EQUATIONS DU PREMIER DEGRE

Par Aimé DIUMI DIKOLO

www.wissen-corporation.com

Table des matières

I. EQUATION DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

I.1 Définitions

I.1.1 Equation

Une équation est une égalité qui comporte au moins une inconnue.

Exemple : $2x + 3 = 5$ *et* $x + 2y = 5$ sont des équations.

Contre-exemple : $56 = 50 + 6$ n'est pas une équation : c'est une égalité vraie mais qui n' a pas des inconnues.

$2x + 4$ N'est pas une équation car il n'y a pas d'égalité quoiqu'ayant une inconnue.

I..1.2 Equation à une inconnue

Une équation est dite à une inconnue si elle ne comporte qu'une seule inconnue (variable).

Exemple : $2x + 3 = 4x + 6$; $x^2 + 5x + 6 = 0$; $x^3 + 25x^2 + 30 = 0$ sont des équations à une variable.

Contre-exemple : $2x + 3x = 4$ n'est pas une équation à une inconnue.

I.1.3 Equation du premier degré

Une équation est dite du premier degré si le degré supérieur (l'exposant le plus élevé) de son (ses) inconnue(s) est 1.

Exemple : $x + 4x = 5 + 2x; x + 2y = 3$ sont des équations du premier degré.

Contre-exemple : $x^2 - 6x + 3 = 0$ n'est pas une équation du premier degré.

I.1.4 Equation du premier degré à une inconnue

Une équation du premier degré à une inconnue est une équation contenant une seule inconnue et dont le degré supérieur de cette inconnue est 1.

La forme générale est : $ax + b = 0$. Avec a $\neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$

Exemple : $5x + 4 = 0$ et $2x + 4 = 6x + 3$ sont des équations du premier degré à une inconnue.

Contre-exemple : $x^2 + 5x + 6 = 0$ n'est pas une équation du premier degré.

II.2 Résolution

Résoudre une équation, c'est chercher l'ensemble des valeurs qui vérifient l'égalité et ces valeurs sont appelées solutions de l'équation.

Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue, on procède comme suit :

I.2.1 1ere méthode

- D'abord supprimer les parenthèses et crochets (s'il y en a)
- Ramener l'équation sous la forme générale $ax + b = 0$ (en groupant les termes semblables).
- Renvoyer le terme indépendant (b) au second membre de l'égalité pour avoir ceci : $ax = -b$
- Trouver la valeur de x : $x = {}^{-b}/_{a}$

Exemple 1

Résoudre les équations suivantes :

a) $5x + 3 = 3x - 5$

Comme il n'y a pas de parenthèses, on passe directement à la deuxième étape : ramenons tous les termes au premier membre de l'égalité (c'est-à-dire avant le signe =)

Sans oublier que si un terme change de membre, il change aussi de signe

$5x + 3 - 3x + 5 = 0$ ($3x$ *et* -5 ont changé de membre, leurs signes changent aussi)

- Groupons les termes semblables (les termes en x entre eux et les termes sans x entre eux) :

$(5x - 3x) + (3 + 5) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 8 = 0$ (Selon la forme générale, a =2 et b=8)

-Renvoyons le terme indépendant (8) au second membre :

$2x = -8 \Leftrightarrow x = {}^{-8}/_{2}$

$S = \{-4\}$

b) $4(3x + 3) - 4 = 2x - 2(2x - 2)$
$\Leftrightarrow 4 \times 3x + 4 \times 3 - 4 = 2x - 2 \times 2x - 2 \times (-2)$
$\Leftrightarrow 12x + 12 - 4 = 2x - 4x + 4$
$\Leftrightarrow 12x + 12 - 4 - 2x + 4x - 4 = 0$
$\Leftrightarrow (12x - 2x + 4x) + (12 - 4 - 4) = 0$
$\Leftrightarrow 14x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow 14x = -4$
$\Leftrightarrow x = {}^{-4}/_{14}$

$\Leftrightarrow x = {}^{-2}/_{7}$

$S = \{{}^{-2}/_{7}\}$

c) $\frac{2x+3}{4} + \frac{x-5}{3} - \frac{x}{2} = 2$

Dans ce cas, trouvons d'abord le dénominateur commun, dans notre cas, c'est 12.

Voici ce qu'on va faire : pour chaque terme, on divise le dénominateur par le dénominateur du terme, multiplié par le numérateur.

