivante :

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

Avec $h(x)$ *et* $g(x)$ des fonctions polynômes.

$Df = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$ ou

$Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$

Cela signifie qu'on prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ sauf celles qui annulent le dénominateur.

Pour trouver le domaine de définition d'une fonction rationnelle, on procède comme suit :

- ✓ Egaler le dénominateur à zéro.
- ✓ Résoudre l'équation ainsi formée.
- ✓ Prendre toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ à l'exception des racines ou solutions de l'équation.

Exemples

1) $f(x) = \frac{x-5}{x-2}$

$Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x - 2 = 0\}$

On égale le dénominateur à 0

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
$Df = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ Ou sous forme d'intervalles
$Df =]-\infty; 2[\ \cup\ ]2;\ +\infty[$

2) $f(x) = \frac{2x+8}{x^2-5x+6}$

$Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 6 = 0\}$
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$
$\Delta = 1$
$x_1 = 2 \quad et\ x_2 = 3$
$Df = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\} \quad ou \quad Df =]-\infty; 2[\ \cup\ ]2; 3[\ \cup\ ]3;\ +\infty[$

3 Fonction irrationnelle de la forme $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{t(x)}}$

Dans ce cas, on examine la parité de n (indice),

Si n est pair $Df = \{x \in \mathbb{R} : t(x) \geq 0\}$

Si n est impair $\quad Df = \mathbb{R}$

$t(x)$ est le radicant, c'est-à-dire ce qui se trouve sous le signe radical.

Exemples

1) $f(x) = \sqrt[5]{2x - 3}$ L'indice 5 est impair, donc $Df = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 5x - 6}$

L'indice est pair
$Df = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 - 5x - 6 \geq 0\}$
$-x^2 - 5x - 6 \geq 0$

$-x^2 - 5x - 6 = 0$
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1) \times (-6)$
$\Delta = 1$
$x_1 = -3 \quad et \quad x_2 = -2$

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$-x^2 - 5x - 6$		-	0	+	0	-	

$Df = [-3;\ -2]$

4. Fonction irrationnelle de la forme $f(x) = \sqrt[n]{\frac{h(x)}{g(x)}}$

Si n est impair : $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}$

On procède comme dans le cas des fonctions rationnelles

Si n est pair : $Df = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{h(x)}{g(x)} \geq 0\right\}$

Exemples

1) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+5x-6}{x^2-2x+1}}$

n est impair : $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 2x + 1 = 0\}$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1$
$\Delta = 0$
$x_1 = x_2 = {}^2/_2 = 1$
$Df = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad ou\ Df =]-\infty; 1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$

2) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-5}{x^2-7x+12}}$

$n\ est\ pair$: $Df = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x-5}{x^2-7x+12} \geq 0\right\}$
$\frac{x-5}{x^2-7x+12} \geq 0$

$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$
$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4 \quad et\ x_2 = 3$

x	$-\infty$		3		4		5		$+\infty$
$x - 5$		-		-		-	0	+	
$x^2 - 7x + 12$		+	0	-	0	+		+	
$\frac{x-5}{x^2-7x+12}$		-	||	+	||	-	0	+	

$D_f =]3; 4[\ \cup\ [5;\ +\infty[$

5. Fonction irrationnelle de la forme $f(x) = \frac{h(x)}{\sqrt[n]{g(x)}}$

On examine la parité de n (l'indice) :

Si n est impair : $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}$

Si n est pair : $Df = \{x \in \mathbb{R}: g(x) > 0\}$

Exemples :

1) $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{\sqrt[5]{x^2-2x+1}}$

n est impair : $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 2x + 1 = 0\}$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1$
$\Delta = 0$
$x_1 = x_2 = {}^2/_2 = 1$
$Df = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad ou\ Df =]-\infty; 1[\ \cup\ ]1; +\infty[$

2) $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$

n est pair : $Df = \{x \in \mathbb{R}: -x^2 + 4x - 3 > 0\}$
$-x^2 + 4x - 3 > 0$
$-x^2 + 4x - 3 = 0$
$\Delta = (4)^2 - 4 \times (-1) \times (-3)$
$\Delta = 4$
$x_1 = 1 \quad et\ x_2 = 3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$		-	0	+	0	-	

