DERIVEES

Aimé DIUMI DIKOLO

www.wiscorp.com

I. FORMULES DES DERIVEES

1. La dérivée d'une fonction constante

Une fonction constante, est une fonction qui ne prend qu'une seule valeur, indépendamment de sa variable.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) = c, \quad avec\ c \in \mathbb{R}$.

Exemple

$f(x) = 5$ est une fonction constante car quel que soit la valeur de la variable x, l'image sera toujours 5.

$f(-2) = 5$

$f(10) = 5$

La dérivée d'une fonction constante donne 0.

$\boldsymbol{Soit\ f(x) = c, \quad avec\ c \in \mathbb{R}}$

$\boldsymbol{f'(x) = (c)' = 0}$

Exemples :

$f(x) = 10 \implies f'(x) = 0$

$f(x) = 5 \implies f'(x) = 0$

2. Dérivée d'une fonction identique

Une fonction identique, est une fonction qui n'a aucun effet lorsqu'elle appliquée à un élément : elle retourne toujours la valeur qui est utilisée comme argument.

En d'autres termes, une fonction identique ou identité est une fonction où chaque antécédent égal à son image.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) = x$

Exemple

$f(x) = x$ est une fonction identique car chaque antécédent égal à son image

$f(2) = 2$

$f(-5) = -5$

La dérivée d'une fonction identique égale 1.

$f(x) = x \implies f'(x) = 1$

3. Autres formules pour la dérivation

Soient $f(x)$ et $g(x)$, deux fonctions dérivables en un point donné.

1. $(\boldsymbol{ax})' = \boldsymbol{a} \quad , \boldsymbol{avec\ a} \in \mathbb{R}$

Exemple

$f(x) = 5x$

$f'(x) = 5$

2. $(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{n\, x^{n-1}}$

Exemple

$a)\ f(x) = x^3$

Ici n=3

$f'(x) = 3x^{3-1}$

$f'(x) = 3x^2$

$b)\ f(x) = x^6$

$Ici\ n = 6$

$f'(x) = 6x^{6-1}$

$f'(x) = 6x^5$

3 . $(\boldsymbol{f \pm g})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \pm \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$

Exemples

$a)\ f(x) = 2x - 5x + 3$

$f'(x) = (2x)' - (5x)' + (3)'$

$= 2 - 5 + 0$

$f'(x) = -3$

$b)\ f(x) = 3 - 5x$

$f'(x) = (3)' - (5x)'$

$= 0 - 5$

$f'(x) = -5$

$c)\ f(x) = 2x + 2x^3 + 3$

$f'(x) = (2x)' + (2x^3)' + (3)'$

$= 2 + 2 \times 3 . x^{3-1} + 0$

$= 2 + 6x^2$

$f'(x) = 6x^2 + 2$

4. $(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Exemples

$a)\ f(x) = (x^2 + 2x + 3)(2x - 5)$

$f'(x) = (x^2 + 2x + 3)'(2x - 5) + (2x - 5)'(x^2 + 2x + 3)$

$= [(x^2)' + (2x)' + (3)'](2x - 5) + [(2x)' - (5)'](x^2 + 2x + 3)$

$= (2x^{2-1} + 2 + 0)(2x - 5) + (2 - 0)(x^2 + 2x + 3)$

$= (2x + 2)(2x - 5) + 2(x^2 + 2x + 3)$

$= 4x^2 - 10x + 4x - 10 + 2x^2 + 4x + 6$

$= (4 + 2)x^2 + (-10 + 4 + 4)x - 10 + 6$

$f'(x) = 6x^2 - 2x - 4$

$b)\ f(x) = x^5(x^3 + 2x - 1)$

$f'(x) = (x^5)'(x^3 + 2x - 1) + (x^3 + 2x - 1)'(x^5)$

$= 5x^{5-1}(x^3 + 2x - 1) + [(x^3)' + (2x)' - (1)'](x^5)$

$= 5x^4(x^3 + 2x - 1) + (3x^{3-1} + 2 - 0)x^5$

$= 5x^7 + 10x^5 - 5x^4 + (3x^2 + 2)x^5$

$= 5x^7 + 10x^5 - 5x^4 + 3x^7 + 2x^5$

$= (5 + 3)x^7 + (10 + 2)x^5 - 5x^4$

$f'(x) = 8x^7 + 12x^5 - 5x^4$

5. $(\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{n}})' = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{n-1}}\,\boldsymbol{f}'$

Exemples

$a)\ f(x) = (2x + 3)^3$

$f'(x) = 3(2x + 3)^{3-1}(2x + 3)'$

$= 3(2x + 3)^2[(2x)' + (3)']$

$= 3[(2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2](2 + 0)$ $\qquad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$= 3(4x^2 + 12x + 9)(2)$

$= 6(4x^2 + 12x + 9)$

$f'(x) = 24x^2 + 72x + 54$

$b)\ f(x) = (5x+1)^4$

$f'(x) = 4(5x+1)^{4-1}(5x+1)'$

$= 4(5x+1)^3[(5x)' + (1)']$

$= 4[(5x)^3 + 3(5x)^2(1) + 3(5x)(1)^2 + (1)^3](5+0)$ $\quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= 4(125x^3 + 75x^2 + 15x + 1)(5)$

$f'(x) = 20(125x^3 + 75x^2 + 15x + 1)$

6. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

Exemples

$a)\ f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

$f'(x) = \frac{(2x+3)'(x+2)-(x+2)'(2x+3)}{(x+2)^2}$

$= \frac{[(2x)'+(3)'](x+2)-[(x)'+(2)'](2x+3)}{x^2+2\times x\times 2+2^2}$

$= \frac{(2+0)(x+2)-(1+0)(2x+3)}{x^2+4x+4}$

$= \frac{2(x+2)-1(2x+3)}{x^2+4x+4}$

$= \frac{2x+4-2x-3}{x^2+4x+4}$

$f'(x) = \frac{1}{x^2+4x+4}$

$b)\ f(x) = \frac{x^2+5}{x^3}$

$f'(x) = \frac{(x^2+5)'(x^3)-(x^3)'(x^2+5)}{(x^3)^2}$

$= \frac{[(x^2)'+(5)'](x^3)-3x^{3-1}(x^2+5)}{x^6}$

$= \frac{(2x^{2-1}+0)(x^3)-3x^2(x^2+5)}{x^6}$

$= \frac{2x(x^3)-3x^4-15x^2}{x^6}$

$= \frac{2x^4-3x^4-15x^2}{x^6}$

$f'(x) = \frac{-x^4-15x^2}{x^6}$

7. $\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}\right)' = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x}}}$

8. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exemples

$a)\ f(x) = \sqrt{2x-1}$

$f'(x) = \dfrac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}}$

$f'(x) = \dfrac{(2x)'-(1)'}{2\sqrt{2x-1}}$

$= \dfrac{2-0}{2\sqrt{2x-1}}$

$f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}}$

$b)\ f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2x+1}{2x+3}}$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x^2+2x+1}{2x+3}\right)'}{2\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{2x+3}}}$$

$$= \frac{\frac{\left(x^2+2x+1\right)'(2x+3)-(2x+3)'(x^2+2x+1)}{(2x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{2x+3}}}$$

$$= \frac{\frac{\left[(x^2)'+(2x)'+(1)'\right](2x+3)-\left[(2x)'+(3)'\right](x^2+2x+1)}{(2x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{2x+3}}}$$

$$= \frac{\frac{(2x+2+0)(2x+3)-(2+0)(x^2+2x+1)}{(2x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{2x+3}}}$$

$$= \frac{\frac{(2x+2)(2x+3)-2(x^2+2x+1)}{(2x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{2x+3}}}$$

$$= \frac{\frac{4x^2+6x+4x+6-2x^2-4x-2}{(2x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{2x+3}}}$$

$$= \frac{\frac{(4-2)x^2+(6+4-4)x+6-2}{(2x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{2x+3}}}$$

$$= \frac{\frac{2x^2+6x-4}{(2x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{2x+3}}}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2+6x-4}{2\,(2x+3)^2\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{2x+3}}}$$

$$\mathbf{9.}\ \left(\sqrt[n]{\boldsymbol{x}}\right)' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}\ \sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}}}$$

Exemples

$a)\ f(x) = \sqrt[3]{x}$

Ici n=3

$$f'(x) = \frac{1}{3.\sqrt[3]{(x)^{3-1}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\ \sqrt[3]{x^2}}$$

$b)\ f(x) = \sqrt[5]{x}$

$ici\ \ n = 5$

$$f'(x) = \frac{1}{5\ \sqrt[5]{x^{5-1}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{5\ \sqrt[5]{x^4}}$$

$$\mathbf{10.}\ \left(\sqrt[n]{\boldsymbol{u}}\right)' = (\boldsymbol{u}^{\mathbf{1}/\boldsymbol{n}})\ '$$

$$= \frac{1}{n}\ u'\ u^{\frac{1}{n}-1}$$

$$= \frac{1}{n}\ u'\ u^{\frac{1-n}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\ u'\ u^{\frac{-(n-1)}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\ u'\ \frac{1}{u^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$= \frac{u'}{n\,u^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{u}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u}'}{\boldsymbol{n}\ \sqrt[n]{\boldsymbol{u}^{n-1}}}$$

Exemple :

