LIMITES

Aimé DIUMI DIKOLO

www.wiscorp.com

Table des matières

I. CALCUL DES LIMITES

I.1 Généralités

D'une manière générale, pour calculer $\lim_{x \to a} f(x)$, on calcule $f(a)$, c'est-à-dire on remplace partout il y a la variable x par le réel a.

Exemples :

1) $\lim_{x \to 2} 2x + 5$

$\lim_{x \to 2} 2x + 5 = 2 \times 2 + 5 = 9$

$\lim_{x \longrightarrow 2} 2x + 5 = 9$

2) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2+2x-8}{\sqrt{x^2+9}}$

$\lim_{x \to 4} \frac{x^2+2x-8}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{4^2+2\times4-8}{\sqrt{4^2+9}} = \frac{16}{5}$

$\lim_{x \to 4} \frac{x^2+2x-8}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{16}{5}$

I.2 Propriétés sur les limites

Soient f et g deux fonctions admettant des limites en a et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$1. si\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda, alors :$

$\lim_{x \to a} f(x) = \lambda$

La limite d'une fonction constante est égale à la constante quelle que soit la limite de la variable x

$2. \lim_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x \to a} f(x)$

Exemple

Calculer $\lim_{x \to 1} (2x + 4)$

$\lim_{x \to 1} (2x + 4) = \lim_{x \to 1} 2(x + 2)$

$= 2 \lim_{x \to 1} (x + 2)$

$= 2\,(1 + 2)$

$= 2(3)$

$\lim_{x \to 1} (2x + 4) = 6$

3. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x).g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x)$

Exemple

$f(x) = (2x + 1)(x + 1)$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (2x + 1)(x + 1)$

$= \lim_{x \to 2} (2x + 1). \lim_{x \to 2} (x + 1)$

$= (2.2 + 1)(2 + 1)$

$= (4 + 1)(3)$

$\lim_{x \to 2} (2x + 1)(x + 1) = 15$

5. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ $\quad (\lim_{x \to a} g(x) \neq 0)$

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$

Exemple

$f(x) = (x + 1)^3$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1)^3$

$= \left[\lim_{x \to 1} (x + 1)\right]^3$

$= [(1 + 1)]^3$

$= (2)^3$

$\lim_{x \to 1} (x + 1)^3 = 8$

$$7. \lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \begin{cases} \sqrt[n]{\lim_{x \to a} \mathrm{f(x)}} & si\ n\ est\ impair\ \ ou\ n\ est\ pair\ et\ \lim_{x \to a} \mathrm{f(x)}\ \geq 0 \\ & n'existe\ pas\ si\ n\ est\ pair\ et\ \lim_{x \to a} \mathrm{f(x)} < 0 \end{cases}$$

8. La limite d'un polynôme lorsque x tend vers l'infini est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

Exemples

$a) \lim_{x \to +\infty} (5x^6 + 2x^3 + 2x - 5)$

Quand on parle de degré supérieur, on regarde les exposants de x, on constate que le plus grand exposant de x est 6.

$a) \lim\limits_{x \to +\infty} (5x^6 + 2x^3 + 2x - 5) = \lim\limits_{x \to +\infty} 5x^6$

$= 5\ (+\infty)^6$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (5x^6 + 2x^3 + 2x - 5) = +\infty$

$b) \lim\limits_{x \to -\infty} (1 + 3x^2 - 2x)$

Dans ce cas, le degré (exposant) supérieur est 2

$\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + 3x^2 - 2x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2$

$= 3\ (-\infty)^2$

$= 3. \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + 3x^2 - 2x) = \infty$

$c) \lim\limits_{x \to -\infty} (1 - 2x^4 + 3x^3 + 1)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^4)$

$= -2\ (-\infty)^4$

$= -2 \times (\infty)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - 2x^4 + 3x^3 + 1) = -\infty$

$d) \lim\limits_{x \to -\infty} (1 + 2x^3 + 2x)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3$

$= 2(-\infty)^3$

$= 2 \times (-\infty)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + 2x^3 + 2x) = -\infty$

$e) \lim\limits_{x \to -\infty} (1 - 6x^5 + 2x)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} - 6x^5$

$= -6\ (-\infty)^5$

$= -6 \times (-\infty)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - 6x^5 + 2x) = +\infty$

$f) \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 6x^3 + 2x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} - 6x^3$

$= -6(+\infty)^3$

$= -6\ (+\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} (1 - 6x^3 + 2x) = -\infty$

I.3 CAS D'INDETERMINATION

Nous avons dit plus haut que d'une manière générale, pour calculer $\lim_{x\to a} f(x)$, on calcule $f(a)$, c'est-à-dire on remplace partout il y a la variable x par le réel a. Mais, il arrive de fois qu'en remplaçant la variable par le réel a, on trouve ceci :

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty, \infty^\infty$. Ces formes ne sont pas de vraies valeurs, elles sont appelées formes indéterminées. Dans ce cas, il faut lever l'indétermination pour trouver la vraie valeur.

I.3.1 $\boldsymbol{Cas\ d'ind\acute{e}termination\ \frac{0}{0}}$

1er cas : Fonctions rationnelles

Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, pour lever l'indétermination, décomposer $f(x)\ et\ g(x)$ tout en sachant que les deux fonctions ont un facteur commun $x - a$.

Exemples

1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

Résolution

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \frac{2^2-2-2}{2^2-3\times 2+2} = \frac{0}{0}\ (F.I.)$

Levons l'indétermination

Dans ce cas, les deux fonctions ont un facteur commun : $x - 2$

Pour les décomposer, la méthode simple serait d'effectuer la division euclidienne du numérateur et du dénominateur par $x - 2$

$$
\begin{array}{c|c}
x^2 - x - 2 & x - 2 \\
\cline{2-2}
-x^2 + 2x & x+1 \\
\hline
x - 2 & \\
-x + 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|c}
x^2 - 3x + 2 & x - 2 \\
\cline{2-2}
-x^2 + 2x & x-1 \\
\hline
-x + 2 & \\
x - 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$x^2 - x - 2 = (x - 2)(\ x + 1)$ et $x^2 - 3x + 2 = (\ x - 2)(x - 1)$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(\,x+1)}{(\,x-2)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+1)}{(x-1)}$

$=\frac{2+1}{2-1}=3$

2)$\lim\limits_{x\to 3}\ \frac{x^2-9}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to 3}\ \frac{x^2-9}{x-3}=\frac{3^2-9}{3-0}=\frac{0}{0}\ (F.I.)$

Levons l'indétermination. On sait que $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Pour notre numérateur, a vaut x et b vaut 3.

$\lim\limits_{x\to 3}\ \frac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\ \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to 3}(x-3)$

$=3-3$

$\lim\limits_{x\to 3}\ \frac{x^2-9}{x-3}=0$

$c)\lim\limits_{x\to 2}\ \frac{-x^3+2x^2+4x-8}{-x^3+3x^2-4}$

$\lim\limits_{x\to 2}\ \frac{-x^3+2x^2+4x-8}{-x^3+3x^2-4}=\frac{-2^3+2(2)^2+4.2-8}{-2^3+3(2)^2-4}=\frac{0}{0}\ \ (FI)$

Levons l'indétermination. Divisons le numérateur et dénominateur par $x-2$.

$$\begin{array}{r|l}
-x^3+2x^2+4x-8 & x-2 \\ \cline{2-2}
x^3-2x^2 & -x^2+4 \\ \cline{1-1}
4x-8 & \\
-4x+8 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
-x^3+3x^2-4 & x-2 \\ \cline{2-2}
x^3-2x^2 & -x^2+x+2 \\ \cline{1-1}
x^2-4 & \\
-x^2+2x & \\ \cline{1-1}
2x-4 & \\
-2x+4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

On peut décomposer :

$-x^3+2x^2+4x-8=(x-2)(-x^2+4)$

$$-x^3 + 3x^2 - 4 = (x-2)(-x^2 + x + 2)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-x^3+2x^2+4x-8}{-x^3+3x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(-x^2+4)}{(x-2)(-x^2+x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-x^2+4}{-x^2+x+2}$$

Remplaçons x par 2

$$= \frac{-2^2+4}{-2^2+2+2}$$

$$= \frac{0}{0} \qquad (F.I.)$$

L’indétermination persiste, décomposons encore le numérateur et le dénominateur.

$x - 2$ étant toujours leur facteur commun.

$$\begin{array}{c|c}
-x^2 + 4 & x - 2 \\ \cline{2-2}
x^2 - 2x & -x - 2 \\ \hline
-2x + 4 & \\
2x - 4 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
-x^2 + x + 2 & x - 2 \\ \cline{2-2}
x^2 - 2x & -x - 1 \\ \hline
-x + 2 & \\
x - 2 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Donc

$-x^2 + 4 = (x-2)(-x-2)$ et

$-x^2 + x + 2 = (x-2)(-x-1)$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-x^2+4}{-x^2+x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(-x-2)}{(x-2)(-x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-x-2}{-x-1}$$

$$= \frac{-2-2}{-2-1}$$

$$= \frac{-4}{-3}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-x^3+2x^2+4x-8}{-x^3+3x^2-4} = {}^4/_3$$

2^e cas : Fonctions irrationnelles

Dans ce cas, on multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par l’(les) expression(s) conjuguée(s) du(des) terme(s) contenant les radicaux.

Cela revient à dire ceci, si nous avons un seul terme contenant les radicaux, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de ce terme. Mais, si le dénominateur et le numérateur contiennent tous deux des radicaux, on va multiplier les deux termes (numérateur et dénominateur) par les deux expressions conjuguées.