$Df =]1; 3[$

6. Fonction irrationnelle de la forme $\boldsymbol{f(x) = \frac{\sqrt[n]{h(x)}}{g(x)}}$

On examine toujours la parité de n

Si n est impair : $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}$

Si n est pair : $Df = \{x \in \mathbb{R}: h(x) \geq 0 \quad et\ g(x) \neq 0\}$ ou

$Df = \{x \in \mathbb{R}: h(x) \geq 0\} \cap \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}$

Exemples

1) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-8x+15}}{x-3}$

n est pair : $Df = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 8x + 15 \geq 0\} \cap \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x - 3 = 0\}$

$x^2 - 8x + 15 \geq 0$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 15$

$\Delta = 4$

$x_1 = 5 \qquad et\ x_2 = 3$

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$x^2 - 8x + 15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_1 =]-\infty; 3] \cup [5; +\infty[$

$x - 3 \neq 0$

$x \neq 3$

$S_2 =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

$Df = S_1 \cap S_2 =]-\infty; 3[\cup [5; +\infty[$

2) $f(x) = \frac{\sqrt[7]{x^2-3x+2}}{x^2-15x+14}$

L'indice est impair.

$Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}$

$x^2 - 15x + 14 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-15)^2 - 4 \times 1 \times 14$

$= 225 - 56$

$\Delta = 169$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{15-\sqrt{169}}{2.1} = \frac{15-13}{2} = \frac{2}{2}$$
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{15+\sqrt{169}}{2.1} = \frac{15+13}{2} = \frac{28}{2}$$
$$x_1 = 14$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1 ; 14\}$

$D_f =]-\infty ; 1[\cup]1; 14[\cup]14; +\infty [$

7. Fonction de la forme $f(x) = \frac{\sqrt[n]{h(x)}}{\sqrt[m]{g(x)}}$

Si n et m sont pairs : $Df = \{x \in \mathbb{R}: h(x) \geq 0 \quad et\ g(x) > 0\}$

Si n et m sont impairs : $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}$

Si n est pair et m impair : $Df = \{x \in \mathbb{R}: h(x) \geq 0 \quad et\ g(x) \neq 0\}$

Si n est impair et m pair : $Df = \{x \in \mathbb{R}: g(x) > 0\}$

Exemples

1) $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2-7x-8}}{\sqrt[4]{x^2-2x+2}}$

Les deux indices sont pairs :

$Df = \{x \in \mathbb{R}: -x^2 - 7x - 8 \geq 0 \quad et\ x^2 - 2x + 2 > 0\}$

$-x^2 - 7x - 8 \geq 0$

$-x^2 - 7x - 8 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times (-1)(-8)$

$= 48 - 32$

$\Delta = 16$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-\sqrt{16}}{2.(-1)} = \frac{7-4}{-2} = \frac{3}{-2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+\sqrt{16}}{2.(-1)} = \frac{7+4}{-2} = \frac{11}{-2}$$

$x_1 = {}^{-3}/_{2}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $x_2 = {}^{-11}/_{2}$

x	$-\infty$		${}^{-11}/_{2}$		${}^{-3}/_{2}$		$+\infty$
$-x^2-7x-8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S_1 = \left[{}^{-11}/_{2}\ ;\ {}^{-3}/_{2}\ \right]$

$x^2-2x+2>0$

$x^2-2x+2=0$

$\Delta= (-2)^2-4\times 1\times 2$

$\ \ = 4-8$

$\Delta= -4$

Pas de racines réelles

x	$-\infty$				$+\infty$
x^2-2x+2		$+$	$+$	$+$	

$S_2 =]-\infty\ ;\ +\infty[$

$D_f\ = S_1 \cap S_2$

$\quad = [{}^{-11}/_{2}\ ;\ {}^{-3}/_{2}\ ] \cap\ ]-\infty\ ;\ +\infty[$

$D_f\ = [{}^{-11}/_{2}\ ;\ {}^{-3}/_{2}\ ]$

$2) f(x) = \frac{\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[5]{2x+4}}$

Les deux indices sont impairs.

$D_f\ = \mathbb{R}-\{x\ \in\ \mathbb{R} : 2x+4=0\}$