$f(x) = \sqrt[3]{2x+3}$

$ici\ n = 3$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)'}{3\ \sqrt[3]{(2x+3)^{3-1}}}$$

$$= \frac{(2x)'+(3)'}{3\ \sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$

$$= \frac{2+0}{3\ \sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\ \sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$

4. Dérivée des fonctions circulaires

a) Sin

$(\sin x)' = \cos x$

$(\sin u)' = u' \cos u$

Exemples :

$a)\ f(x) = \sin(2x+3)$

$f'(x) = (2x+3)' \cos(2x+3)$

$= [(2x)' + (3)'] \cos(2x+3)$

$= (2+0) \cos(2x+3)$

$f'(x) = 2\cos(2x+3)$

$b)\ f(x) = \sin(x^2+2x-1)$

$f'(x) = (x^2+2x-1)' \cos(x^2+2x-1)$

$= [(x^2)' + (2x)' - (1)'] \cos(x^2+2x-1)$

$(2x+2-0) \cos(x^2+2x-1)$

$f'(x) = (2x+2) \cos(x^2+2x-1)$

b) Cos

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

Exemple :

$f(x) = \cos(x^3 - 2x + 2)$

$f'(x) = -(x^3 - 2x + 2)' \sin(x^3 - 2x + 2)$

$= -[(x^3)' - (2x)' + (2)'] \sin(x^3 - 2x + 2)$

$= -(3x^2 - 2 + 0) \sin(x^3 - 2x + 2)$

$f'(x) = -(3x^2 - 2) \sin(x^3 - 2x + 2)$

c) Tan

$(\tan x)' = \frac{1}{cos^2 x}$

$(\tan u)' = \frac{u'}{cos^2 u}$

Exemples

$a)\ f(x) = \tan(x^2 - 3)$

$$f'(x) = \frac{(x^2-3)'}{cos^2 (x^2-3)}$$

$$= \frac{(x^2)'-(3)'}{cos^2 (x^2-3)}$$

$$= \frac{2x-0}{cos^2 (x^2-3)}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{cos^2 (x^2-3)}$$

$b)\ f(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2x}\right)$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x^2}{2x}\right)'}{cos^2\left(\frac{x^2}{2x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{(x^2)'(2x)-(2x)'(x^2)}{(2x)^2}}{cos^2\left(\frac{x^2}{2x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2x(2x)-2(x^2)}{4x^2}}{cos^2\left(\frac{x^2}{2x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{4x^2-2x^2}{4x^2}}{cos^2\left(\frac{x^2}{2x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2x^2}{4x^2}}{cos^2\left(\frac{x^2}{2x}\right)}$$

$$= \frac{1/2}{cos^2\left(\frac{x^2}{2x}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\,cos^2\left(\frac{x^2}{2x}\right)}$$

d) Cot

$(\cot x)' = \frac{-1}{sin^2 x}$

$(\cot u)' = \frac{-u'}{sin^2 u}$

Exemple

$f(x) = \cot(3x)$

$f'(x) = \frac{-(3x)'}{sin^2 (3x)}$

$f'(x) = \frac{-3}{sin^2 (3x)}$

e) Sec

$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)'$

$= \frac{(1)' \cos x - (\cos x)' (1)}{cos^2 x}$

$= \frac{0 \times \cos x - (-\sin x)}{cos^2 x}$

$\boldsymbol{(\sec x)' = \frac{\sin x}{cos^2 x}}$

$$(\sec u)' = \left(\frac{1}{\cos u}\right)'$$

$$= \frac{(1)'(\cos u) - (\cos u)'\,(1)}{cos^2 u}$$

$$= \frac{0 \times \cos u - (-u' \sin u)}{cos^2 u}$$

$$\boldsymbol{(\sec u)' = \frac{u' \sin u}{cos^2 u}}$$

Exemple

$$f(x) = \sec(2x+2)$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)' \sin(2x+2)}{cos^2\,(2x+2)}$$

$$f'(x) = \frac{2 \sin(2x+2)}{cos^2\,(2x+2)}$$

f) Cosec

$$(cosec\ x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)'$$

$$= \frac{(1)' \sin x - (\sin x)'(1)}{sin^2\ x}$$

$$= \frac{0 \times \sin x - \cos x}{sin^2\ x}$$

$$\boldsymbol{(cosec\ x)' = \frac{-\cos x}{sin^2\ x}}$$

$$(cosec\ u)' = \left(\frac{1}{\sin u}\right)'$$

$$= \frac{(1)' \sin u - (\sin u)'(1)}{sin^2\ u}$$

$$= \frac{0 \times \sin u - u' \cos u}{sin^2\ u}$$

$$\boldsymbol{(cosec\ u)' = \frac{-u' \cos u}{sin^2\ u}}$$

Exemple

$$f(x) = cosec\ \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)' \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{(1)'(x) - (x)'(1)}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{0 \times x - 1 \times 1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

5. Dérivées des fonctions circulaires réciproques

a) Arc sin

$(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arc\sin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, avec u une fonction en x

Exemple

$f(x) = arc\sin(3x-1)$

$f'(x) = \frac{(3x-1)'}{\sqrt{1-(3x-1)^2}}$

$= \frac{(3x)'-(1)'}{\sqrt{1-(9x^2-2\times 3x+1)}}$ $\qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$= \frac{3-0}{\sqrt{1-9x^2+6x-1}}$

$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{-9x^2+6x}}$

b) Arc cos

$(arc\cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arc\cos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$, avec u une fonction en x

Exemple

$f(x) = arc\cos(x^2+1)$

$f'(x) = \frac{-(x^2+1)'}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}}$

$= \frac{-[(x^2)'+(1)']}{\sqrt{1-(x^4+2x^2+1)}}$

$= \frac{-(2x+0)}{\sqrt{1-x^4-x^2-1}}$

$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{-x^4-x^2}}$

c) Arc tan

$(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

Exemple

$f(x) = Arc\tan(x+1)$

$f'(x) = \frac{(x+1)'}{1+(x+1)^2}$

$= \frac{(x)'+(1)'}{1+x^2+2x+1}$

$= \frac{1+0}{x^2+2x+2}$

$f'(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$

d) Arc cot

$(arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

$(arc\cot u)' = \frac{-u'}{1+u^2}$

Exemple

$f(x) = Arc\cot(x+1)$

$f'(x) = \frac{-(x+1)'}{1+(x+1)^2}$

$= \frac{-[(x)'+(1)']}{1+x^2+2x+1}$

$= \frac{-(1+0)}{x^2+2x+2}$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2+2x+2}$

6. Dérivées des fonctions logarithmiques et exponentielles

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\ \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(a^u)' = u'a^u \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(u^v)' = u^v\left(v'.\ln u + v.\frac{u'}{u}\right)$$

u et v sont des fonctions en x

Exemples

$a)\ f(x) = \log_3(x^2+1)$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\ln 3}$$

$$= \frac{(x^2)'+(1)'}{(x^2+1)\ln 3}$$

$$= \frac{2x+0}{(x^2+1)\ln 3}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)\ln 3}$$

$b)\ f(x) = \ln(x^2+3x-1)$

$$f'(x) = \frac{\left(x^2+3x-1\right)'}{x^2+3x-1}$$

$$= \frac{(x^2)'+(3x)'-(1)'}{x^2+3x-1}$$

$$= \frac{2x+3-0}{x^2+3x-1}$$

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-1}$$

II. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

$a)\ f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{5}x - 6$

$b) f(x) = (\sqrt{2} + 3)\ x^2 + 5x - 8$

$c)\ f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^9 - 10$

$d) f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{5}x^5 + 2x - \sqrt{3}$

$e)\ f(x) = 5 - 6x^2 - x^4$

Résolution

$a)\ f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{5}x - 6$

$f'(x) = -\left(\frac{4}{3}\ x^2\right)' + \left(\frac{1}{5}x\ \right)' - (6)'$

$\quad = -\frac{4}{3} \times 2\ x^{2-1} + \frac{1}{5} - 0$

$f'(x) = -\frac{8}{3}x + \frac{1}{5}$

$b) f(x) = (\sqrt{2} + 3)\ x^2 + 5x - 8$

$f'(x) = \left[(\sqrt{2} + 3)\ x^2\right]' + (5x)' - (8)'$

$\quad = \left(\sqrt{2} + 3\right) \times 2x^{2-1} + 5 - 0$

$f'(x) = 2\left(\sqrt{2} + 3\right)x + 5$

$c)\ f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^9 - 10$

$f'(x) = (3x^5)' - (2x^4)' + (x^9)' - (10)'$

$\quad = 3 \times 5\ x^{5-1} - 2 \times 4x^{4-1} + 9x^{9-1} - 0$

$f'(x) = 15x^4 - 8x^3 + 9x^8$

$d) f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{5}x^5 + 2x - \sqrt{3}$

$f'(x) = -\left(\frac{3}{2}\ x^2\right)' + \left(\frac{7}{5}\ x^5\right)' + (2x)' - (\sqrt{3})'$