Voici quelques expressions et leurs conjugués :

Expression	Conjugué	Produit
$a+\sqrt{b}$	$a-\sqrt{b}$	$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2-b$
$a-\sqrt{b}$	$a+\sqrt{b}$	$(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b}) = a^2-b$
$\sqrt{a}+b$	$\sqrt{a}-b$	$(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b) = a-b^2$
$\sqrt{a}-b$	$\sqrt{a}+b$	$(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b) = a-b^2$
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$
$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$
$a+\sqrt[3]{b}$	$a^2-a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$	$(a+\sqrt[3]{b})(a^2-a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}) = a^3+b$
$a-\sqrt[3]{b}$	$a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$	$(a-\sqrt[3]{b})(a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}) = a^3-b$
$\sqrt[3]{a}+b$	$\sqrt[3]{a^2}-b\sqrt[3]{a}+b^2$	$(\sqrt[3]{a}+b)(\sqrt[3]{a^2}-b\sqrt[3]{a}+b^2) = a+b^3$
$\sqrt[3]{a}-b$	$\sqrt[3]{a^2}+b\sqrt[3]{a}+b^2$	$(\sqrt[3]{a}-b)(\sqrt[3]{a^2}+b\sqrt[3]{a}+b^2) = a-b^3$
$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$	$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}) = a+b$
$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$	$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}) = a-b$
$\sqrt[4]{a}-b$	$\sqrt[4]{a^3}+b\sqrt[4]{a^2}+b^2\sqrt[4]{a}+b^3$	$(\sqrt[4]{a}-b)\left(\sqrt[4]{a^3}+b\sqrt[4]{a^2}+b^2\sqrt[4]{a}+b^3\right) = a-b^4$

Exemples :

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{\sqrt{3+1}-2}{3-3} = \frac{0}{0}$ (F.I.)

Levons l'indétermination

Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué du numérateur (car c'est la seule expression qui contient le radical)

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$= \lim\limits_{x\to 3}\frac{x+1+2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$= \lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$= \lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$

$= \frac{1}{\sqrt{3+1}+2}$

$= {}^{1}/_{4}$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = {}^{1}/_{4}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1-1}{\sqrt{1}-1} = \frac{0}{0} \quad (F.I.)$

Multiplions les deux termes par le conjugué du dénominateur car c'est le seul terme qui contient le signe radical

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$ (Voir tableau ci-haut)

$= \lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)$

$= \sqrt{1}+1$

$= 1+1$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}-2}$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}-2} = \frac{1-\sqrt{1}}{\sqrt{1+3}-2} = \frac{0}{0} \quad (F.I.)$

Multiplions les deux termes par les conjugués du numérateur et du dénominateur :

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}-2} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})\,(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)(1+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3-4)(1+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{-(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{-(\sqrt{x+3}+2)}{(1+\sqrt{x})}$

$= \frac{-(\sqrt{1+3}+2)}{1+\sqrt{1}}$

$= \frac{-(\sqrt{4}+2)}{1+1}$

$= \frac{-(2+2)}{2}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}-2} = -2$$

I.3.2 Cas d'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$

1er cas : fonctions rationnelles

La limite d'un polynôme lorsque x tend vers l'infini est égale à la limite de son terme de plus haut degré. Après l'application de cette propriété, nous aurons :

$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^n}{bx^p}$. Pour lever l'indétermination, trois cas sont possibles :

$$si\ n = p\ alors\ \lim_{x \to \infty} \frac{ax^n}{bx^p} = {}^{a}/_{b}$$

$$si\ n < p \quad alors\ \lim_{x \to \infty} \frac{ax^n}{bx^p} = 0$$

$$Si\ p < n\ \ alors\ \lim_{x \to \infty} \frac{ax^n}{bx^p} = \infty$$

Exemples :

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3+5x^2-5}{5-x+3x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{3x^3} = {}^{2}/_{3}$

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3+5x^2-5}{5-x+3x^3+8x^5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{3x^3} = 0$

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+2x^2-5}{5-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{3x^3} = +\infty$

2e cas : fonctions irrationnelles

A retenir que $\sqrt{x^2} = |x|$

$$= \begin{cases} x & si\ x \to +\infty \\ -x & si\ \ x \to -\infty \end{cases}$$

Exemple :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x+2}}{2x+\sqrt{16x^2+x+1}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{2x+\sqrt{16x^2\left(1+\frac{1}{16x}+\frac{1}{16x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x-\sqrt{x^2}}{2x+\sqrt{16x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x-|x|}{2x+|4x\,|}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x-(-x)}{2x-4x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-2x}$$

=-1

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x+2}}{2x+\sqrt{16x^2+x+1}} = -1$$

I.3.3 Cas d'indétermination $\infty - \infty$

Pour lever cette indétermination, on multiplie et on divise l'expression donnée par son conjugué. Et cela nous ramènera dans le cas de la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemples

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x - 2})$

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x - 2}) = \infty - \infty\ (F.I.)$$

Levons l'indétermination en multipliant et en divisant $(x - \sqrt{x^2 + 2x - 2})$ par son conjugué $(x + \sqrt{x^2 + 2x - 2})$.

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x - 2}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2+2x-2})(x+\sqrt{x^2+2x-2})}{(x+\sqrt{x^2+2x-2})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+x\sqrt{x^2+2x-2}-x\sqrt{x^2+2x-2}-(x^2+2x-2)}{(x+\sqrt{x^2+2x-2})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x^2-2x+2}{(x+\sqrt{x^2+2x-2})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x+2}{(x+\sqrt{x^2+2x-2})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x+|x|}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{2x}$$

$$= -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x - 2}) = -1$$

2) $\lim\limits_{x\to2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-2}\right)$

$$\lim_{x\to2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-2}\right) = \left(\frac{1}{2-2} - \frac{2}{2-2}\right)$$

$$= \frac{1}{0} - \frac{2}{0}$$

$$= \infty - \infty\ (F.I.)$$

Vue que cette indétermination provient de la différence de deux fractions, pour la lever, on va développer la fonction pour avoir une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{1(x-2)-2(x-2)}{(x-2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2-2x+4}{(x-2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{(x-2)(x-2)}$$

Remplaçons x par 2

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{(x-2)(x-2)}=\frac{-2+2}{(2-2)(2-2)}=\frac{0}{0}\ (F.I.)$$

Levons cette indétermination

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{(x-2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(-x+2)}{(x-2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{(x-2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{(x-2)}$$

$$=\frac{-1}{2-2}$$

$$=\frac{-1}{0}$$

$$=\infty$$

Déterminons les signes de ∞ en étudiant les signes de la fonction $f(x)=\frac{-1}{(x-2)}$

$x-2=0 \iff x=2$

x	$-\infty$			2			$+\infty$
-1		$-$	$-$		$-$	$-$	
$x-2$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{-1}{(x-2)}$		$+$	$+$	$\|\|$	$-$	$-$	

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}}\frac{-1}{(x-2)}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}}\frac{-1}{(x-2)}=+\infty$

I.3.4 Cas d'indétermination 0.∞

Ce cas d'indétermination se ramène par développement aux cas d'indétermination $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemples

1) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 - x - 1)\left(\frac{2}{x^2-1}\right)$

$$\lim_{x \to 1} (2x^2 - x - 1)\left(\frac{2}{x^2-1}\right) = (2.1^2 - 1 - 1)\left(\frac{1}{1^2-1}\right)$$

$$= 0.\left(\frac{1}{0}\right)$$

$$= 0.\infty \ (F.I.)$$

Développons la fonction

$$\lim_{x \to 1} (2x^2 - x - 1)\left(\frac{2}{x^2-1}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{4x^2-2x-2}{x^2-1}$$

$$= \frac{4.1^2-2.1-2}{1^2-1}$$

$$= \frac{0}{0} \ (F.I.)$$

Pour lever cette indétermination, décomposons les deux termes sachant que $x - 1$ est leur facteur commun.

$$\begin{array}{c|c}
4x^2 - 2x - 2 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-4x^2 + 4x & 4x + 2 \\ \cline{1-1}
2x - 2 & \\
-2x + 2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
x^2 - 1 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-x^2 + x & x + 1 \\ \cline{1-1}
x - 1 & \\
-x + 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$4x^2 - 2x - 2 = (x - 1)(4x + 2)$ $\quad$ $et\ x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{4x^2-2x-2}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(4x+2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{4x+2}{x+1}$$

$$= \frac{4\,.1+2}{1+1}$$

$$= \frac{6}{2}$$

$$= 3$$

2) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{x^3+2x^2-3x+1}\right)(x+2)$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{x^3+2x^2-3x+1}\right)(x+2) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x^3}\right)(x)$$

$$= 0.\infty \quad (F.I.)$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{x^3+2x^2-3x+1}\right)(x+2) = \lim_{x \to \infty} \frac{(x-1)(x+2)}{x^3+2x^2-3x+1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+2x-x-2}{x^3+2x^2-3x+1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x-2}{x^3+2x^2-3x+1} \quad (\text{Indétermination } \frac{\infty}{\infty})$$

$$= \lim_{x \to \infty} = \frac{x^2}{x^3}$$

$$= 0$$

II. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Calculer la limite de $f(x)$ $lorsque$ $x \longrightarrow x_0$ dans chacun des cas suivants :

$a)\ f(x) = 2x^2 - x - 1 \quad et\ x_0 = 1, 0, 2$

$b)\ f(x) = \frac{2x+3}{x+2} \qquad et\ \ x_0 = 2,0,-2$

$c)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \qquad et\ x_0 = 1, 3, -2, 0$

$d)\ f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2x-4} \qquad et\ x_0 = 2\ ,\ \ 0, -1, -2, 4$

$e)\ f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} \quad et\ x_0 = 1, -4, 0, 3$

Résolution

$a)\ f(x) = 2x^2 - x - 1 \quad et\ x_0 = 1, 0, 2$

Pour $x_0 = 1$

$\lim\limits_{x \longrightarrow 1} 2x^2 - x - 1 = 2(1)^2 - 1 - 1$

$= 2 - 1 - 1$

$\lim\limits_{x \longrightarrow 1} 2x^2 - x - 1 = 0$

Pour $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} 2x^2 - x - 1 = 2(0)^2 - 0 - 1$

$= 0 - 0 - 1$

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} 2x^2 - x - 1 = -1$

Pour $x_0 = 2$

$\lim\limits_{x \longrightarrow 2} 2x^2 - x - 1 = 2(2)^2 - 2 - 1$

$= 8 - 2 - 1$

$\lim\limits_{x \longrightarrow 2} 2x^2 - x - 1 = 5$

$b)\ f(x) = \frac{2x+3}{x+2} \qquad et\ \ x_0 = 2,0,-2$

Pour $x_0 = 2$

$\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(2)+3}{2+2}$

$= \frac{4+3}{4}$

$\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \frac{2x+3}{x+2} = {}^{7}/_{4}$

Pour $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(0)+3}{0+2}$

$= \frac{0+3}{2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x+3}{x+2} = {}^{3}/_{2}$

Pour $x_0 = -2$

$\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(-2)+3}{-2+2}$

$= \frac{-4+3}{0}$

$= \frac{-1}{0}$

$= \infty$

Déterminons les signes de ∞ par l'étude de signes de $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