$\frac{3(2x+3)}{12} + \frac{4(x-5)}{12} - \frac{6\times x}{12} = \frac{12\times 2}{12}$

$\Leftrightarrow \frac{6x+9}{12} + \frac{4x-20}{12} - \frac{6x}{12} = \frac{24}{12}$

$\Leftrightarrow \frac{6x+9+4x-20-6x}{12} = \frac{24}{12}$

Comme les deux membres ont le même dénominateur, on peut simplifier les deux dénominateurs pour ne rester qu'avec les numérateurs.

$\Leftrightarrow 6x + 9 + 4x - 20 - 6x = 24$

$\Leftrightarrow 6x + 9 + 4x - 20 - 6x - 24 = 0$

$\Leftrightarrow (6x + 4x - 6x) + (9 - 20 - 24) = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 35 = 0$

$\Leftrightarrow 4x = 35$

$\Leftrightarrow x = {}^{35}/_{4}$

$S = \{{}^{35}/_{4}\}$

I.2.2 2e méthode :

- Ramener les termes en x au premier membre et les termes indépendants au second membre
- Grouper les termes pour avoir $ax = b$
- Calculer $x = {}^{b}/_{a}$

Exemple 2

Résoudre : $3(2x - 3) + 4 = x - 4(2x - 1)$

$\Leftrightarrow 6x - 9 + 4 = x - 8x + 4$

$\Leftrightarrow 6x - x + 8x = 4 + 9 - 4$

$\Leftrightarrow 13x = 9$

$$\Leftrightarrow x = {}^{9}/_{13}$$

$$S = \{{}^{9}/_{13}\}$$

Exemple 3

Résoudre : $5x - 4x - 2(x - 3) - 52 = -3(x - 5) + 52$

$$\Leftrightarrow 5x - 4x - 2x + 6 - 52 = -3x + 15 + 52$$

On groupe les termes semblables de chaque membre

$\Leftrightarrow (5x - 4x - 2x) + (6 - 52) = -3x + (15 + 52)$

$\Leftrightarrow -x - 46 = -3x + 67$

$\Leftrightarrow -x + 3x = 67 + 46$

$\Leftrightarrow 2x = 113$

$\Leftrightarrow x = {}^{113}/_{2}$

$S = \{{}^{113}/_{2}\}$

I.3 Equations particulières

- Si lors de la résolution, on trouve : $0.x = b$ avec $b \neq 0$, alors l'équation est impossible et $S = \emptyset$
- Et si on trouve $0.x = 0$, alors l'équation est indéterminée et $S = \mathbb{R}$.

Exemple 4

Résoudre les équations ci-après :

a) $2x + 3 = 2(x - 4) + 3$

$\Leftrightarrow 2x + 3 = 2x - 8 + 3$

$\Leftrightarrow 2x - 2x = -8 + 3 - 3$

$\Leftrightarrow 0x = -8$

L'équation est impossible, $S = \emptyset$

b) $5 - 3(x - 4) = -3x + 17$
$\Leftrightarrow 5 - 3x + 12 = -3x + 17$
$\Leftrightarrow -3x + 3x = 17 - 5 - 12$
$\Leftrightarrow 0x = 0$

L'équation est indéterminée, $S = \mathbb{R}$

Remarque

Deux équations sont dites équivalentes si et seulement si elles admettent la même solution.

Exemple : $2x + 4 = 0$ *et* $x + 2 = 0$ sont équivalentes car elles ont la meme solution $\{2\}$.

II. EQUATIONS REDUCTIBLES AU PREMIER DEGRE

II.1 EQUATIONS PRODUITS $\boldsymbol{A.B.C \ldots = 0}$

Soit à résoudre l'équation $A.B.C = 0$ où A, B et C sont des facteurs du premier degré, on utilise la propriété suivante :

$A.B.C \ldots = 0 \Leftrightarrow (A = 0)\ ou\ (B = 0) ou\ (C = 0) \ldots$

Exemple 5

Résoudre $(2x - 3)(4x - 1)(x - 4)(-2x + 8) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = 0\ \ ou\ 4x - 1 = 0\ \ ou\ x - 4 = 0\ ou - 2x + 8 = 0$$

$$2x = 3\ ou\ 4x = 1\ ou\ x = 4\ \ ou - 2x = -8$$

$$\Leftrightarrow x = {}^{3}/_{2}\ ou\ x = {}^{1}/_{4}\ ou\ x = 4\ ou\ \ - x = {}^{-8}/_{2}$$

$$\Leftrightarrow x = {}^{3}/_{2}\ ou\ x = {}^{1}/_{4}\ ou\ x = 4\ ou\ x = 4$$

$$S = \{{}^{1}/_{4};\ {}^{3}/_{2};4\}$$

Remarque

Même les équations de degré supérieur à 1 peuvent être ramenées sous cette forme par décomposition ou factorisation.