$\quad = -\frac{3}{2} \times 2x^{2-1} + \frac{7}{5} \times 5x^{5-1} + 2 - 0$

$f'(x) = -3x + 7x^4 + 2$

$e)\ f(x) = 5 - 6x^2 - x^4$

$f'(x) = (5)' - (6x^2)' - (x^4)'$

$\quad\quad = 0 - 6 \times 2\, x^{2-1} - 4x^{4-1}$

$f'(x) = -12x - 4x^3$

EXERCICE 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

$a)\ f(x) = -\frac{1}{4}x^6 + \frac{5}{2}x^5 + 0{,}2x^2 + \sqrt{3}\,x + 11$

$b)\ f(x) = (3x+2)(x+5)$

$c)\ f(x) = (7x+5)(-x+4)$

$d)\ f(x) = -2x(x^2 - 6x + 10)$

$e)\ f(x) = (3x^2+7)(-2x^2+6x+3)$

Résolution

$a)\ f(x) = -\frac{1}{4}x^6 + \frac{5}{2}x^5 + 0{,}2x^2 + \sqrt{3}\,x + 11$

$f'(x) = -\left(\frac{1}{4}\,x^6\right)' + \left(\frac{5}{2}\,x^5\right)' + (0{,}2\,x^2)' + \left(\sqrt{3}x\,\right)' + (11)'$

$\quad\quad = -\frac{1}{4} \times 6\,x^{6-1} + \frac{5}{2} \times 5\,x^{5-1} + 0{,}2\ \times 2x^{2-1} + \sqrt{3} + 0$

$\quad\quad = -\frac{6}{4}\,x^5 + \frac{25}{2}\,x^4 + 0{,}4\,x + \sqrt{3}$

$f'(x) = -\frac{3}{2}\,x^5 + \frac{25}{2}\,x^4 + 0{,}4\,x + \sqrt{3}$

$b)\ f(x) = (3x+2)(x+5)$

$f'(x) = (3x+2)'(x+5) + (x+5)'\,(3x+2)$

$\quad\quad = [(3x)' + (2)'](x+5) + [(x)' + (5)']\,(3x+2)$

$\quad\quad = (3+0)(x+5) + (1+0)(3x+2)$

$\quad\quad = 3(x+5) + 3x + 2$

$\quad\quad = 3x + 15 + 3x + 2$

$f'(x) = 6x + 17$

$c)\ f(x) = (7x+5)(-x+4)$

$f'(x) = (7x+15)'(-x+4) + (-x+4)'(7x+5)$

$\quad\quad = [(7x)' + (15)']\,(-x+4) + [(-x)' + (4)'](7x+5)$

$\quad\quad = (7+0)(-x+4) + (-1+0)(7x+5)$

$\quad\quad = 7(-x+4) - (7x+5)$

$= -7x + 28 - 7x - 5$

$f'(x) = -14x + 23$

$d)\ f(x) = -2x(x^2 - 6x + 10)$

$f'(x) = (-2x)'(x^2 - 6x + 10) + (x^2 - 6x + 10)'(-2x)$

$= -2(x^2 - 6x + 10) + [(x^2)' - (6x)' + (10)']\,(-2x)$

$= -2x^2 + 12x - 20 + (2x - 6 + 0)(-2x)$

$= -2x^2 + 12x - 20 + (2x - 6)(-2x)$

$= -2x^2 + 12x - 20 - 4x^2 + 12x$

$= (-2 - 4)x^2 + (12 + 12)x - 20$

$f'(x) = -6x^2 + 24x - 20$

$e)\ f(x) = (3x^2 + 7)(-2x^2 + 6x + 3)$

$f'(x) = (3x^2 + 7)'\,(-2x^2 + 6x + 3) + (-2x^2 + 6x + 3)'(3x^2 + 7)$

$= [(3x^2)' + (7)'](-2x^2 + 6x + 3) + [(-2x^2)' + (6x)' + (3)'](3x^2 + 7)$

$= (3 \times 2x^{2-1} + 0)(-2x^2 + 6x + 3) + (-2 \times 2\,x^{2-1} + 6 + 0)(3x^2 + 7)$

$= 6x\,(-2x^2 + 6x + 3) + (-4x + 6)(3x^2 + 7)$

$= -12x^3 + 36x^2 + 18x - 12x^3 - 28x + 18x^2 + 42$

$= (-12 - 12)x^3 + (36 + 18)x^2 + (18 - 28)x + 42$

$f'(x) = -24x^3 + 54x^2 - 10x + 42$

EXERCICE 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

$a)\ f(x) = (-3x^2 + 2x + 1)^2$

$b)\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\,x^2 + x + 3\right)^3$

$c) f(x) = (2x + 5)^2(x - 1)$

$d)\ f(x) = x^2(x - 1)$

$e)\ f(x) = 3x^3\,(3x - 7)^2$

Résolution

$a)\ f(x) = (-3x^2 + 2x + 1)^2$

$f'(x) = 2\ (-3x^2 + 2x + 1)'(-3x^2 + 2x + 1)^{2-1}$

$= 2[(-3x^2)' + (2x)' + (1)'](-3x^2 + 2x + 1)$

$= 2(-3 \times 2x^{2-1} + 2 + 0)(-3x^2 + 2x + 1)$

$= 2(-6x + 2)(-3x^2 + 2x + 1)$

$= (-12x + 4)(-3x^2 + 2x + 1)$

$= 36x^3 - 24x^2 - 12x - 12x^2 + 8x + 4$

$= 36x^3 + (-24 - 12)x^2 + (-12 + 8)x + 4$

$f'(x) = 36x^3 + 36x^2 - 4x + 4$

$b)\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\ x^2 + x + 3\right)^3$

$f'(x) = 3\ \left(\frac{1}{2}\ x^2 + x + 3\right)' \left(\frac{1}{2}\ x^2 + x + 3\right)^{3-1}$

$= 3\ \left[\left(\frac{1}{2}\ x^2\right)' + (x)' + (3)'\right] \left(\frac{1}{2}\ x^2 + x + 3\right)^2$

$= 3\left(\frac{1}{2} \times 2\ x^{2-1} + 1 + 0\right) \left[\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 + x^2 + 3^2 + 2.\frac{1}{2}\ x^2.x + 2.\frac{1}{2}\ x^2.3 + 2.x.3\right]$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$= 3(x + 1)(\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 9 + x^3 + 3x^2 + 6x)$

$= (3x + 3)(\frac{1}{4}\ x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 9)$

$= \frac{3}{4}x^5 + 3x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 27x + \frac{3}{4}\ x^4 + 3x^3 + 12x^2 + 18x + 27$

$= \frac{3}{4}\ x^5 + \left(3 + \frac{3}{4}\right)x^4 + (12 + 3)x^3 + (18 + 12)x^2 + (27 + 18)x + 27$

$f'(x) = \frac{3}{4}\ x^5 + \frac{15}{4}\ x^4 + 15x^3 + 30x^2 + 45x + 27$

$c) f(x) = (2x + 5)^2(x - 1)$

$f'(x) = [(2x + 5)^2]'(x - 1) + (x - 1)'(2x + 5)^2$

$= [2\ (2x + 5)'\ (2x + 5)^{2-1}](x - 1) + [(x)' - (1)'](4x^2 + 2.2x.5 + 25)$

$= \{2.[(2x)' + (5)']\ (2x + 5)\}\ (x - 1) + (1 - 0)(4x^2 + 20x + 25)$

$= (2\ (2 + 0)(2x + 5) + 4x^2 + 20x + 25$

$= 4(2x + 5) + 4x^2 + 20x + 25$

$= 8x + 20 + 4x^2 + 20x + 25$

$f'(x) = 4x^2 + 28x + 45$

$d)\ f(x) = x^2(x-1)$

$f'(x) = (x^2)'\,(x-1) + (x-1)'\,x^2$

$= 2x(x-1) + [(x)' - (1)']\,x^2$

$= 2x^2 - 2x + (1-0)x^2$

$= 2x^2 - 2x + x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$e)\ f(x) = 3x^3\,(3x-7)^2$

$f'(x) = (3x^3)'\,(3x-7)^2 + ((3x-7)^2)'\,3x^3$

$= (3.3x^{3-1})(9x^2 - 42x + 49) + [2\,(3x-7)'\,(3x-7)^{2-1}]\,3x^3$

$= 9x^2(9x^2 - 42x + 49) + (2(3-0)(3x-7)3x^3$

$= 81x^4 - 378x^3 + 441x^2 + 18x^3(3x-7)$

$= 81x^4 - 378x^3 + 441x^2 + 54x^4 - 126x^3$

$f'(x) = 135x^4 - 504x^3 + 441x^2$

EXERCICE 4

Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

$a)\ f(x) = (x^4-1)^2\,(x-3)^3$

$b)\ f(x) = (x^2+2)(1-x)(5x-2)$

$c)\ x^2(x^2+x+1)^3\,(x^2-6x+1)$

$d)\ f(x) = (x^2+x+1)^{-3}\,(x-2)^{-2}$

$e)\ f(x) = (x+1)^2\,(3x-1)^4$

Résolution

$a)\ f(x) = (x^4-1)^2\,(x-3)^3$

$f'(x) = [(x^4-1)^2]'(x-3)^3 + [(x-3)^3]'\,(x^4-1)^2$

$= [2\,(x^4-1)'\,(x^4-1)^{2-1}](x-3)^3 + [3\,(x-3)'\,(x-3)^{3-1}]\,(x^4-1)^2$

$= \{2[(x^4)' - (1)']\,(x^4-1)\}(x^3 - 3.x^2.3 + 3.x.3^2 - 3^3) + \{3\,[(x)' - (3)']\,(x-3)^2\}(x^8 - 2x^4 + 1)$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad et\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$= 2(4x^3-0)(x^4-1)(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) + 3(1-0)(x^2 - 6x + 9)(x^8 - 2x^4 + 1)$