$2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = {}^{-3}/_{2}$

$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

x	$-\infty$		$^{-3}/_{2}$		-2		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+3}{x+2}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{2x+3}{x+2} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{2x+3}{x+2} = -\infty$

$c)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \qquad et\ x_0 = 1, 3, -2, 0$

Pour $x_0 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{1^2 - 4}$

$= \sqrt{1 - 4}$

$= \sqrt{-3}$

La fonction n'admet pas de limite au point $x_0 = 1$

Pour $x_0 = 3$

$\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{3^2 - 4}$

$$\sqrt{9-4}$$

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2-4} = \sqrt{5}$$

Pour $x_0 = -2$

$$\lim_{x\to -2} \sqrt{x^2-4} = \sqrt{(-2)^2-4}$$

$$\sqrt{4-4}$$

$$\lim_{x\to -2} \sqrt{x^2-4} = 0$$

$d)\ f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2x-4} \quad et\ x_0 = 2\ ,\ \ 0, -1, -2, 4$

Pour $x_0 = 2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+1}}{2x-4} = \frac{\sqrt{2+1}}{2(2)-4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4-4}$$

$$= \infty$$

Etudions les signes de $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2x-4}$ pour déterminer les signes de ∞

$\sqrt{x+1} = 0 \iff \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 0^2$

$\iff x+1 = 0 \iff x = -1$

$2x-4 = 0 \iff 2x = 4$

$\iff x = {}^{4}/_{2}$

$\iff x = 2$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$\sqrt{x+1}$		$\|\|$	0	$+$		$+$	
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{\sqrt{x+1}}{2x-4}$		$\|\|$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{\sqrt{x+1}}{2x-4} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{\sqrt{x+1}}{2x-4} = -\infty$

Pour $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}}{2x-4} = \frac{\sqrt{0+1}}{2(0)-4}$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{0-4}$$

$$= \frac{1}{-4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}}{2x-4} = {}^{1}/_{-4}$$

Pour $x_0 = -1$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+1}}{2x-4} = \frac{\sqrt{-1+1}}{2(-1)-4}$$

$$= \frac{\sqrt{0}}{-2-4}$$

$$= \frac{0}{-6}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+1}}{2x-4} = 0$$

$e)\ f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} \quad et\ x_0 = 1, -4, 0, 3$

Pour $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \sqrt{\frac{1+3}{1-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{-1}}$$

$$= \sqrt{-4}$$

La fonction $(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ n'admet pas de limite au point $x_0 = 1$

Pour $x_0 = -4$

$$\lim_{x \to -4} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \sqrt{\frac{-4+3}{-4-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{-1}{-6}}$$

$$= \sqrt{{}^{1}/_{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1.\sqrt{6}}{\sqrt{6}.\sqrt{6}}$$

$$\lim_{x \to -4} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Pour $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \sqrt{\frac{0+3}{0-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{-2}}$$

La fonction $\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ n'admet pas de limite au point $x_0 = 0$

Pour $x_0 = 3$

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \sqrt{\frac{3+3}{3-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{1}}$$

$$= \sqrt{6}$$

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \sqrt{6}$$

EXERCICE 2

Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim_{3} \frac{2}{3}$

$b)\ \lim_{0} (\pi + 4)$

$c)\ \lim_{3} \frac{x^2-2}{x^2-3x+10}$

$d)\ \lim_{-4} \frac{x}{2|x+1|}$

$e)\ \lim_{0} \sqrt{x^2+1}$

Résolution

$a)\ \lim_{3} \frac{2}{3}$

$\lim_{3} \frac{2}{3} = {}^{2}/_{3}$

$b)\ \lim_{0} (\pi + 4)$

$\lim_{0} (\pi + 4) = \pi + 4$

$c)\ \lim_{3} \frac{x^2-2}{x^2-3x+10}$

$\lim_{3} \frac{x^2-2}{x^2-3x+10} = \frac{3^2-2}{3^2-3(3)+10}$

$$= \frac{9-2}{9-9+10}$$

$$= \frac{7}{10}$$

$$\lim_{3} \frac{x^2-2}{x^2-3x+10} = {}^{7}\!/_{10}$$

$d)$ $\lim\limits_{-4} \frac{x}{2|x+1|}$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & si\ x+1 > 0 \\ -(x+1) & si\ x+1 < 0 \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & si\ x > -1 \\ -x-1 & si\ x < -1 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to -4 \\ >}} \frac{x}{2|x+1|} = \lim_{\substack{x \to -4 \\ >}} \frac{x}{2(x+1)}$$

$$= \lim_{\substack{x \to -4 \\ >}} \frac{x}{2x+2}$$

$$= \frac{-4}{2(-4)+2}$$

$$= \frac{-4}{-8+2}$$

$$= \frac{-4}{-6}$$

$$\lim_{\substack{x \to -4 \\ >}} \frac{x}{2(x+1)} = {}^{2}\!/_{3}$$

$$\lim_{\substack{x \to -4 \\ <}} \frac{x}{2|x+1|} = \lim_{\substack{x \to -4 \\ >}} \frac{x}{2(-x-1)}$$

$$= \lim_{\substack{x \to -4 \\ >}} \frac{x}{-2x-2}$$

$$= \frac{-4}{-2(-4)-2}$$

$$= \frac{-4}{8-2}$$

$$= \frac{-4}{6}$$

$$\lim_{\substack{x \to -4 \\ <}} \frac{x}{2(x+1)} = {}^{-2}\!/_{3}$$

La fonction $\frac{x}{2|x+1|}$ n'admet pas de limites au point *x=-4*

$e)$ $\lim\limits_{0} \sqrt{x^2+1}$

$$\lim_{0} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{0^2+1}$$

$$= \sqrt{0+1}$$

$$= \sqrt{1}$$

$$\lim_{0} \sqrt{x^2+1} = 1$$

EXERCICE 3

Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{0} \frac{\sqrt{x-1}}{x}$

$b)\ \lim\limits_{7} \frac{x-2}{\sqrt{x-5}}$

$c)\ \lim\limits_{2} \frac{x-2}{\sqrt{2+x}}$

$d)\ \lim\limits_{1} \frac{2\ \log 2x}{x+1}$

$e)\ \lim\limits_{3} \frac{x^2-x-6}{x+1}$

Résolution

$a)\ \lim\limits_{0} \frac{\sqrt{x-1}}{x}$

$$\lim_{0} \frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{\sqrt{0-1}}{0}$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{0}$$

La fonction $\frac{\sqrt{x-1}}{x}$ n'admet pas de limite au point $x = 0$

$b)\ \lim\limits_{7} \frac{x-2}{\sqrt{x-5}}$

$$\lim_{7} \frac{x-2}{\sqrt{x-5}} = \frac{7-2}{\sqrt{7-5}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{7} \frac{x-2}{\sqrt{x-5}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$c)\ \lim\limits_{2} \frac{x-2}{\sqrt{2+x}}$

$$\lim_{2} \frac{x-2}{\sqrt{2+x}} = \frac{2-2}{\sqrt{2+2}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{4}}$$

$$= \frac{0}{2}$$

$$\lim_{2} \frac{x-2}{\sqrt{2+x}} = 0$$

$d)\ \lim\limits_{1} \frac{2\ \log 2x}{x+1}$

$$\lim_{1} \frac{2\ \log 2x}{x+1} = \frac{2 \log 2(1)}{1+1}$$

$$= \frac{2 \log 2}{2}$$

$$= \log 2$$

$$\lim_{1} \frac{2\ \log 2x}{x+1} = \log 2$$

$e)\ \lim\limits_{3} \frac{x^2-x-6}{x+1}$

$$\lim_{3} \frac{x^2-x-6}{x+1} = \frac{3^2-3-6}{3+1}$$

$$= \frac{9-3-6}{4}$$

$$= \frac{0}{4}$$

$$\lim_{3} \frac{x^2-x-6}{x+1} = 0$$

EXERCICE 4

Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{\frac{1}{5}} \frac{x+2}{5x-1}$

$b)\ \lim\limits_{10} \frac{3-x}{x-10}$

$c)\ \lim\limits_{-\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+4x+1}$

$d)\ \lim\limits_{2} \frac{4}{x-2}$

$e)\ \lim\limits_{-2} \frac{-3}{x^2+7x+10}$

Résolution

$a)\ \lim\limits_{\frac{1}{5}} \frac{x+2}{5x-1}$

$\lim\limits_{\frac{1}{5}} \frac{x+2}{5x-1} = \frac{\frac{1}{5}+2}{5\times\frac{1}{5}-1}$

$= \frac{\frac{1+10}{5}}{1-1}$

$= \frac{\frac{11}{5}}{0}$

$= \infty$

Faisons l'étude de signe de la fonction $f(x) = \frac{x+2}{5x-1}$ pour déterminer les signes de ∞

$x + 2 = 0 \iff x = -2$

$5x - 1 = 0 \iff 5x = 1 \iff x = {}^{1}/_{5}$

x	$-\infty$		-2		${}^{1}/_{5}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+2}{5x-1}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{5} \\ >}} \frac{x+2}{5x-1} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{5} \\ <}} \frac{x+2}{5x-1} = -\infty$

$b)\ \lim\limits_{10} \frac{3-x}{x-10}$

$\lim\limits_{10} \frac{3-x}{x-10} = \frac{3-10}{10-10}$

$= \frac{-7}{0}$

$= \infty$

Faisons l'étude de signe de la fonction $f(x) = \frac{3-x}{x-10}$ pour déterminer les signes de ∞

$3 - x = 0 \iff x = 3$

$x - 10 = 0 \iff x = 10$

x	$-\infty$		3		10		$+\infty$
$3-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-10$		$-$		$-$	0	$+$	

$\frac{3-x}{x-10}$	$-$ 0 $+$ $\|\|$ $-$

$\lim\limits_{\substack{x\to 10\\ >}} \frac{3-x}{x-10} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 10\\ <}} \frac{3-x}{x-10} = +\infty$

$c)\ \lim\limits_{-\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+4x+1}$

$\lim\limits_{-\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+4x+1} = \frac{1}{4\left(-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(-\frac{1}{2}\right)+1}$