Exemple 6

Résoudre $x^2 - 5x + 6 = 0$

Décomposons le trinôme donné. Il y a plusieurs méthodes pour le faire, mais voici celle que nous allons utiliser :

Soit $P(x) = x^2 - 5x + 6$

- Trouver les diviseurs du terme indépendant

Dans notre cas, le terme indépendant c'est 6 et ses diviseurs sont :
$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3\ \ \ et\ \pm 6$

- Remplacer les diviseurs dans le polynôme et retenir celui qui annule le polynôme, c'est-à-dire, soit x_0, tel que x_0 est diviseur du terme indépendant, calculer $P(x_0)$ et retenir celui pour lequel $P(x_0) = 0$.

Pour notre exemple :

Pour -1 : $P(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 6 = 12 \neq 0$ à rejeter

Pour 1 : $P(1) = (1)^2 - 5(1) + 6 = 2 \neq 0$ à rejeter

Pour 2 : $P(2) = (2)^2 - 5(2) + 6 = 0$ à considérer

Inutile de tester les autres diviseurs car on a déjà trouvé un qui vérifie :

- Effectuer la division de $P(x)$ par $x - xo$, xo étant le diviseur qui a vérifié la condition prétendante.

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^2 + 2x \phantom{{}+6} & x - 3 \\ \cline{1-1}
3x + 6 & \\
-3x - 6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

- Le polynôme sera égal au produit du diviseur et du quotient :

$x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3)$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \; ou \; x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \; ou \; x = 3$

$S = \{2; 3\}$

Exemple 7

Résoudre : $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

Décomposons $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

- Les diviseurs de 10 sont : $\pm 1; \pm 2$; ± 5 et ± 10
- Parmi ces diviseurs, -1 annule le polynôme
- Effectuons la division de $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ par $x + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 6x^2 + 3x + 10 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 - x^2 & x^2 - 7x + 10 \\ \cline{1-1}
-7x^2 + 3x + 10 & \\
7x^2 + 7x & \\ \cline{1-1}
\qquad 10x + 10 & \\
\qquad -10x - 10 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 7x + 10)$

On constate qu'après décomposition, il y a un facteur, qui n'est pas du premier degré, nous devons le décomposer à son tour.

$x^2 - 7x + 10$

Parmi les diviseurs de 10, il y a 2 qui annule le trinôme, effectuons la division de $x^2 - 7x + 10\ par\ x - 2$

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 - 7x + 10 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^2 + 2x & x - 5 \\ \cline{1-1}
-5x + 10 & \\
5x - 10 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 7x + 10)$

Or $x^2 - 7x + 10 \Leftrightarrow (x-2)(x-5)$

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 3x + 10 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-5)$

$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \quad ou\ x - 2 = 0\ ou\ x = 5$

$\Leftrightarrow x = -1 \quad ou\ x = 2 \quad ou\ x = 5$

$S = \{-1; 2; 5\}$

II.2. EQUATIONS FRACTIONNAIRES

Une équation du premier degré est dite fractionnaire si un dénominateur au moins contient une inconnue.

Résolution

Pour résoudre une équation fractionnaire, on procède comme suit :

- Poser les conditions préalables sur les dénominateurs
- Résoudre l'équation
- Retenir que les valeurs de l'inconnue qui vérifient la condition préalable

Exemple 8

Résoudre : $\frac{2}{x-4} + \frac{3}{x-2} = \frac{5}{x+1}$

Condition préalable : $x - 4 \neq 0\ et\ x - 2 \neq 0\ et\ x + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 4\ et\ x \neq 2\ \ et\ x \neq -1$

C'est-à-dire si nous trouvons 4, 2 ou -1 comme solution, il faut le rejeter.