$= 8x^3(x^4-1)(x^3-9x^2+27x-27)+3(x^2-6x+9)(x^8-2x^4+1)$

$= (8x^7-8x^3)(x^3-9x^2+27x-27)+(3x^2-18x+27)(x^8-2x^4+1)$

$$= 8x^{10}-72x^9+216x^8-216x^7-8x^6+72x^5-216x^4+216x^3+3x^{10}-6x^6+3x^2 - 18x^9+36x^5-18x+27x^8-54x^4+27$$

$$= (8+3)x^{10}+(-72-18)x^9+(216+27)x^8-216x^7+(-8-6)x^6+(72+36)x^5 + (-216-54)x^4+216x^3+3x^2-18x+27$$

$$f'(x) = 11x^{10}-90x^9+243x^8-216x^7-14x^6+108x^5-270x^4+216x^3+3x^2-18+27$$

$b)\ f(x) = (x^2+2)(1-x)(5x-2)$

$f'(x) = (x^2+2)'(1-x)(5x-2)+(x^2+2)(1-x)'(5x-2)+(x^2+2)(1-x)(5x-2)'$

$= [(x^2)'+(2)'](5x-2-5x^2+2x)+[(1)'-(x)'](5x^3-2x^2+10x-4)+[(5x)'-(2)'](x^2-x^3+2-2x)$

$= (2x+0)(-5x^2+7x-2)+(0-1)(5x^3-2x^2+10x-4)+(5-0)(x^3+x^2-2x+2)$

$= 2x(-5x^2+7x-2)-5x^3+2x^2-10x+4+5(x^3+x^2-2x+2)$

$= -10x^3+14x^2-4x-5x^3+2x^2-10x+4+5x^3+5x^2-10x+10$

$= (-10-5+5)x^3+(14+2+5)x^2+(-4-10-10)x+4+10$

$f'(x) = -10x^3+21x^2-24x+14$

$c)\ x^2(x^2+x+1)^3\ (x^2-6x+1)$

$f'(x) = (x^2)'(x^2+x+1)^3\ (x^2-6x+1)+[(x^2+x+1)^3]'x^2(x^2-6x+1)+(x^2-6x+1)'\ x^2\ (x^2+x+1)^3$

$= 2x(x^6+x^3+1+3.x^4.x+3.x^4.1+3.x^2.x^2+3.x^2.1+3.x^2.1^2+3.x.1^2+6.x^2.x.1)(x^2-6x+1)+3\ (x^2+x+1)'(x^2+x+1)^{3-1}\ x^2(x^2-6x+1)+[(x^2)'-(6x)'+(1)']x^2\ (x^6+x^3+1+3.x^4.x+3.x^4.1+3.x^2.x^2+3.x^2.1+3.x^2.1^2+3.x.1^2+6.x^2.x.1)$

$= 2x(x^6+x^3+1+3x^5+3x^4+3x^4+3x^2+3x^2+3x+6x^3)(x^2-6x+1)+3[(x^2)'+(x)'+(1)']\ (x^2+x+1)^2\ (x^4-6x^3+x^2)+(2x-6+0)x^2(x^6+x^3+1+3x^5+3x^4+3x^4+3x^2+3x^2+3x+6x^3)$

$= 2x(x^6+3x^5+6x^4+4x^3+6x^2+3x)(x^2-6x+1)+3(2x+1+0)(x^4+x^2+1+2.x^2.x+2.x^2.1+2.x.1)(x^4-6x^3+x^2)+(2x-6)x^2(x^6+x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x)$

$= (2x^7+6x^6+12x^5+8x^4+12x^3+6x^2)(x^2-6x+1)+(6x+3)(x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x)(x^4-6x^3+x^2)+(2x-6)(x^8+x^7+6x^6+7x^5+6x^4+3x^3)$

$= (2x^9-12x^8+2x^7+6x^8-36x^7+6x^6+12x^7-72x^6+12x^5+8x^6-48x^5+8x^4+12x^5-72x^4+12x^3+6x^4-36x^3+6x^2)+(6x+3)(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)(x^4-6x^3+x^2)+(2x^9+2x^8+12x^7+14x^6+12x^5+6x^4-6x^8-6x^7-36x^6-42x^5-36x^4-18x^3)$

$= 2x^9 + (-12 + 6)x^8 + (2 - 36 + 12)x^7 + (6 - 72 + 8)x^6 + (12 - 48 + 12)x^5 + (8 - 72 + 6)x^4 + (12 - 36)x^3 + 6x^2 + (6x^5 + 12x^4 + 18x^3 + 12x^2 + 6x + 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 6x + 3)(x^4 - 6x^3 + x^2) + 2x^9 + (2 - 6)x^8 + (12 - 6)x^7 + (14 - 36)x^6 + (12 - 42)x^5 + (6 - 36)x^4 - 18x^3$

$= 2x^9 - 6x^8 - 22x^7 - 58x^6 - 24x^5 - 58x^4 - 24x^3 + 6x^2 + [6x^5 + (12 + 3)x^4 + (18 + 6)x^3 + (12 + 9)x^2 + (6 + 6)x + 3](x^4 - 6x^3 + x^2) + 2x^9 - 4x^8 + 6x^7 - 22x^6 - 30x^5 - 30x^4 - 18x^3$

$= 2x^9 - 6x^8 - 22x^7 - 58x^6 - 24x^5 - 58x^4 - 24x^3 + 6x^2 + (6x^5 + 15x^4 + 24x^3 + 21x^2 + 12x + 3)(x^4 - 6x^3 + x^2) + 2x^9 - 4x^8 + 6x^7 - 22x^6 - 30x^5 - 30x^4 - 18x^3$

$= 2x^9 - 6x^8 - 22x^7 - 58x^6 - 24x^5 - 58x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 6x^9 - 36x^8 + 6x^7 + 15x^8 - 90x^7 + 15x^6 + 24x^7 - 144x^6 + 24x^5 + 21x^6 - 126x^5 + 21x^4 + 12x^5 - 72x^4 + 12x^3 + 3x^4 - 18x^3 + 3x^2 + 2x^9 - 4x^8 + 6x^7 - 22x^6 - 30x^5 - 30x^4 - 18x^3$

$= (2 + 6 + 2)x^9 + (-6 - 36 + 15 - 4)x^8 + (-22 + 6 - 90 + 24 + 6)x^7 + (-58 + 15 - 144 + 21 - 22)x^6 + (-24 + 24 - 126 + 12 - 30)x^5 + (-58 + 21 - 72 + 3 - 30)x^4 + (-24 + 12 - 18 - 18)x^3 + (6 + 3)x^2$

$f'(x) = 10x^9 - 31x^8 - 76x^7 - 188x^6 - 144x^5 - 136x^4 - 48x^3 + 9x^2$

Note :

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 2ab + 2ac + 2bc$

$d)\ f(x) = (x^2 + x + 1)^{-3}\ (x - 2)^{-2}$

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^3\ (x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1)'(x^2+x+1)^3\ (x-2)^2 - [(x^2+x+1)^3\ (x-2)^2]'(1)}{[(x^2+x+1)^3\ (x-2)^2]^2}$$

$$= \frac{0\times(x^2+x+1)^3\ (x-2)^2 - \{[(x^2+x+1)^3]'(x-2)^2 + [(x-2)^2]'(x^2+x+1)^3\}}{[(x^2+x+1)^3\ (x-2)^2]^2}$$

$$= \frac{0 - 3(x^2+x+1)'(x^2+x+1)^{3-1}\ (x^2 - 2\times x\times 2 + 2^2) - 2(x-2)'(x-2)^{2-1}(x^2+x+1)^3}{[(x^2+x+1)^3\ (x-2)^2]^2}$$

$$= \frac{-3[(x^2)' + (x)' + (1)'](x^2+x+1)^2(x^2-4x+4) - 2[(x)' - (2)'](x-2)(x^4+x^2+1+2x^2.x+2x^2.1+2.x.1)}{(x^2+x+1)^6(x-2)^4}$$

$$= \frac{-3(2x+1+0)\left(x^4+x^2+1+2x^2.x+2x^2.1+2.x.1\right)\left(x^2-4x+4\right) - 2(1-0)(x-2)(x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x)}{(x^2+x+1)^6(x-2)^4}$$

$$= \frac{-3(2x+1)(x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x)(x^2-4x+4) - 2(x-2)(x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x)}{(x^2+x+1)^6(x-2)^4}$$

$$= \frac{(-6x-3)(x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x)(x^2-4x+4) - (2x-4)(x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x)}{(x^2+x+1)^6(x-2)^4}$$

$$= \frac{(-6x^5-6x^3-6x-12x^4-12x^3-12x^2-3x^4-3x^2-3-6x^3-6x^2-6x)(x^2-4x+4)-(2x-4)(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)}{(x^2+x+1)^6(x-2)^4}$$

$$= \frac{(-6x^5-15x^4-24x^3-21x^2-12x-3)(x^2-4x+4)-(2x^5+4x^4+6x^3+4x^2+2x-4x^4-8x^3-12x^2-8x-4)}{(x^2+x+1)^6(x-2)^4}$$

$$= \frac{(-6x^5-15x^4-24x^3-21x^2-12x-3)(x^2-4x+4)-(2x^5-2x^3-8x^2-6x-4)}{(x^2+x+1)^6(x-2)^4}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}-6x^7+24x^6-24x^5-15x^6+60x^5-60x^4-24x^5+96x^4-96x^3-21x^4+84x^3-84x^2-12x^3+48x^2-48x-3x^2+12x\\-12-2x^5+2x^3+8x^2+6x+4\end{array}}{(x^2+x+1)^6(x-2)^4}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}-6x^7+(24-15)x^6+(-24+60-24-2)x^5+(-60+96-21)x^4+(-96+84-12+2)x^3+(-84+48-3+8)x^2\\+(-48+12+6)x-12+4\end{array}}{(x^2+x+1)^6(x-2)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-6x^7+9x^6+10x^5+15x^4-22x^3-31x^2-30x-8}{(x^2+x+1)^6(x-2)^4}$$