$= \frac{1}{4.\frac{1}{4}-\frac{4}{2}+1}$

$= \frac{1}{1-2+1}$

$= \frac{1}{0}$

$= \infty$

Faisons l'étude de signe de la fonction $f(x) = \frac{1}{4x^2+4x+1}$ pour déduire les signes de ∞

$4x^2 + 4x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4^2 - 4 \times 4 \times 1$

$\Delta = 0$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2\times 4}$

$x = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
1		$+$		$+$	
$4x^2+4x+1$		$+$	0	$+$	
$\frac{1}{4x^2+4x+1}$		$+$	$\|\|$	$+$	

$\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2}\\ >}} \frac{1}{4x^2+4x+1} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2}\\ <}} \frac{1}{4x^2+4x+1} = +\infty$

$d)\ \lim\limits_{2} \frac{4}{x-2}$

$\lim\limits_{2} \frac{4}{x-2} = \frac{4}{2-2}$

$= \frac{4}{0}$

$= \infty$

Faisons l'étude de signe de la fonction $f(x) = \frac{4}{x-2}$ pour déterminer les signes de ∞

$x - 2 = 0 \iff x = 2$

x	$-\infty$			2		$+\infty$
4		$+$			$+$	
$x-2$		$-$		0	$+$	
$\frac{4}{x-2}$		$-$		$\|\|$	$+$	

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{4}{x-2} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{4}{x-2} = -\infty$

$e)$ $\lim\limits_{-2} \frac{-3}{x^2+7x+10}$

$\lim\limits_{-2} \frac{-3}{x^2+7x+10} = \frac{-3}{(-2)^2+7(-2)+10}$

$= \frac{-3}{4-14+10}$

$= \frac{-3}{0}$

$= \infty$

Etudions les signes de la fonction $f(x) = \frac{-3}{x^2+7x+10}$ pour déterminer les signes de ∞

$x^2 + 7x + 10 = 0$

$a = 1$, $b = 7$ $\;$ $et\ c = 10$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 7^2 - 4 \times 1 \times 10$

$= 49 - 40$

$\Delta = 9$

$x_1 = \frac{-b-\Delta}{2a}$

$= \frac{-7-\sqrt{9}}{2\times1}$

$= \frac{-7-3}{2}$

$= \frac{-10}{2}$

$x_1 = -5$

$x_2 = \frac{-b+\Delta}{2a}$

$= \frac{-7+\sqrt{9}}{2\times1}$

$= \frac{-7+3}{2}$

$= \frac{-4}{2}$

$x_2 = -2$

x	$-\infty$		-5		-2		$+\infty$
-3		$-$		$-$		$-$	
$x^2+7x+10$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{-3}{x^2+7x+10}$		$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{-3}{x^2+7x+10} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{-3}{x^2+7x+10} = +\infty$

EXERCICE 5

Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

$b)\ \lim\limits_{\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1}$

$c)\ \lim\limits_{1} \frac{3x^2-2x-1}{x^2+3x-4}$

$d)\ \lim\limits_{\frac{3}{2}} \frac{8x^3-27}{4x^2-9}$

$e)\ \lim\limits_{0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

Résolution

$a)\ \lim\limits_{2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

$$\lim_{2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \frac{2^2-2-2}{2^2-3\times2+2}$$

$$= \frac{0}{0}\ (F.I.)$$

Pour lever l'indétermination, factorisons les deux termes

$$\begin{array}{c|l}
x^2-x-2 & x-2 \\ \cline{2-2}
-x^2+2x & x+1 \\ \hline
x-2 & \\
-x+2 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|l}
x^2-3x+2 & x-2 \\ \cline{2-2}
-x^2+2x & x-1 \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|}
\hline
-x+2 \\
x-2 \\
\hline
0
\end{array}$$

Donc

$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ et
$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$

$\lim\limits_{2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)}$

$= \lim\limits_{2} \frac{x+1}{x-1}$

$= \frac{2+1}{2-1}$

$= \frac{3}{1}$

$\lim\limits_{2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = 3$

$b)$ $\lim\limits_{\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1}$

$\lim\limits_{\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1} = \frac{4.\left(\frac{1}{2}\right)^2-1}{2.\left(\frac{1}{2}\right)-1}$

$= \frac{4.\frac{1}{4}-1}{1-1}$

$= \frac{0}{0} \quad (F.I.)$

Levons l'indétermination en factorisant les deux termes

On sait que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Dans le cas du numérateur, a vaut $2x$ et b vaut 1

$4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1)$

$\lim\limits_{\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1} = \lim\limits_{\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)(2x-1)}{2x-1}$

$= \lim\limits_{\frac{1}{2}} 2x + 1$

$= 2.\frac{1}{2} + 1$

$= 1 + 1$

$\lim\limits_{\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1} = 2$

$c)$ $\lim\limits_{1} \frac{3x^2-2x-1}{x^2+3x-4}$

$\lim\limits_{1} \frac{3x^2-2x-1}{x^2+3x-4} = \frac{3\,(1)^2-2(1)-1}{1^2+3(1)-4}$

$= \frac{3-2-1}{1+3-4}$

$= \frac{0}{0} \quad (F.I.)$

Levons l'indétermination

$$\begin{array}{c|c} 3x^2-2x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} -3x^2+3x & 3x+1 \\ \cline{1-1} x-1 & \\ -x+1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} x^2+3x-4 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^2+x & x+4 \\ \cline{1-1} 4x-4 & \\ -4x+4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Donc

$3x^2-2x-1 = (x-1)(3x+1)$ et

$x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$

$\lim\limits_{1} \frac{3x^2-2x-1}{x^2+3x-4} = \lim\limits_{1} \frac{(x-1)(3x+1)}{(x-1)(x+4)}$

$= \lim\limits_{1} \frac{3x+1}{x+4}$

$= \frac{3(1)+1}{1+4}$

$= \frac{3+1}{5}$

$\lim\limits_{1} \frac{3x^2-2x-1}{x^2+3x-4} = {}^{4}\!/_{5}$

$d)\ \lim\limits_{\frac{3}{2}} \frac{8x^3-27}{4x^2-9}$

$\lim\limits_{\frac{3}{2}} \frac{8x^3-27}{4x^2-9} = \frac{8.\left(\frac{3}{2}\right)^3-27}{4.\left(\frac{3}{2}\right)^2-9}$

$= \frac{8.\frac{27}{8}-27}{4.\frac{9}{4}-9}$

$= \frac{27-27}{9-9}$

$= \frac{0}{0}\ (F.I.)$

Levons l'indétermination par la factorisation.

On sait que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3$

$= (2x-3)[(2x)^2 + 2x.3 + 3^2]$

$8x^3 - 27 = (2x-3)(4x^2 + 6x + 9)$

De même, nous savons que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2$

$4x^2 - 9 \ = (2x-3)(2x+3)$

$\lim_{\frac{3}{2}} \frac{8x^3-27}{4x^2-9} = \lim_{\frac{3}{2}} \frac{(2x-3)(4x^2+6x+9)}{(2x-3)(2x+3)}$

$= \lim_{\frac{3}{2}} \frac{4x^2+6x+9}{2x+3}$

$= \frac{4.\left(\frac{3}{2}\right)^2+6.\left(\frac{3}{2}\right)+9}{2.\left(\frac{3}{2}\right)+3}$

$= \frac{4.\frac{9}{4}+3.3+9}{3+3}$

$= \frac{9+9+9}{6}$

$\lim_{\frac{3}{2}} \frac{8x^3-27}{4x^2-9} = {}^{9}/_{2}$

$e)\ \lim_{0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

$\lim_{0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x} = \frac{4.(0)^2-2(0)^2+0}{3.(0)^2+2.0}$

$= \frac{0-0+0}{0+0}$

$= \frac{0}{0}$ (F.I.)

Levons l'indétermination

$\lim_{0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x} = \lim_{0} \frac{x(x^2-2x+1)}{x(x+2)}$

$= \lim_{0} \frac{x^2-2x+1}{x+2}$

$$= \frac{0^2-2.0+1}{0+2}$$

$$= \frac{0-0+1}{2}$$

$$\lim_{0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x} = 1/2$$

EXERCICE 6

Calculer

$a)\ \lim\limits_{1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$b)\ \lim\limits_{1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

$c)\ \lim\limits_{1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

$d)\ \lim\limits_{3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

$e)\ \lim\limits_{3} \frac{\sqrt{2x-2}-\sqrt{3x-5}}{x^2-4x+3}$

Résolution

$a)\ \lim\limits_{1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$$\lim_{1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{1}-1}{1-1}$$

$$= \frac{0}{0}\ (F.I.)$$

Levons l'indétermination en multipliant les deux termes par le conjugué du numérateur.

$$\lim_{1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$ (Voir tableau ci-haut sur les expressions et leurs conjugués)

$$= \lim_{1} \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}+1}$$

$$= \frac{1}{1+1}$$

$$\lim_{1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1/2$$

$b)\ \lim\limits_{1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

$\lim\limits_{1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{1^2-\sqrt{1}}{\sqrt{1}-1}$

$= \frac{1-1}{1-1}$

$= \frac{0}{0}\ (F.I.)$

Levons l'indétermination en multipliant les deux termes par les conjugués du numérateur et du dénominateur

$\lim\limits_{1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{1} \frac{(x^2-\sqrt{x})(x^2+\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x^2+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{1} \frac{(x^4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{1} \frac{x(x^3-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}$

On sait que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\lim\limits_{1} \frac{x(x^3-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})} = \lim\limits_{1} \frac{x(x-1)(x^2+x.1+1^2)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{1} \frac{x(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{1} \frac{x\,(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{x^2+\sqrt{x}}$

$= \frac{1\,(1^2+1+1)(\sqrt{1}+1)}{1^2+\sqrt{1}}$

$= \frac{1\,(3)(2)}{1+1}$

$= \frac{6}{2}$

$\lim\limits_{1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 3$

$c)\ \lim\limits_{1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

$\lim\limits_{1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{\sqrt{1}-1}{\sqrt[4]{1}-1}$

$= \frac{1-1}{1-1}$

$= \frac{0}{0}\quad (F.I.)$

Levons l'indétermination en multipliant les deux termes par les conjugués du numérateur et dénominateur.

Le conjugué de $\sqrt[4]{a} - b$ est $\sqrt[4]{a^3} + b\sqrt[4]{a^2} + b^2\sqrt[4]{a} + b^3$ (voir Tableau ci-haut)

$$\lim_{1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\left(\sqrt[4]{x^3}+1\sqrt[4]{x^2}+1^2\sqrt[4]{x}+1^3\right)}{(\sqrt[4]{x}-1)\left(\sqrt[4]{x^3}+1\sqrt[4]{x^2}+1^2\sqrt[4]{x}+1^3\right)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{1}\frac{(x-1)\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1\right)}{\left(x-1^4\right)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{1}\frac{(x-1)\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1\right)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{1}\frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{\sqrt[4]{1^3}+\sqrt[4]{1^2}+\sqrt[4]{1}+1}{\sqrt{1}+1}$$

$$=\frac{1+1+1+1}{1+1}$$

$$=\frac{4}{2}$$

$$\lim_{1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=2$$

$d)$ $\lim_{3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

$$\lim_{3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{\sqrt{3+1}-2}{3-3}$$

$$=\frac{\sqrt{4}-2}{3-3}$$

$$=\frac{0}{0}\ (F.I.)$$

Levons l'indétermination en multipliant les deux termes par le conjugué du numérateur

$$\lim_{3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\lim_{3}\frac{(x+1-4)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\lim_{3}\frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\lim_{3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3+1}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}$$

$$=\frac{1}{2+2}$$

$\lim\limits_{3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = {}^{1}/_{4}$

$e)\ \lim\limits_{3} \frac{\sqrt{2x-2}-\sqrt{3x-5}}{x^2-4x+3}$

$$\lim\limits_{3} \frac{\sqrt{2x-2}-\sqrt{3x-5}}{x^2-4x+3} = \frac{\sqrt{2.3-2}-\sqrt{3.3-5}}{3^2-4.3+3}$$

$$= \frac{\sqrt{6-2}-\sqrt{9-5}}{9-12+3}$$

$$= \frac{\sqrt{4}-\sqrt{4}}{0}$$

$$= \frac{0}{0} \quad (F.I.)$$

Levons l'indétermination en multipliant les deux termes par le conjugué du numérateur

$$\lim\limits_{3} \frac{\sqrt{2x-2}-\sqrt{3x-5}}{x^2-4x+3} = \lim\limits_{3} \frac{(\sqrt{2x-2}-\sqrt{3x-5})(\sqrt{2x-2}+\sqrt{3x-5})}{(x^2-4x+3)(\sqrt{2x-2}+\sqrt{3x-5})}$$

$$= \lim\limits_{3} \frac{2x-2-(3x-5)}{(x^2-4x+3)(\sqrt{2x-2}+\sqrt{3x-5})}$$

$$= \lim\limits_{3} \frac{2x-2-3x+5}{(x^2-4x+3)(\sqrt{2x-2}+\sqrt{3x-5})}$$

$$= \lim\limits_{3} \frac{-x+3}{(x^2-4x+3)(\sqrt{2x-2}+\sqrt{3x-5})}$$

$$= \frac{-3+3}{(3^2-4.3+3)(\sqrt{2.3-2}+\sqrt{3.3-5})}$$

$$= \frac{0}{0} \quad (F.I.)$$

L'indétermination persiste, décomposons $x^2 - 4x + 3$ pour lever cette indétermination

$$\begin{array}{c|l} x^2 - 4x + 3 & x - 3 \\ \cline{2-2} -x^2 + 3x & x - 1 \\ \hline -x + 3 & \\ x - 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$

$$\lim\limits_{3} \frac{-x+3}{(x^2-4x+3)(\sqrt{2x-2}+\sqrt{3x-5})} = \lim\limits_{3} \frac{-(x-3)}{(x-3)(x-1)(\sqrt{2x-2}+\sqrt{3x-5})}$$

$$= \lim\limits_{3} \frac{-1}{(x-1)(\sqrt{2x-2}+\sqrt{3x-5})}$$

$$= \frac{-1}{(3-1)(\sqrt{2.3-2}+\sqrt{3.3-5})}$$

$$= \frac{-1}{2(\sqrt{6-2}+\sqrt{9-5})}$$

$$= \frac{-1}{2(\sqrt{4}+\sqrt{4})}$$

$$= \frac{-1}{2(2+2)}$$

$$= \frac{-1}{2.4}$$

$$\lim_{3} \frac{\sqrt{2x-2}-\sqrt{3x-5}}{x^2-4x+3} = -1/8$$

EXERCICE 7

Calculer

$a)\ \lim\limits_{3} \dfrac{x^2+\frac{x+1}{x-3}}{2x+1-\frac{x^2}{x-3}}$

$b)\ \lim\limits_{-3} \dfrac{2x+\frac{x+1}{x+3}}{1+\frac{x^2}{x^2+4x+3}}$

$c)\ \lim\limits_{1} \dfrac{x^2+\frac{x}{(x-1)^2}}{x+1+\frac{1}{x^2-1}}$

$d)\ \lim\limits_{2} \dfrac{x+3+\frac{x+1}{x-2}}{x+\frac{x^2}{x-2}}$

Résolution

$a)\ \lim\limits_{3} \dfrac{x^2+\frac{x+1}{x-3}}{2x+1-\frac{x^2}{x-3}}$

$$\lim_{3} \frac{x^2+\frac{x+1}{x-3}}{2x+1-\frac{x^2}{x-3}} = \frac{3^2+\frac{3+1}{3-3}}{2.3+1-\frac{3^2}{3-3}}$$

$$= \frac{9+\frac{4}{0}}{6+1-\frac{9}{0}}$$

$$= \frac{9+\infty}{7-\infty}$$

$$= \frac{\infty}{\infty}\ (F.I.)$$

Levons l'indétermination

$$\lim_{3}\frac{x^2+\frac{x+1}{x-3}}{2x+1-\frac{x^2}{x-3}}=\lim_{3}\frac{\frac{(x-3)x^2+x+1}{x-3}}{\frac{(x-3)(2x+1)-x^2}{x-3}}$$

$$=\lim_{3}\frac{\frac{x^3-3x^2+x+1}{x-3}}{\frac{2x^2+x-6x-3-x^2}{x-3}}$$

$$=\lim_{3}\frac{\frac{x^3-3x^2+x+1}{x-3}}{\frac{x^2-5x-3}{x-3}}$$

$$=\lim_{3}\frac{x^3-3x^2+x+1}{x-3}\cdot\frac{x-3}{x^2-5x-3}$$

$$=\lim_{3}\frac{x^3-3x^2+x+1}{x^2-5x-3}$$

$$=\frac{3^3-3(3)^2+3+1}{3^2-5.3-3}$$

$$=\frac{27-27+4}{9-15-3}$$

$$=\frac{4}{-9}$$

$$\lim_{3}\frac{x^2+\frac{x+1}{x-3}}{2x+1-\frac{x^2}{x-3}}=-{}^{4}/_{9}$$

$b)$ $\lim\limits_{-3}\frac{2x+\frac{x+1}{x+3}}{1+\frac{x^2}{x^2+4x+3}}$

$$\lim_{-3}\frac{2x+\frac{x+1}{x+3}}{1+\frac{x^2}{x^2+4x+3}}=\frac{2(-3)+\frac{-3+1}{-3+3}}{1+\frac{(-3)^2}{(-3)^2+4(-3)+3}}$$

$$=\frac{-6+\frac{-2}{0}}{1+\frac{9}{9-12+3}}$$

$$=\frac{-6+\infty}{1+\frac{9}{0}}$$

$$=\frac{\infty}{1+\infty}$$

$$=\frac{\infty}{\infty}\quad(F.I.)$$

Levons l’indétermination

$$\lim_{-3}\frac{2x+\frac{x+1}{x+3}}{1+\frac{x^2}{x^2+4x+3}}=\lim_{-3}\frac{\frac{(x+3)2x+x+1}{x+3}}{\frac{x^2+4x+3+x^2}{x^2+4x+3}}$$

$$= \lim_{-3} \frac{\frac{2x^2+6x+x+1}{x+3}}{\frac{2x^2+4x+3}{x^2+4x+3}}$$

$$= \lim_{-3} \frac{\frac{2x^2+7x+1}{x+3}}{\frac{2x^2+4x+3}{x^2+4x+3}}$$

$$= \lim_{-3} \frac{2x^2+7x+1}{x+3} . \frac{x^2+4x+3}{2x^2+4x+3}$$

$$= \lim_{-3} \frac{(2x^2+7x+1)(x^2+4x+3)}{(x+3)(2x^2+4x+3)}$$

$$= \frac{[\ 2(-3)^2+7(-3)+1]\ [\ (-3)^2+4(-3)+3]}{(-3+3)[2(-3)^2+4(-3)+3]}$$

$$= \frac{(18-21+1)(9-12+3)}{0.(18-12+3)}$$

$$= \frac{0}{0} \ \ (F.I.)$$

Pour lever cette indétermination, décomposons $x^2 + 4x + 3$

$$\begin{array}{c|l} x^2 + 4x + 3 & x + 3 \\ \cline{2-2} -x^2 - 3x & x + 1 \\ \hline x + 3 & \\ -x - 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$

$$\lim_{-3} \frac{(2x^2+7x+1)(x^2+4x+3)}{(x+3)(2x^2+4x+3)} = \lim_{-3} \frac{(2x^2+7x+1)(x+3)(x+1)}{(x+3)(2x^2+4x+3)}$$

$$= \lim_{-3} \frac{(2x^2+7x+1)(x+1)}{2x^2+4x+3}$$

$$= \frac{[2(-3)^2+7(-3)+1]\ (-3+1)}{2(-3)^2+4(-3)+3}$$

$$= \frac{(18-21+1).(-2)}{18-12+3}$$

$$= \frac{(-2)(-2)}{9}$$

$$\lim_{-3} \frac{2x+\frac{x+1}{x+3}}{1+\frac{x^2}{x^2+4x+3}} = {}^4\!/_9$$

$c)\ \lim\limits_{1} \frac{x^2+\frac{x}{(x-1)^2}}{x+1+\frac{1}{x^2-1}}$

$$\lim\limits_{1} \frac{x^2+\frac{x}{(x-1)^2}}{x+1+\frac{1}{x^2-1}} = \frac{1^2+\frac{1}{(1-1)^2}}{1+1+\frac{1}{1^2-1}}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{0}}{2+\frac{1}{0}}$$