$e)$ $f(x) = (x+1)^2\,(3x-1)^4$

$f'(x) = [(x+1)^2]'(3x-1)^4 + [(3x-1)^4]'(x+1)^2$

$= 2(x+1)'(x+1)^{2-1}(81x^4 - 4.(3x)^3.1 + 6(3x)^2.1^2 - 4.3x.1^3 + 1^4) + 4(3x-1)'(3x-1)^{4-1}(x^2+2x+1)$

$= 2[(x)' + (1)']((x+1)(81x^4 - 108x^3 + 18x^2 - 12x + 1) + 4[(3x)' - (1)'](3x-1)^3(x^2+2x+1)$

$= 2(1+0)(x+1)(81x^4 - 108x^3 + 18x^2 - 12x + 1) + 4(3-0)((3x)^3 - 3.(3x)^2.1 + 3.3x.1^2 - 1^3)(x^2+2x+1)$

$= (2x+2)(81x^4 - 108x^3 + 18x^2 - 12x + 1) + 12(27x^3 - 27x^2 + 9x - 1)(x^2+2x+1)$

$= 162x^5 - 216x^4 + 36x^3 - 24x^2 + 2x + 162x^4 - 216x^3 + 36x^2 - 24x + 2 + (324x^3 - 324x^2 + 108x - 12)(x^2+2x+1)$

$= 162x^5 - 216x^4 + 36x^3 - 24x^2 + 2x + 162x^4 - 216x^3 + 36x^2 - 24x + 2 + 324x^5 + 648x^4 + 324x^3 - 324x^4 - 648x^3 - 324x^2 + 108x^3 + 216x^2 + 108x - 12x^2 - 24x - 12$

$= (162+324)x^5 + (-216+162+648-324)x^4 + (36-216+324-648+108)x^3 + (-24+36-324+216-12)x^2 + (2-24+108-24)x + 2 - 12$

$f'(x) = 486x^5 + 270x^4 - 396x^3 - 108x^2 + 62x - 10$

Note :

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

EXERCICE 5

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous

$a)\ f(x) = \frac{3}{x}$

$b)\ f(x) = -\frac{10}{3x}$

$c)\ f(x) = \frac{x+4}{2x-1}$

$d)\ f(x) = \frac{7x-3}{5-x}$

$e)\ f(x) = \frac{2-x}{x^2+x+2}$

Résolution

$a)\ f(x) = \frac{3}{x}$

$f'(x) = \frac{(3)'x-(x)'\,3}{x^2}$

$= \frac{0\times x-1\times 3}{x^2}$

$= \frac{0-3}{x^2}$

$f'(x) = {}^{-3}/_{x^2}$

$b)\ f(x) = -\frac{10}{3x}$

$f'(x) = \frac{(-10)'(3x)-(3x)'(-10)}{(3x)^2}$

$= \frac{0\times 3x-3(-10)}{9x^2}$

$= \frac{0+30}{9x^2}$

$f'(x) = {}^{10}/_{3x^2}$

$c)\ f(x) = \frac{x+4}{2x-1}$

$f'(x) = \frac{(x+4)'(2x-1)-(2x-1)'(x+4)}{(2x-1)^2}$

$$= \frac{[(x)'+(4)'](2x-1)-[(2x)'-(1)'](x+4)}{(2x)^2-2.2x.1+1^2}$$

$$= \frac{(1+0)(2x-1)-(2-0)(x+4)}{4x^2-4x+1}$$

$$= \frac{2x-1-2(x+4)}{4x^2-4x+1}$$

$$= \frac{2x-1-2x-8}{4x^2-4x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-9}{4x^2-4x+1}$$

$d)\ f(x) = \frac{7x-3}{5-x}$

$$f'(x) = \frac{(7x-3)'(5-x)-(5-x)'(7x-3)}{(5-x)^2}$$

$$= \frac{[(7x)'-(3)'](5-x)-[(5)'-(x)'](7x-3)}{5^2-2.5.x+x^2}$$

$$= \frac{(7-0)(5-x)-(0-1)(7x-3)}{x^2-10x+25}$$

$$= \frac{7(5-x)+(7x-3)}{x^2-10x+25}$$

$$= \frac{35-7x+7x-3}{x^2-10x+25}$$

$$f'(x) = \frac{32}{x^2-10x+25}$$

$e)\ f(x) = \frac{2-x}{x^2+x+2}$

$$f'(x) = \frac{(2-x)'(x^2+x+2)-(x^2+x+2)'(2-x)}{(x^2+x+2)^2}$$

$$= \frac{[(2)'-(x)'](x^2+x+2)-[(x^2)'+(x)'+(2)'](2-x)}{x^4+x^2+2^2+2.x^2.x+2.x^2.2+2.x.2}$$

$$= \frac{(0-1)(x^2+x+2)-(2x+1+0)(2-x)}{x^4+x^2+4+2x^3+4x^2+4x}$$

$$= \frac{-(x^2+x+2)-(2x+1)(2-x)}{x^4+2x^3+5x^2+4x+4}$$

$$= \frac{-x^2-x-2-(4x-2x^2+2-x)}{x^4+2x^3+5x^2+4x+4}$$

$$= \frac{-x^2-x-2-4x+2x^2-2+x}{x^4+2x^3+5x^2+4x+4}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-4x-4}{x^4+2x^3+5x^2+4x+4}$$

EXERCICE 6

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous :

$a)\ f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$

$b)\ f(x) = \frac{3}{5x-2}$

$c)\ f(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2-x+1}$

$d)\ f(x) = \frac{-3}{x^2}$

$e)\ f(x) = \frac{-6}{x^2-4x+3}$

Résolution

$a)\ f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$

$$f'(x) = \frac{(1)'(x^2-3x+2)-(x^2-3x+2)'(1)}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$= \frac{0.(x^2-3x+2)-[(x^2)'-(3x)'+(2)'](1)}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$= \frac{0-(2x-3+0)}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3-2x}{(x^2-3x+2)^2}$$

$b)\ f(x) = \frac{3}{5x-2}$

$$f'(x) = \frac{(3)'(5x-2)-(5x-2)'(3)}{(5x-2)^2}$$

$$= \frac{0(5x-2)-[(5x)'-(2)'](3)}{(5x)^2-2.5x.2+2^2}$$

$$= \frac{0-(5-0)(3)}{25x^2-20x+4}$$

$$f'(x) = \frac{-15}{25x^2-20x+4}$$

$c)\ f(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2-x+1}$

$$f'(x) = \frac{\left(x^3+x^2+x+1\right)'\left(x^3+x^2-x+1\right)-\left(x^3+x^2-x+1\right)'(x^3+x^2+x+1)}{\left(x^3+x^2-x+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left[(x^3)'+(x^2)'+(x)'+(1)'\right](x^3+x^2-x+1)-\left[(x^3)'+(x^2)'-(x)'+(1)'\right](x^3+x^2+x+1)}{\left(x^3+x^2-x+1\right)^2}$$

$$= \frac{(3x^2+2x+1)\left(x^3+x^2-x+1\right)-(3x^2+2x-1)(x^3+x^2+x+1)}{\left(x^3+x^2-x+1\right)^2}$$

$$= \frac{3x^5+3x^4-3x^3+3x^2+2x^4+2x^3-2x^2+2x+x^3+x^2-x+1-(3x^5+3x^4+3x^3+3x^2+2x^4+2x^3+2x^2+2x-x^3-x^2-x-1)}{(x^3+x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{3x^5+5x^4+2x^2+x+1-(3x^5+5x^4+4x^3+4x^2+x-1)}{(x^3+x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{3x^5+5x^4+2x^2+x+1-3x^5-5x^4-4x^3-4x^2-x+1}{\left(x^3+x^2-x+1\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^3-2x^2+2}{\left(x^3+x^2-x+1\right)^2}$$

$$d)\ f(x) = \frac{-3}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(-3)'(x^2)-(x^2)'\,(-3)}{x^4}$$

$$= \frac{0\,.x^2-(2x)(-3)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{6x}{x^4}$$

$$e)\ f(x) = \frac{-6}{x^2-4x+3}$$

$$f'(x) = \frac{(-6)\,'(x^2-4x+3)-(x^2-4x+3)'(-6)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$= \frac{0\left(x^2-4x+3\right)+6\left[\left(x^2\right)'-(4x)'+(3)'\right]}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$= \frac{6\,(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x-24}{(x^2-4x+3)^2}$$

EXERCICE 7

Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

$a)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$b)\ f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

$c)\ f(x) = \sqrt{(x+3)^3}$

$d)\ f(x) = \sqrt[3]{(1 - x - x^2)^2}$

$e)\ f(x) = \sqrt[6]{(x^2 + 5x + 6)^5}$

Résolution

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$a)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{(x^2)' - (1)'}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{2x - 0}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$b)\ f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

$$.\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{u}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{n}\ \sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}}}$$

Dans notre cas, $n = 3 \quad et\ u = x^2 + x + 1$

$$f'(x) = \frac{(x^2+x+1)'}{3\ \sqrt[3]{(x^2+x+1)^{3-1}}}$$

$$= \frac{(x^2)' + (x)' + (1)'}{3\ \sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$$

$$= \frac{2x+1+0}{3\ \sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{3\ \sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$$

$c)\ f(x) = \sqrt{(x+3)^3}$

$$f'(x) = \frac{[(x+3)^3]'}{2\sqrt{(x+3)^3}}$$

$$= \frac{3\ (x+3)'\ (x+3)^{3-1}}{2\sqrt{(x+3)^3}}$$

$$= \frac{3\ [(x)'+(3)'](x+3)^2}{2\sqrt{(x+3)^3}}$$

$$= \frac{3(1+0)(x+3)^2}{2\sqrt{(x+3)^3}}$$

$$= \frac{3(x+3)^2}{2\sqrt{(x+3)^3}}$$

$$= \frac{3\ (x+3)(x+3)}{2\sqrt{(x+3)^2\ (x+3)}}$$

$$= \frac{3\ (x+3)(x+3)}{2(x+3)\sqrt{x+3}}$$

$$= \frac{3(x+3)}{2\sqrt{x+3}}$$

$$f'(x) = \frac{3x+9}{2\sqrt{x+3}}$$

$d)\ f(x) = \sqrt[3]{(1-x-x^2)^2}$

$$f'(x) = \frac{\left[(1-x-x^2)^2\right]'}{3\sqrt[3]{[(1-x-x^2)^2]^{3-1}}}$$

$$= \frac{2.(1-x-x^2)'(1-x-x^2)^{2-1}}{3\sqrt[3]{[(1-x-x^2)^2]^2}}$$

$$= \frac{2\ [(1)'-(x)'-(x^2)']\ (1-x-x^2)}{3\ \sqrt[3]{(1-x-x^2)^4}}$$

$$= \frac{2(0-1-2x)(1-x-x^2)}{3\sqrt[3]{(1-x-x^2)^3(1-x-x^2)}}$$

$$= \frac{2(-1-2x)(1-x-x^2)}{3\ (1-x-x^2)\sqrt[3]{1-x-x^2}}$$

$$= \frac{2(-1-2x)}{3\sqrt[3]{1-x-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-2-4x}{3\sqrt[3]{1-x-x^2}}$$

$e)\ f(x) = \sqrt[6]{(x^2+5x+6)^5}$

$$f'(x) = \frac{\left[(x^2+5x+6)^5\right]'}{6\sqrt[6]{[(x^2+5x+6)^5]^{6-1}}}$$

$$= \frac{5.(x^2+5x+6)'(x^2+5x+6)^{5-1}}{6\sqrt[6]{[(x^2+5x+6)^5]^5}}$$

$$= \frac{5[(x^2)'+(5x)'+(6)'](x^2+5x+6)^4}{6\sqrt[6]{(x^2+5x+6)^{25}}}$$

$$= \frac{5(2x+5+0)(x^2+5x+6)^4}{6\sqrt[6]{(x^2+5x+6)^{24}.(x^2+5x+6)}}$$

$$= \frac{5(2x+5)(x^2+5x+6)^4}{6\,(x^2+5x+6)^4\sqrt[6]{x^2+5x+6}}$$

$$= \frac{5(2x+5)}{6\sqrt[6]{x^2+5x+6}}$$

$$f'(x) = \frac{10x+25}{6\sqrt[6]{x^2+5x+6}}$$

EXERCICE 8

On considère la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$.

La quantité $f'(2)$ vaut :

$a)\ \frac{-3}{4}$ $\quad b)\ \frac{4}{3}$ $\quad c)\ \frac{-1}{2}$ $\quad d)\ \frac{-3}{8}$ $\quad e)\ ABR$

Résolution

$$f'(x) = \frac{(x)'\sqrt{x+2}-x\,(\sqrt{x+2})'}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x+2}-x.\frac{(x+2)'}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{\sqrt{x+2}-\frac{x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{\frac{2(\sqrt{x+2})^2-x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{\frac{2(x+2)-x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{\frac{2x+4-x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{x+4}{2\sqrt{x+2}(x+2)}$$

$f'(x) = \frac{x+4}{(2x+4)\sqrt{x+2}}$

$f'(2) = \frac{2+4}{(2.2+4)\sqrt{2+2}}$

$= \frac{6}{16}$

$= \frac{3}{8}$

$R\ )\ e$

EXERCICE 9

Soit la fonction $f\ de\ \mathbb{R}\ dans\ \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x) = \frac{(x^2-40)^{555}}{555}$

a) Calculez les dérivées $f'(x) et\ \ f''(x)$
b) Evaluez les nombres $f(-\sqrt{39})\ et\ f(\sqrt{41})$

Résolution

a) $f(x) = \frac{(x^2-40)^{555}}{555}$

$f' = \frac{\left[(x^2-40)^{555}\right]' 555-(x^2-40)^{555}.(555)'}{555^2}$

$= \frac{555.(x^2-40)'(x^2-40)^{554}.555}{555^2}$

$\boldsymbol{f'(x) = 2x(x^2-40)^{554}}$

$f'' = (2x)'.(x^2-40)^{554} + 2x.[(x^2-40)^{554}]'$

$= 2(x^2-40)^{554} + 2x.554.(x^2-40)'(x^2-40)^{553}$

$= 2(x^2-40)^{554} + 1108x.2x(x^2-40)^{553}$

$= 2(x^2-40)^{554} + 2216x^2\,(x^2-40)^{553}$

$f''(x) = (x^2-40)^{553}[2(x^2-40) + 2216x^2]$

$f''(x) = (x^2-40)^{553}[2x^2 - 80 + 2216x^2]$

$\boldsymbol{f''(x) = (x^2-40)^{553}[2218x^2 - 80]}$

b) $f(-\sqrt{39}) = \frac{((-\sqrt{39})^2-40)^{555}}{555}$

$= \frac{(39-40)^{555}}{555}$

$f(-\sqrt{39}) = \frac{-1}{555}$

$f(\sqrt{41}) = \frac{((\sqrt{41})^2-40)^{555}}{555}$

$= \frac{(41-40)^{555}}{555}$

$f(\sqrt{41}) = \frac{1}{555}$

EXERCICE 10

On donne $f(x) = \frac{-1-3x}{2x+4}$, que vaut $[f'(-2)]^2$

$a)$ 72 $\quad b)$ 49 $\quad c)$ 9 $\quad d)$ 27 $\quad e) ABR$

Résolution

$f(x) = \frac{-1-3x}{2x+4}$

$f' = \frac{(-1-3x)'(2x+4)-(-1-3x)(2x+4)'}{(2x+4)^2}$

$= \frac{[(-1)'-(3x)'](2x+4)-(-1-3x)[(2x)'+(4)']}{(2x+4)^2}$

$= \frac{(0-3)(2x+4)-(-1-3x)(2+0)}{(2x+4)^2}$

$= \frac{-3(2x+4)-(-1-3x)2}{(2x+4)^2}$

$\frac{-6x-12+2+6x}{(2x+4)^2}$

$f' = \frac{-10}{(2x+4)^2}$

$[f'(-2)]^2 = \left[\frac{-10}{(2\times(-2)+4)^2}\right]^2$

$= \left[\frac{-10}{(-4+4)^2}\right]^2$

$= \left[\frac{-10}{(0)^2}\right]^2$

$= \infty$

R) e

EXERCICE 11

Evaluez $f''(4)$ $si\ y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x}}$ avec $y = f(x)$