$$= \frac{1+\infty}{2+\infty}$$

$$= \frac{\infty}{\infty}\ (F.I.)$$

Levons l'indétermination

$$\lim\limits_{1} \frac{x^2+\frac{x}{(x-1)^2}}{x+1+\frac{1}{x^2-1}} = \lim\limits_{1} \frac{\frac{(x-1)^2\,x^2+x}{(x-1)^2}}{\frac{(x^2-1)(x+1)+1}{x^2-1}}$$

$$= \lim\limits_{1} \frac{\frac{(x^2-2x+1)x^2+x}{(x-1)^2}}{\frac{x^3+x^2-x-1+1}{x^2-1}}$$

$$= \lim\limits_{1} \frac{\frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2}}{\frac{x^3+x^2-x}{x^2-1}}$$

$$= \lim\limits_{1} \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x^3+x^2-x}$$

$$= \lim\limits_{1} \frac{(x^4-2x^3+x^2+x)(x^2-1)}{(x-1)^2\,(x^3+x^2-x)}$$

On sait que $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$= \lim\limits_{1} \frac{(x^4-2x^3+x^2+x)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)(x^3+x^2-x)}$$

$$= \lim\limits_{1} \frac{(x^4-2x^3+x^2+x)(x+1)}{(x-1)(x^3+x^2-x)}$$

$$= \lim\limits_{1} \frac{x\,(x^3-2x^2+x+1)(x+1)}{(x-1)x(x^2+x-1)}$$

$$= \lim\limits_{1} \frac{(x^3-2x^2+x+1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x-1)}$$

$$= \frac{[1^3-2(1)^2+1+1]\ (1+1)}{(1-1)(1^2+1-1)}$$

$$= \frac{(1-2+1+1)(2)}{0.(1+1-1)}$$

$$= \frac{2}{0}$$

$$= \infty$$

Il faut faire l'étude de signe de la fonction $f(x)\frac{(x^3-2x^2+x+1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x-1)}$ pour déterminer les signes de ∞ (Réservé au lecteur)

$d)\ \lim\limits_{2} \frac{x+3+\frac{x+1}{x-2}}{x+\frac{x^2}{x-2}}$

$$\lim_{2} \frac{x+3+\frac{x+1}{x-2}}{x+\frac{x^2}{x-2}} = \frac{2+3+\frac{2+1}{2-2}}{2+\frac{2^2}{2-2}}$$

$$= \frac{5+\frac{3}{0}}{2+\frac{4}{0}}$$

$$= \frac{5+\infty}{2+\infty}$$

$$= \frac{\infty}{\infty}\ (F.I.)$$

Levons l'indétermination

$$\lim_{2} \frac{x+3+\frac{x+1}{x-2}}{x+\frac{x^2}{x-2}} = \lim_{2} \frac{\frac{(x-2)(x+3)+x+1}{x-2}}{\frac{(x-2)x+x^2}{x-2}}$$

$$= \lim_{2} \frac{\frac{x^2+3x-2x-6+x+1}{x-2}}{\frac{x^2-2x+x^2}{x-2}}$$

$$= \lim_{2} \frac{x^2+2x-5}{x-2} . \frac{x-2}{2x^2-2x}$$

$$= \lim_{2} \frac{x^2+2x-5}{2x^2-2x}$$

$$= \frac{2^2+2.2-5}{2(2)^2-2.2}$$

$$= \frac{4+4-5}{8-4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\lim_{2} \frac{x+3+\frac{x+1}{x-2}}{x+\frac{x^2}{x-2}} = {}^{3}/_{4}$$

EXERCICE 8

Calculer les limites suivantes

$a)\ \lim\limits_{\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$

$b)\ \lim\limits_{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-x-1}}{2x-1}$

$c)\ \lim\limits_{\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

$d)\ \lim\limits_{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2-4x+1}}$

$e)\ \lim\limits_{\infty} \frac{\sqrt[3]{1-8x^3}}{x}$

Résolution

$a)\ \lim\limits_{\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$

$$\lim_{\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} = \lim_{\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x-2}$$

$$= \lim_{\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{\pm\infty} \frac{|x|}{x}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{-\infty} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

$b)\ \lim\limits_{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-x-1}}{2x-1}$

$$\lim_{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-x-1}}{2x-1} = \lim_{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)}}{2x-1}$$

$$= \lim_{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{2x}$$

$$= \lim_{\infty} \frac{x}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-x-1}}{2x-1} = {}^{1}/_{2}$$

$c)\ \lim\limits_{\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\lim\limits_{\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim\limits_{\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim\limits_{\infty} \frac{2x}{|x|} \text{ on a deux cas :}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{+\infty} \frac{2x}{x} = 2 \\ \lim\limits_{-\infty} \frac{2x}{-x} = -2 \end{cases}$$

$d)\ \lim\limits_{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2-4x+1}}$

$$\lim\limits_{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2-4x+1}} = \lim\limits_{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2\left(1-\frac{4x}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)}}$$

$$= \lim\limits_{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)}}$$

$$= \lim\limits_{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2}}$$

$$= \lim\limits_{\infty} \frac{x}{\sqrt{2}\ \sqrt{x^2}}$$

$$= \lim\limits_{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim\limits_{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim\limits_{\infty} \frac{x}{|x|}$$

On a deux cas suivants :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \lim\limits_{-\infty} \frac{x}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim\limits_{-\infty} \frac{x}{-x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-1)$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{-1\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$$
$$= \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$e)\ \lim\limits_{\infty} \frac{\sqrt[3]{1-8x^3}}{x}$

$$\lim\limits_{\infty} \frac{\sqrt[3]{1-8x^3}}{x} = \lim\limits_{\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3\left(\frac{1}{8x^2}-1\right)}}{x}$$

$$= \lim\limits_{\infty} \frac{\sqrt[3]{-8x^3}}{x}$$

$$= \lim\limits_{\infty} \frac{-2x}{x}$$

$$= -2$$

EXERCICE 9

Calculer

$a)\ \lim\limits_{4} \left[\frac{x+6}{x^2-16} - \frac{x+1}{x(x-4)}\right]$

$b)\ \lim\limits_{1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right)$

$c)\ \lim\limits_{0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$

$d)\ \lim\limits_{1} \left[\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}\right]$

$e)\ \lim\limits_{2} \left[\frac{2x-7}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-3x+2}\right]$

$f)\ \lim\limits_{5}(x^2-6x+5)\ \frac{x-3}{x^2-7x+10}$

Résolution

$a)\ \lim\limits_{4} \left[\frac{x+6}{x^2-16} - \frac{x+1}{x(x-4)}\right]$

$$\lim\limits_{4} \left[\frac{x+6}{x^2-16} - \frac{x+1}{x(x-4)}\right] = \left[\frac{4+6}{4^2-16} - \frac{4+1}{4(4-4)}\right]$$

$$= \frac{10}{0} - \frac{5}{0}$$

$$= \infty - \infty\ (F.I.)$$

$$\lim\limits_{4} \left[\frac{x+6}{x^2-16} - \frac{x+1}{x(x-4)}\right] = \lim\limits_{4} \left[\frac{x+6}{(x+4)(x-4)} - \frac{x+1}{x(x-4)}\right]$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$= \lim\limits_{4} \left[\frac{x(x+6)-(x+4)(x+1)}{x(x+4)(x-4)}\right]$$

$$= \lim\limits_{4} \left[\frac{x^2+6x-(x^2+x+4x+4)}{x(x+4)(x-4)}\right]$$

$$= \lim\limits_{4} \left[\frac{x^2+6x-x^2-x-4x-4}{x(x+4)(x-4)}\right]$$

$$= \lim_{4} \left[\frac{(x-4)}{x(x+4)(x-4)}\right]$$

$$= \lim_{4} \left[\frac{1}{x(x+4)}\right]$$

$$= \frac{1}{4(4+4)}$$

$$= \frac{1}{32}$$

$$\lim_{4} \left[\frac{x+6}{x^2-16} - \frac{x+1}{x(x-4)}\right] = {}^{1}\!/_{32}$$

$b)$ $\lim_{1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right)$

$$\lim_{1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \left(\frac{2}{1^2-1} - \frac{1}{1-1}\right)$$

$$= \frac{2}{0} - \frac{1}{0}$$

$$= \infty - \infty \ (F.I.)$$

$$\lim_{1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{1} \left[\frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{1} \left[\frac{2-1(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right]$$

$$= \lim_{1} \left[\frac{2-x-1}{(x+1)(x-1)}\right]$$

$$= \lim_{1} \left[\frac{-x+1}{(x+1)(x-1)}\right]$$

$$= \lim_{1} \left[\frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)}\right]$$

$$= \lim_{1} \left[\frac{-1}{x+1}\right]$$

$$= \frac{-1}{1+1}$$

$$\lim_{1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) = {}^{-1}\!/_{2}$$

$c)$ $\lim_{0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$

$$\lim_{0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x+1}{\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{0}} - \frac{0+1}{\sqrt{0}}\right)$$

$$= \frac{1}{0} - \frac{1}{0}$$

$$= \infty - \infty \ (F.I.)$$

$$\lim_{0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x+1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{0} \left(\frac{1-x-1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{0} \frac{-x}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{0}{0}\ (F.I.)$$

Levons l'indétermination

$$\lim_{0} \frac{-x}{\sqrt{x}} = \lim_{0} \frac{-x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{0} \frac{-x\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{0} -\sqrt{x}$$

$$= 0$$

$d)\ \lim\limits_{1} \left[\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}\right]$

$$\lim_{1} \left[\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}\right] = \left[\frac{2}{1-1^2} - \frac{3}{1-1^3}\right]$$

$$= \frac{2}{0} - \frac{3}{0}$$

$$= \infty - \infty\ (F.I.)$$

$$\lim_{1} \left[\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}\right] = \lim_{1} \left[\frac{2}{(1+x)(1-x)} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$= \lim_{1} \left[\frac{2(1+x+x^2)-3(1+x)}{(1+x)(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$= \lim_{1} \left[\frac{2+2x+2x^2-3-3x}{(1+x)(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$= \lim_{1} \left[\frac{2x^2-x-1}{(1+x)(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$= \frac{2.1^2-1-1}{(1+1)(1-1)(1+1+1^2)}$$

$$= \frac{0}{0}\ (F.I.)$$

Levons l'indétermination en décomposant $2x^2 - x - 1$ par $x - 1$

$$\begin{array}{c|c} 2x^2 - x - 1 & x - 1 \\ \cline{2-2} -2x^2 + 2x & 2x + 1 \\ \cline{1-1} x - 1 & \\ -x + 1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Donc $2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$

$$\lim_{1} \left[\frac{2x^2-x-1}{(1+x)(1-x)(1+x+x^2)}\right] = \lim_{1} \left[\frac{(x-1)(2x+1)}{(1+x)(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$= \lim_{1} \left[\frac{-(1-x)(2x+1)}{(1+x)(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$= \lim_{1} \left[\frac{-(2x+1)}{(1+x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$= \frac{-(2.1+1)}{(1+1)(1+1+1^2)}$$

$$= \frac{-3}{(2)(3)}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{1}\left[\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}\right] = {}^{-1}\!/_{2}$$