$a)$ 1.47 $b)$ 3.22 $c)$ 0.96 $d)$ 5.63 $e) ABR$

Résolution

$$y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{x^2+5}{\sqrt{x}}$$

$$f' = \frac{(x^2+5)'\sqrt{x}-(x^2+5)(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}^2}$$

$$= \frac{\left[(x^2)'+(5)'\right]\sqrt{x}-(x^2+5)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{2x\sqrt{x}-(x^2+5)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{2x\sqrt{x}-\frac{(x^2+5)}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{\frac{4x^2-x^2-5}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$f' = \frac{3x^2-5}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'' = \frac{(3x^2-5)'2x\sqrt{x}-(3x^2-5)(2x\sqrt{x})'}{(2x\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{(6x)2x\sqrt{x}-(3x^2-5)\left[(2x)'\sqrt{x}+2x.(\sqrt{x})'\right]}{4x^3}$$

$$= \frac{12x^2\sqrt{x}-(3x^2-5)\left[2\sqrt{x}+2x.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]}{4x^3}$$

$$= \frac{12x^2\sqrt{x}-(3x^2-5)\left[\frac{2x+x}{\sqrt{x}}\right]}{4x^3}$$

$$\boldsymbol{f'' = \frac{12x^2\sqrt{x}-(3x^2-5)\left[\frac{3x}{\sqrt{x}}\right]}{4x^3}}$$

$$f''(4) = \frac{12\times4^2\sqrt{4}-(3\times4^2-5)\times\frac{3\times4}{\sqrt{4}}}{4\times4^3}$$

$$= \frac{384-43\times6}{256}$$

$$= \frac{126}{256}$$

$$f''(4) = 0.4921875$$

R) e

EXERCICE 12

On donne $f(x) = \frac{-3-3x}{2x+4}$, que vaut $[f'(3)]^2$

$a)\ -\frac{5}{3}$ $b)\ 49$ $c)\ 23$ $d)\ \frac{25}{9}$ $e) ABR$

Résolution

$f(x) = \frac{-3-3x}{2x+4}$

$f'(x) = \frac{(-3-3x)'(2x+4)-(-3-3x)(2x+4)'}{(2x+4)^2}$

$= \frac{[(-3)'-(3x)'](2x+4)-(-3-3x)[(2x)'+(4)']}{(2x+4)^2}$

$= \frac{(0-3)(2x+4)-(-3-3x)(2+0)}{(2x+4)^2}$

$= \frac{-3(2x+4)-(-3-3x)2}{(2x+4)^2}$

$\frac{-6x-12+6+6x}{(2x+4)^2}$

$f'(x) = \frac{-6}{(2x+4)^2}$

$[f'(3)]^2 = \left[\frac{-6}{(2\times3+4)^2}\right]^2$

$= \left[\frac{-6}{(6+4)^2}\right]^2$

$= \left[\frac{-6}{(10)^2}\right]^2$

$= \left(\frac{-6}{100}\right)^2$

$=\left(\frac{-3}{50}\right)^2$

$= \frac{9}{2500}$

$[f'(3)]^2 = \frac{9}{2500}$

R) e

EXERCICE 13

Evaluez $f''(4)\ \ si\ f(x) = \frac{x^2+6}{\sqrt{x}}$

$a)$ 1.47 $b)$ 3.22 $c)$ 0.51 $d)$ 5.63 $e)ABR$

Résolution

$f(x) = \frac{x^2+6}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{(x^2+6)'\sqrt{x}-(x^2+6)(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}^2}$

$= \frac{\left[(x^2)'+(6)'\right]\sqrt{x}-(x^2+6)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

$= \frac{(2x+0)\sqrt{x}-\frac{(x^2+6)}{2\sqrt{x}}}{x}$

$= \frac{2x\sqrt{x}-(x^2+6)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

$= \frac{\frac{4x^2-x^2-6}{2\sqrt{x}}}{x}$

$f' = \frac{3x^2-6}{2x\sqrt{x}}$

$f'' = \frac{(3x^2-6)'2x\sqrt{x}-(3x^2-6)(2x\sqrt{x})'}{(2x\sqrt{x})^2}$

$= \frac{(6x)2x\sqrt{x}-(3x^2-6)\left[(2x)'\sqrt{x}+2x.(\sqrt{x})'\right]}{4x^3}$

$= \frac{12x^2\sqrt{x}-(3x^2-6)\left[2\sqrt{x}+2x.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]}{4x^3}$

$= \frac{12x^2\sqrt{x}-(3x^2-6)\left[\frac{2x+x}{\sqrt{x}}\right]}{4x^3}$

$\boldsymbol{f'' = \frac{12x^2\sqrt{x}-(3x^2-6)\left[\frac{3x}{\sqrt{x}}\right]}{4x^3}}$

$f''(9) = \frac{12\times9^2\times\sqrt{9}-(3\times9^2-6)\left(\frac{3\times9}{\sqrt{9}}\right)}{4\times9^3}$

$= \frac{2916-237\times9}{2916}$

$= \frac{783}{2916}$

$f''(9) = 0.268518518$

R) e

EXERCICE 14

Soit la fonction $f\ de\ \mathbb{R}\ dans\ \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x) = \frac{(7-x^2)^{326}}{326}$

a) Calculez les dérivées $f'(x) et\ \ f''(x)$

b) Evaluez les nombres $f(-\sqrt{7}), f(\sqrt{7})\ et\ f(-\sqrt{8})$

Résolution

a) $f(x) = \frac{(7-x^2)^{326}}{326}$

$f'(x) = \frac{\left[(7-x^2)^{326}\right]' 326-(7-x^2)^{326}.(326)'}{326^2}$

$= \frac{326\,(7-x^2)'(7-x^2)^{326-1}-(7-x^2)^{326}\times 0}{326^2}$

$= \frac{326.\left[(7)'-(x^2)'\right](7-x^2)^{325}.326}{326^2}$

$= \frac{326(0-2x)(7-x^2)^{325}.326}{326^2}$

$\boldsymbol{f'(x)} = \mathbf{-2x}(7-x^2)^{325}$

$f'' = (-2x)'.(7-x^2)^{325} + (-2x).[(7-x^2)^{325}]'$

$= -2(7-x^2)^{325} - 2x.325.(7-x^2)'(7-x^2)^{324}$

$= -2(7-x^2)^{325} - 650x.(-2x)(7-x^2)^{324}$

$= -2(7-x^2)^{325} + 1300x^2\,(7-x^2)^{324}$

$= (7-x^2)^{324}[-2(7-x^2) + 1300x^2]$

$f''(x) = (7-x^2)^{324}[2x^2 - 14 + 1300x^2]$

$\boldsymbol{f''(x)} = (7-x^2)^{324}[\mathbf{1302x^2 - 14}]$

$b)\ f(-\sqrt{7}) = \frac{(7-(-\sqrt{7})^2)^{326}}{326}$

$= \frac{(7-7)^{326}}{326}$

$f(-\sqrt{7}) = \frac{0^{326}}{326}$

$f(-\sqrt{7}) = 0$

$f(\sqrt{7}) = \frac{(7-(\sqrt{7})^2)^{326}}{326}$

$= \frac{(7-7)^{326}}{326}$

$f(\sqrt{7}) = \frac{0^{326}}{326}$

$f(\sqrt{7}) = 0$

$f(-\sqrt{8}) = \frac{(7-(-\sqrt{8})^2)^{326}}{326}$

$= \frac{(7-8)^{326}}{326}$

$f(-\sqrt{8}) = \frac{1^{326}}{326}$

$f(-\sqrt{8}) = \frac{1}{326}$

EXERCICE 15

On donne $f(x) = \frac{5-2x}{4+3x}$, que vaut $[f'(-2)]^2$

$a)\ \frac{169}{16}$ $b)\ \frac{16}{100}$ $c)\ \frac{13}{4}$ $d)\ \frac{-13}{4}$ $e) ABR$

Résolution

$f(x) = \frac{5-2x}{4+3x}$

$f'(x) = \frac{(5-2x)'(4+3x)-(5-2x)(4+3x)'}{(4+3x)^2}$

$= \frac{[(5)'-(2x)'](4+3x)-(5-2x)[(4)'+(3x)']}{(4+3x)^2}$

$= \frac{(0-2)(4+3x)-(5-2x)(0+3)}{(4+3x)^2}$

$= \frac{-2(4+3x)-(5-2x)3}{(4+3x)^2}$

$\frac{-8-6x-15+6x}{(4+3x)^2}$

$f'(x) = \frac{-23}{(4+3x)^2}$

$[f'(-2)]^2 = \left[\frac{-23}{(4+3\times(-2))^2}\right]^2$

$= \left[\frac{-23}{(4-6)^2}\right]^2$

$= \left[\frac{-23}{(-2)^2}\right]^2$

$= \left(\frac{-23}{4}\right)^2$

$= \frac{529}{16}$

$[f'(-2)]^2 = \frac{529}{16}$

R) e

EXERCICE 16

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ $dans$ $\mathbb{R}$ définie par la formule $f(x) = \frac{(x^5+21)^{452}}{452}$