$e)$ $\lim_{2}\left[\frac{2x-7}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-3x+2}\right]$

$$\lim_{2}\left[\frac{2x-7}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-3x+2}\right] = \frac{2.2-7}{2^2-2-2} - \frac{1}{2^2-3.2+2}$$

$$= \frac{4-7}{0} - \frac{1}{0}$$

$$= \infty - \infty \ (F.I.)$$

$$\lim_{2}\left[\frac{2x-7}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-3x+2}\right] = \lim_{2} \left[\frac{(x^2-3x+2)(2x-7)-(x^2-x-2)}{(x^2-x-2)(x^2-3x+2)}\right]$$

$$= \lim_{2} \left[\frac{2x^3-7x^2-6x^2+21x+4x-14-x^2+x+2}{(x^2-x-2)(x^2-3x+2)}\right]$$

$$= \lim_{2} \left[\frac{2x^3-14x^2+26x-12}{(x^2-x-2)(x^2-3x+2)}\right]$$

$$= \frac{2.2^3-14.2^2+26.2-12}{(2^2-2-2)(2^2-3.2+2)}$$

$$= \frac{16-56+52-12}{0\times 0}$$

$$= \frac{0}{0} \ (F.I.)$$

Levons l'indétermination.

Décomposons $2x^3 - 14x^2 + 26x - 12$ par $x - 2$

$2x^3 - 14x^2 + 26x - 12$	$x - 2$
$-2x^3 + 4x^2$	$2x^2 - 10x + 6$
$-10x^2 + 26x - 12$	
$10x^2 - 20x$	
$6x - 12$	
$-6x + 12$	
0	

Donc $2x^3 - 14x^2 + 26x - 12 = (x-2)(2x^2 - 10x + 6)$

Décomposons $x^2 - x - 2$ par $x - 2$

$$\begin{array}{c|c} x^2 - x - 2 & x - 2 \\ \cline{2-2} -x^2 + 2x & x + 1 \\ \hline x - 2 & \\ -x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

Décomposons aussi $x^2 - 3x + 2$ par $x - 2$

$$\begin{array}{c|c} x^2 - 3x + 2 & x - 2 \\ \cline{2-2} -x^2 + 2x & x - 1 \\ \hline -x + 2 & \\ x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$

$$\lim_{2} \left[\frac{2x^3-14x^2+26x-12}{(x^2-x-2)(x^2-3x+2)}\right] = \lim_{2} \frac{(x-2)(2x^2-10x+6)}{(x-2)(x+1)(x-2)(x-1)}$$

$$= \lim_{2} \frac{(2x^2-10x+6)}{(x+1)(x-2)(x-1)}$$

$$= \frac{2.2^2-10.2+6}{(2+1)(2-2)(2-1)}$$

$$= \frac{8-20+6}{3\times0\times1}$$

$$= \frac{-6}{0}$$

$$= \infty$$

Etudions les signes de la fonction $f(x) = \frac{(2x^2-10x+6)}{(x+1)(x-2)(x-1)}$ pour déterminer les signes de ∞

$2x^2 - 10x + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-10)^2 - 4 \times 2 \times 6$

$\Delta = 52$

$$x_1 = \frac{-b - \Delta}{2a} = \frac{10 - \sqrt{52}}{2 \times 2} \qquad x_2 = \frac{-b + \Delta}{2a} = \frac{10 + \sqrt{52}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{10 - 2\sqrt{13}}{4} \qquad\qquad = \frac{10 + 2\sqrt{13}}{4}$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \qquad\qquad x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{5-\sqrt{13}}{2}$		1		2		$\frac{5+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
$2x^2 - 10x + 6$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x - 2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x + 1)(x - 2)(x - 1)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(2x^2 - 10x + 6)}{(x + 1)(x - 2)(x - 1)}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{\substack{2 \\ <}} \frac{(2x^2-10x+6)}{(x+1)(x-2)(x-1)} = +\infty \qquad \lim\limits_{\substack{2 \\ >}} \frac{(2x^2-10x+6)}{(x+1)(x-2)(x-1)} = -\infty$

$f)\ \lim\limits_{5}(x^2 - 6x + 5)\ \frac{x-3}{x^2-7x+10}$

$$\lim_{5}(x^2 - 6x + 5)\ \frac{x-3}{x^2-7x+10} = (5^2 - 6.5 + 5)\ \frac{5-3}{5^2-7.5+10}$$

$$= (25 - 30 + 5)\ \frac{2}{25-35+10}$$

$$= 0.\frac{2}{0}$$

$$= 0.\infty\ (F.I.)$$

$$\lim_{5}(x^2 - 6x + 5)\ \frac{x-3}{x^2-7x+10} = \lim_{5}\ \frac{(x^2-6x+5)(x-3)}{x^2-7x+10}$$

$$= \frac{(5^2-6.5+5)(5-3)}{5^2-7.5+10}$$

$$= \frac{(25-30+5)(2)}{25-35+10}$$

$$= \frac{0}{0}\ (F.I.)$$

Levons l'indétermination.

Décomposons $x^2 - 6x + 5\ \ et\ x^2 - 7x + 10$ par $x - 5$

$$\begin{array}{c|c} x^2-6x+5 & x-5 \\ \cline{2-2} -x^2+5x & x-1 \\ \hline -x+5 & \\ x-5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $x^2-6x+5 \ = (x-5)(x-1)$

$$\begin{array}{c|c} x^2-7x+10 & x-5 \\ \cline{2-2} -x^2+5x & x-2 \\ \hline -2x+10 & \\ +2x-10 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $x^2-6x+5=(x-5)(x-2)$

$$\lim_{5} \frac{(x^2-6x+5)(x-3)}{x^2-7x+10} = \lim_{5} \frac{(x-5)(x-1)(x-3)}{(x-5)(x-2)}$$

$$= \lim_{5} \frac{(x-1)(x-3)}{x-2}$$

$$= \frac{(5-1)(5-3)}{5-2}$$

$$= \frac{4\times 2}{3}$$

$$= \frac{8}{3}$$

$$\lim_{5}(x^2-6x+5)\ \frac{x-3}{x^2-7x+10} = {}^{8}/_{3}$$

EXERCICE 10

Calculer

$a)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{9991x^{25}-4000x^{28}}{58x^{25}+100x^{28}}$

$b)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4521x^{150}-5000x^{152}}{9758x^{150}+100x^{152}}$

$c)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{12547}+11x^{10520}-14000x^{10521}}{24x^{10520}-2000^{10521}+214x^{1021}}$

$d)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{30001x^{21}-3000x^{23}}{569x^{21}+100x^{23}}$

$e)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5281x^{20000}-6000x^{20002}}{9x^{20000}+100x^{20002}}$

Résolution

$a)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9991x^{25}-4000x^{28}}{58x^{25}+100x^{28}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9991x^{25}-4000x^{28}}{58x^{25}+100x^{28}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4000x^{28}}{100x^{28}}$

$=\frac{-4000}{100}$

$=-40$

$b)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4521x^{150}-5000x^{152}}{9758x^{150}+100x^{152}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4521x^{150}-5000x^{152}}{9758x^{150}+100x^{152}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-5000x^{152}}{100x^{152}}$

$=\frac{-5000}{100}$

$=-50$

$c)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{12547}+11x^{10520}-14000x^{10521}}{24x^{10520}-2000^{10521}+214x^{1021}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{12547}+11x^{10520}-14000x^{10521}}{24x^{10520}-2000^{10521}+214x^{1021}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-14000x^{10521}}{-2000^{10521}+2}$

$=\frac{-14000}{-2000}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{12547}+11x^{10520}-14000x^{10521}}{24x^{10520}-2000^{10521}+214x^{1021}}=7$

$d)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{30001x^{21}-3000x^{23}}{569x^{21}+100x^{23}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{30001x^{21}-3000x^{23}}{569x^{21}+100x^{23}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3000x^{23}}{100x^{23}}$

$=\frac{-3000}{100}$

$=-30$

$e)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5281x^{20000}-6000x^{20002}}{9x^{20000}+100x^{20002}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5281x^{20000}-6000x^{20002}}{9x^{20000}+100x^{20002}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-6000x^{20002}}{100x^{20002}}$

$=\frac{-6000}{100}$

=-60

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5281x^{20000}-6000x^{20002}}{9x^{20000}+100x^{20002}}=-60$

EXERCICE 11

Calculer et simplifier

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-4-\sqrt{x^2+75x+7857}\right)$

$b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-9-\sqrt{x^2+54x+7859}\right)$

$c)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(7x-10-\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)$

$d)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-71-\sqrt{x^2+83x+7852}\right)$

$e)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-35-\sqrt{x^2+85x+7871}\right)$

Résolution

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-4-\sqrt{x^2+75x+7857}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-4-\sqrt{x^2+75x+7857}\right)=\infty-\infty\ (F.I.)$

Multiplions et divisons $\left(x-4-\sqrt{x^2+75x+7857}\right)$ par son conjugué

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-4-\sqrt{x^2+75x+7857}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-4-\sqrt{x^2+75x+7857}\right)\left(x-4+\sqrt{x^2+75x+7857}\right)}{\left(x-4+\sqrt{x^2+75x+7857}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-8x+16-\left(\sqrt{x^2+75x+7857}\right)^2\right)}{\left(x-4+\sqrt{x^2+75x+7857}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-8x+16-x^2-75x-7857\right)}{\left(x-4+\sqrt{x^2+75x+7857}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-83x-7841}{\left(x-4+\sqrt{x^2+75x+7857}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-83x}{\left(x+\sqrt{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-83x}{x+|x|}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-83x}{2x}$$

$$=\frac{-83}{2}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\left(x-4-\sqrt{x^2+75x+7857}\right)}=\frac{-83}{2}$$

$b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-9-\sqrt{x^2+54x+7859}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-9-\sqrt{x^2+54x+7859}\right)=\infty-\infty\ (F.I.)$

Multiplions et divisons $\left(x-9-\sqrt{x^2+54x+7859}\right)$ par son conjugué

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-9-\sqrt{x^2+54x+7859}\right)$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(x-9-\sqrt{x^2+54x+7859}\right)\left(x-9+\sqrt{x^2+54x+7859}\right)}{\left(x-9+\sqrt{x^2+54x+7859}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-18x+81-\left(\sqrt{x^2+54x+7859}\right)^2\right)}{\left(x-9+\sqrt{x^2+54x+7859}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-18x+81-x^2-54x-7859\right)}{\left(x-9+\sqrt{x^2+54x+7859}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-72x-7778}{\left(x-9+\sqrt{x^2+54x+7859}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-72x}{\left(x+\sqrt{x^2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-72x}{x+|x|}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-72x}{2x}$

$=\frac{-72}{2}$

$=-36$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-9-\sqrt{x^2+54x+7859}\right)=-36}$

$c)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(7x-10-\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7x-10-\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)=\infty-\infty\ (F.I.)$

Multiplions et divisons $\left(7x-10-\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)$ par son conjugué

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7x-10-\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(7x-10-\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)\left(7x-10+\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)}{\left(7x-10+\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(49x^2-140x+100-\left(\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)^2\right)}{\left(7x-10+\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(49x^2-140x+100-49x^2+126x-7859\right)}{\left(7x-10+\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-14x-7759}{\left(7x-10+\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-14x}{(7x+\sqrt{49x^2})}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-14x}{7x+|7x|}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-14x}{14x}$

$= -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(7x - 10 - \sqrt{49x^2 - 126x + 7859}\right) = \mathbf{-1}$

$d)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - 71 - \sqrt{x^2 + 83x + 7852}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - 71 - \sqrt{x^2 + 83x + 7852}\right) = \infty - \infty \ (F.I.)$

Multiplions et divisons $\left(x - 71 - \sqrt{x^2 + 83x + 7852}\right)$ par son conjugué

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - 71 - \sqrt{x^2 + 83x + 7852}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(x-71-\sqrt{x^2+83x+7852}\right)\left(x-71+\sqrt{x^2+83x+7852}\right)}{\left(x-71+\sqrt{x^2+83x+7852}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^2-142x+5041-\left(\sqrt{x^2+83x+7852}\right)^2)}{\left(x-71+\sqrt{x^2+83x+7852}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^2-142x+5041-x^2-83x-7852)}{\left(x-71+\sqrt{x^2+83x+7852}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-225x-2811}{\left(x-71+\sqrt{x^2+83x+7852}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-225x}{(x+\sqrt{x^2})}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-225x}{x+|x|}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-225x}{2x}$

$= \frac{-225}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - 71 - \sqrt{x^2 + 83x + 7852}\right) = \frac{-225}{2}$

$e)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - 35 - \sqrt{x^2 + 85x + 7871}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - 35 - \sqrt{x^2 + 85x + 7871}\right) = \infty - \infty \ (F.I.)$

Multiplions et divisons $\left(x - 35 - \sqrt{x^2 + 85x + 7871}\right)$ par son conjugué

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - 35 - \sqrt{x^2 + 85x + 7871}\right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x-35-\sqrt{x^2+85x+7871}\right)\left(x-35+\sqrt{x^2+85x+7871}\right)}{\left(x-35+\sqrt{x^2+85x+7871}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2-70x+1225-\sqrt{x^2+85x+7871}^2\right)}{\left(x-35+\sqrt{x^2+85x+7871}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2-70x+1225-x^2-85x-7871\right)}{\left(x-35+\sqrt{x^2+85x+7871}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-155x-6646}{\left(x-35+\sqrt{x^2+85x+7871}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-155x}{\left(x+\sqrt{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-155x}{x+|x|}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-155x}{2x}$$

$$= \frac{-155}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - 35 - \sqrt{x^2 + 85x + 7871}\right) = \frac{-155}{2}$$

EXERCICE 12

On considère la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$.

La $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x)$ *est égale* à:

$a)\ \frac{1}{4}$ $\quad b)\ \frac{-1}{4}$ $\quad c)\ 0$ $\quad d) + \infty$ $\quad e) - \infty$

Résolution

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$$

$$f'(x) = \frac{(x)'\sqrt{x+2}-x\,(\sqrt{x+2})'}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x+2}-x.\frac{(x+2)'}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{\sqrt{x+2}-\frac{x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{\frac{2(\sqrt{x+2})^2-x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{\frac{2(x+2)-x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{\frac{2x+4-x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$= \frac{x+4}{2\sqrt{x+2}(x+2)}$

$f'(x) = \frac{x+4}{2x+4\sqrt{x+2}}$

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{2x+4\sqrt{x+2}}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x}$

$= {}^1/_2$

R) f

EXERCICE 13

$\lim_{x\to 0} \frac{2x+x^3+x^4}{x}$ est égale à :

$a)\ 1 \quad b) +\infty \quad c)0 \quad d)3 \quad e) -\infty \quad f)2$

Résolution

$\lim_{x\to 0} \frac{2x+x^3+x^4}{x} = \frac{2.0+0^3+0^4}{0} = \frac{0}{0}\ (F.I)$

$\lim_{x\to 0} \frac{2x+x^3+x^4}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2+x^2+x^3)}{x}$

$= \lim_{x\to 0} 2 + x^2 + x^3$

$= 2 + 0^2 + 0^3$

$=2$

R) f

EXERCICE 14

Calculer et simplifier

$a)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{2531x^{30}-7000x^{32}}{9x^{30}+800x^{32}}$

$b)\ \lim_{x\to+\infty} \left(x + 21 - \sqrt{x^2 + 35x + 7857}\right)$

$c)\ \lim_{x\to+\infty} \left(x + 3 - \sqrt{x^2 + 3x + 800}\right)$

Résolution

$a)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2531x^{30}-7000x^{32}}{9x^{30}+800x^{32}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2531x^{30}-7000x^{32}}{9x^{30}+800x^{32}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-7000x^{32}}{800x^{32}}$

$=\frac{-7000}{800}$

$=-\frac{35}{4}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2531x^{30}-7000x^{32}}{9x^{30}+800x^{32}}=-\frac{35}{4}$

$b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+21-\sqrt{x^2+35x+7857}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+21-\sqrt{x^2+35x+7857}\right)=\infty-\infty\ (F.I.)$

Multiplions et divisons $\left(x+21-\sqrt{x^2+35x+7857}\right)$ par son conjugué

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+21-\sqrt{x^2+35x+7857}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(x+21-\sqrt{x^2+35x+7857}\right)\left(x+21+\sqrt{x^2+35x+7857}\right)}{\left(x+21+\sqrt{x^2+35x+7857}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^2+42x+441-(\sqrt{x^2+35x+7857}^2))}{\left(x+21+\sqrt{x^2+35x+7857}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^2+42x+441-x^2-35x-7857)}{\left(x+21+\sqrt{x^2+35x+7857}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x-7416}{\left(x+21+\sqrt{x^2+35x+7857}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x}{\left(x+\sqrt{x^2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x}{x+|x|}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x}{2x}$

$=\frac{7}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+21-\sqrt{x^2+35x+7857}\right)=\frac{7}{2}$

$c)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+3-\sqrt{x^2+3x+800}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+3-\sqrt{x^2+3x+800}\right)=\infty-\infty\ (F.I.)$

Multiplions et divisons $\left(x+3-\sqrt{x^2+3x+800}\right)$ par son conjugué

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+3-\sqrt{x^2+3x+800}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x+3-\sqrt{x^2+3x+800}\right)\left(x+3+\sqrt{x^2+3x+800}\right)}{\left(x+3+\sqrt{x^2+3x+800}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+6x+9-(\sqrt{x^2+3x+800}^2))}{\left(x+3+\sqrt{x^2+3x+800}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+6x+9-x^2-3x-800)}{\left(x+3+\sqrt{x^2+3x+800}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-791}{\left(x+3+\sqrt{x^2+3x+800}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\left(x+\sqrt{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x+|x|}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2x}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x+3-\sqrt{x^2+3x+800}\right) = \frac{3}{2}$$

III. EXERCICES D'ENTRAINEMENT

EXERCICE 15

Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{1} \frac{-2x^3+3x-1}{2x^3+x^2-2x-1}$

$b)\ \lim\limits_{2} (2x-4)^{-2}\,(x^2-x-2)$

$c)\ \lim\limits_{\frac{1}{5}} \frac{5x-1}{(5x-1)^2}$

$d)\ \lim\limits_{1} \frac{x^3-3x+2}{3x^2-6x+3}$

$e)\ \lim\limits_{0} (x^4+2x^3+2x)(x^2+3x)^{-1}$

EXERCICE 16

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-4+\sqrt{x^2+2x+1})$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x-4-\sqrt{9x^2+5x+1})$
3. Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{x-1}$

   Que vaut $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

   $a)\ -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $b)\ 2$ $c)\ 1$ $d)\ ABR$
4. La limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \frac{-2x^2+7x-4}{3-x}$ est :

$a)\ 0$ $b)\ 2$ $c)\ +\infty$ $d)\ -\infty$

5. La limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \frac{(2x-3)(x^2+1)}{(1-x^2)^2}$ est :

$a)\ 0$ $b)\ -2$ $c)\ -\infty$ $d)\ +\infty$

EXERCICE 17

1. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$ vaut :

$a)\ 1 \quad b)\ 3 \quad c) +\infty \quad d) -\infty \quad e) ABR$

2. Soit la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$.

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ vaut :

$a) +\infty \quad b) \sqrt{3} \quad c)\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad d)\ \frac{1}{\sqrt{3}}$

3. Soit la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{x-4}{x^2-6x+5}$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ vaut :

$a) -\infty \quad b) 1 \quad c) -3 \quad d) +\infty$

EXERCICE 18

Calculer

$a)\ \lim\limits_{1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$

$b)\ \lim\limits_{2} \frac{x^3-2x-4}{\sqrt{2x}-2}$

$c)\ \lim\limits_{3} \frac{x^2-9}{\sqrt{3x}-3}$

$d)\ \lim\limits_{1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

$e)\ \lim\limits_{1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2+4x+4}+1}{x^4-1}$