a) Calculez les dérivées $f'(x) et\ f''(x)$

b) Evaluez les nombres $f\left(\sqrt[5]{-22}\right)$ et $f(-\sqrt[5]{22})$

Résolution

$a)\ f(x) = \frac{(x^5+21)^{452}}{452}$

$f'(x) = \frac{\left[(x^5+21)^{452}\right]' 452-(x^5+21)^{452}.(452)'}{452^2}$

$= \frac{452\ (x^5+21)'\ (x^5+21)^{452-1}-(x^5+21)^{452}\ \times 0}{452^2}$

$= \frac{452.(x^5+21)'(x^5+21)^{451}.452}{452^2}$

$= \frac{452\left[(x^5)'+(21)'\right](x^5+21)^{451}\ .452}{452^2}$

$= \frac{452(5x^4+0)(x^5+21)^{451}\ .452}{452^2}$

$= \frac{452\ .\ 5x^4(x^5+21)^{451}.452}{452^2}$

$f'(x) = 5x^4(x^5 + 21)^{451}$

$f'' = (5x^4)'.(x^5 + 21)^{451} + 5x^4.[(x^5 + 21)^{451}]'$

$= 20x^3(x^5 + 21)^{451} + 5x^4.451.(x^5 + 21)'(x^5 + 21)^{450}$

$= 20x^3(x^5 + 21)^{451} + 2255x^4.5x^4(x^5 + 21)^{450}$

$= 20x^3(x^5 + 21)^{451} + 11275x^8\ (x^5 + 21)^{450}$

$f''(x) = (x^5 + 21)^{450}[20x^3(x^5 + 21) + 11275x^8]$

$f''(x) = (x^5 + 21)^{450}[20x^8 + 420x^3 + 11275x^8]$

$f''(x) = (x^5 + 21)^{450}[11295x^8 + 420x^3]$

$b)\ f\left(\sqrt[5]{-22}\right) = \frac{((\sqrt[5]{-22})^5+21)^{452}}{452}$

$= \frac{(-22+21)^{452}}{452}$

$= \frac{(-1)^{452}}{452}$

$f\left(\sqrt[5]{-22}\right) = \frac{1}{452}$

$f(-\sqrt[5]{22}) = \frac{((-\sqrt[5]{22})^5+21)^{452}}{452}$

$= \frac{(-22+21)^{452}}{452}$

$= \frac{(-1)^{452}}{452}$

$f(-\sqrt[5]{22}) = \frac{1}{452}$

EXERCICE 17

On considère la fonction réelle f de la variable réelle x définie par la formule

$f(x) = \frac{2-x^2}{2+x^2}$

a) Calculez et simplifiez la dérivée $f'(x)$

b) Que vaut $f'(-1)$

c) Que vaut $f(-2)$

Résolution

a) $f(x) = \frac{2-x^2}{2+x^2}$

$f'(x) = \frac{(2-x^2)'(2+x^2)-(2-x^2)(2+x^2)'}{(2+x^2)^2}$

$= \frac{\left[(2)'-(x^2)'\right](2+x^2)-(2-x^2)\left[(2)'+(x^2)'\right]}{(2+x^2)^2}$

$= \frac{(0-2x)(2+x^2)-(2-x^2)(0+2x)}{(2+x^2)^2}$

$= \frac{-2x(2+x^2)-(2-x^2)2x}{(2+x^2)^2}$

$= \frac{-4x-2x^3-4x+2x^3}{(2+x^2)^2}$

$f'(x) = \frac{-8x}{(2+x^2)^2}$

$b)\ f'(-1) = \frac{-8\times(-1)}{(2+(-1)^2)^2}$

$= \frac{8}{3^2}$

$f'(-1) = \frac{8}{9}$

$c)\ f(-2) = \frac{2-(-2)^2}{2+(-2)^2}$

$= \frac{2-4}{2+4}$

$= \frac{-2}{6}$

$f(-2)={}^{-1}/_{3}$

EXERCICE 18

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ $dans$ $\mathbb{R}$ définie par la formule $f(x)=\frac{(1-x^4)^{150}}{150}$

a) Calculez les dérivées $f'(x) et$ $f''(x)$

b) Evaluez les nombres $f(-1), f(\sqrt[4]{2})$ et $f(0)$

Résolution

$a)$ $f(x)=\frac{(1-x^4)^{150}}{150}$

$f'(x)=\frac{\left[(1-x^4)^{150}\right]'150-(1-x^4)^{150}.(150)'}{150^2}$

$=\frac{150\,(1-x^4)'(1-x^4)^{150-1}-(1-x^4)^{150}\times 0}{150^2}$

$=\frac{150.(1-x^4)'(1-x^4)^{149}.150}{150^2}$

$=\frac{150\left[(1)'-(x^4)'\right](1-x^4)^{149}.150}{150^2}$

$=\frac{150(0-4x^3)(1-x^4)^{149}.150}{150^2}$

$f'(x)=-4x^3(1-x^4)^{149}$

$f''=(-4x^3)'.(1-x^4)^{149}+(-4x^3).[(1-x^4)^{149}]'$

$=-12x^2(1-x^4)^{149}-4x^3.149.(1-x^4)'.(1-x^4)^{148}$

$=-12x^2(1-x^4)^{149}-596x^3.(-4x^3)(1-x^4)^{148}$

$=-12x^2(1-x^4)^{149}+2384x^6\,(1-x^4)^{148}$

$=(1-x^4)^{148}[-12x^2(1-x^4)+2384x^6]$

$f''(x)=(1-x^4)^{148}[-12x^2+12x^6+2384x^6]$

$f''(x)=(1-x^4)^{148}[2396x^6-12x^2]$

$b)$ $f(-1)=\frac{(1-(-1)^4)^{150}}{150}$

$=\frac{(1-1)^{150}}{150}$

$=\frac{0^{150}}{150}$

$f(-1)=0$

$f(\sqrt[4]{2})=\frac{(1-(\sqrt[4]{2})^4)^{150}}{150}$

$= \frac{(1-2)^{150}}{150}$

$= \frac{(-1)^{150}}{150}$

$$f(\sqrt[4]{2}) = \frac{1}{150}$$

$f(0) = \frac{(1-(0)^4)^{150}}{150}$

$= \frac{(1-0)^{150}}{150}$

$= \frac{1^{150}}{150}$

$f(0) = \frac{1}{150}$

III. EXERCICES D'ENTRAINEMENT

EXERCICE 19

Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

$a)\ f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{5}x + 2 - x^3$

$b) f(x) = (\sqrt{2} + 3)\ x^2 + 5x - 8$

$c)\ f(x) = x^5 - 2x^4 + x^9 - 10x^2 - \frac{1}{5}$

$d) f(x) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{5}x^5 + 2x - \sqrt{3}$

$e)\ f(x) = 5 - 6x^2 - x^4 + \sqrt{12}$

EXERCICE 20

Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

$a)\ f(x) = -\frac{1}{6}x^6 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + \sqrt{11}$

$b)\ f(x) = (3x + 2)(x + 5)(x + 2)$

$c)\ f(x) = (x - 2)(x + 2)$

$d)\ f(x) = (-2x - 1)(x^2 - 6x + 10)$

$e)\ f(x) = (3x^2 + 4)(-4x^2 + 12x + 6)$

EXERCICE 21

Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

$a)\ f(x) = (-3x^2 + 2x + 2)^3$

$b)\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\ x^2 + x + \sqrt{2}\right)^2$

$c) f(x) = (2x + 5)^2(x - 1)(x + 1)$

$d)\ f(x) = x^2(x - 1)\sqrt{3}$

$e)\ f(x) = 3x^3\ (3x - 7)^2 + 4x + \sqrt[6]{8}$

EXERCICE 22

Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

$a)\ f(x) = (x^4 - 1)^2\ (x - 3)^{-3}$

$b)\ f(x) = (x^2 + 2)(5x - 2)$

$c)\ x^{-3}(x^2 + x + 1)^3\ (x^2 - 6x + 1)$

$d)\ f(x) = (x^2 + x + 1)^{-3}\ (x - 2)^2$

$e)\ f(x) = (x + 1)^2\ (3x - 1)^4\sqrt{3}$

EXERCICE 23

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous

$a)\ f(x) = \frac{3x^2-1}{x}$

$b)\ f(x) = \frac{10+\sqrt[3]{27}}{3x+1}$

$c)\ f(x) = \frac{2x+4}{2(2x-1)} - \sqrt{2} + 3x + 4$

$d)\ f(x) = \frac{7x-1}{5-2x}$

$e)\ f(x) = \frac{2-x}{x^2+x+3}$

EXERCICE 24

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous :

$a)\ f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x+2}$

$b)\ f(x) = \frac{3-\sqrt{x^2}}{5x-1}$

$c)\ f(x) = \frac{x^3+x^2+x+4}{x^3+x^2-2x+1}$

$d)\ f(x) = \frac{-3x}{x^2}$

$e)\ f(x) = \frac{5}{x^2-x+3}$

EXERCICE 25

Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

$a)\ f(x) = \sqrt{x^2-3}$

$b)\ f(x) = \sqrt[4]{x^2+2x+1}$

$c)\ f(x) = \sqrt{(x+3)^4}$

$d)\ f(x) = \sqrt[4]{(1-x-x^2)^3}$

$e)\ f(x) = \sqrt[8]{(x^2+5x+6)^7}$

EXERCICE 26

Calculer les dérivés des fonctions suivantes définies par :

$a)\ f(x) = (2x-1)(4x+2)$

$b)\ f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{4x^2+3}$

$c)\ f(x) = \sqrt{(x+1)^3}$

$d)\ f(x) = \frac{5}{-2}$

$e) f(x) = (2x-1)^2(x+1)^{-2} + 2x + 3$

EXERCICE 27

Calculer les dérivés des fonctions suivantes définies par :

$a)\ f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$

$b)\ f(x) = \frac{x^2-7x+1}{5x+1} + \sqrt{3}$

$c)\ f(x) = \frac{(x^2-x+1)^2}{(x^3-1)^2}$

$d)\ f(x) = (x^2 + x + 1)^{-3}(x^2 + x + 1)^2$

$e)\ f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2-1}$

EXERCICE 28

$a)$ On donne $f(x) = \frac{4}{3x+1}$.

Calculer $f''(2)$

$b)\ Soit\ f(x) = \frac{\sqrt[6]{(x^2-1)^5}}{\sqrt[3]{2x+1}}$, Calculer $f'(3)$

Table des matières