Résolvons l'équation

$\frac{2}{x-4}+\frac{3}{x-2}=\frac{5}{x+1}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{x-4}+\frac{3}{x-2}-\frac{5}{x+1}=0$

$\Leftrightarrow \frac{2(x-2)(x+1)+3(x-4)(x+1)-5(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-2)(x+1)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{2(x^2+x-2x-2)+3(x^2+x-4x-4)-5(x^2-2x-4x+8)}{(x-4)(x-2)(x+1)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-x-2)+3(x^2-3x-4)-5(x^2-6x+8)}{(x-4)(x-2)(x+1)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{2x^2-2x-4+3x^2-9x-12-5x^2+30x-40}{(x-4)(x-2)(x+1)}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x-4+3x^2-9x-12-5x^2+30x-40=0$

$\Leftrightarrow (2x^2+3x^2-5x^2)+(-2x-9x+30x)+(-4-12-40)=0$

$\Leftrightarrow 19x-56=0$

$\Leftrightarrow 19x=56$

$\Leftrightarrow x={}^{56}/_{19}$

$S=\left\{{}^{56}/_{19}\right\}$

Exemple 9

Résoudre : $\frac{7}{7x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{1}{7x-1}$

Condition préalable : $7x-1\neq 0\ et\ x+1\neq 0$

$$\Leftrightarrow x\neq {}^{1}/_{7}\quad et\ x\neq -1$$

Résolvons l'équation

$\frac{7}{7x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{1}{7x-1}$

$\Leftrightarrow \frac{7}{7x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{1}{7x-1}=0$

$\Leftrightarrow \frac{7(x+1)-2(7x-1)-1(x+1)}{(7x-1)(x+1)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{7x+7-14x+2-x-1}{(7x-1)(x+1)}=0$

$\Leftrightarrow 7x + 7 - 14x + 2 - x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (7x - 14x - x) + (7 + 2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow -8x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow -8x = -8$

$\Leftrightarrow x = 1$

$S = \{1\}$

II.3 EQUATIONS CONTENANT DES VALEURS ABSOLUES

On sait que $|a| = \begin{cases} \text{a si a} \geq 0 \\ -\text{a si a} \leq 0 \end{cases}$

Exemple 10

Résoudre :

$|5x - 3| = 12$

Par définition de la valeur absolue :

$$|5x - 3| = \begin{cases} 5\text{x} - 3 \text{ si } 5\text{x} - 3 \geq 0 \\ -(5\text{x} - 3) \text{si } 5\text{x} - 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5\text{x} - 3 \text{ si } 5\text{x} \geq 3 \\ -5\text{x} + 3 \text{ si } 5\text{x} \leq 3 \end{cases}$$

$$|5x - 3| = \begin{cases} 5\text{x} - 3 \text{ si x} \geq {}^{3}/_{5} \\ 3 - 5\text{x} \text{ si x} \leq {}^{3}/_{5} \end{cases}$$

x	$-\infty$ ${}^{3}/_{5}$	$+\infty$
$|5x - 3|$	$3 - 5\text{x}$	$5x - 3$
$|5x - 3| = 12$	$3 - 5x = 12$	$5\text{x} - 3 = 12$

$|5x - 3|$ a deux valeurs selon que $\text{x} \geq {}^{3}/_{5}$ ou $\text{x} \leq {}^{3}/_{5}$

Examinons les deux cas :

- Si $\text{x} \geq {}^{3}/_{5} \Leftrightarrow x \in \left[{}^{3}/_{5}; +\infty\right[$: la valeur de $|5x - 3|$ vaut $5x - 3$, en remplaçant cette valeur dans l'équation initiale à la place de $|5x - 3|$, on a :

$5x - 3 = 12 \Leftrightarrow 5x = 12 + 3$

$$\Leftrightarrow 5x = 15$$

$$\Leftrightarrow x = {}^{15}/_{5}$$

$S_1 = \{3\}$

- Si $x \leq {}^{3}/_{5} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; {}^{3}/_{5}\right]$: la valeur de $|5x - 3|$ vaut $3 - 5x$,en remplaçant cette valeur à la place de $|5x - 3|$ dans l'équation initiale, on a :

$$3 - 5\text{x} = 12 \Leftrightarrow -5\text{x} = 12 - 3$$

$$\Leftrightarrow -5x = 9$$

$$\Leftrightarrow -x = {}^{9}/_{5}$$

$$S_2 = \left\{{}^{-9}/_{5}\right\}$$

$S = S_1 \cup S_2$

$S = \left\{{}^{-9}/_{5} ; 3\right\}$

Exemple 11

Résoudre : $|x - 5| - 2 = |2x + 3|$

$$|x - 5| = \begin{cases} \text{x} - 5 \ \text{si x} - 5 \geq 0 \\ -(\text{x} - 5) \ \text{si x} - 5 \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{x} - 5 \ \text{si x} \geq 5 \\ -(\text{x} - 5) \ \text{si x} \leq 5 \end{cases}$$

$$|2x + 3| = \begin{cases} 2\text{x} + 3 \ \text{si } 2\text{x} + 3 \geq 0 \\ -(2\text{x} + 3)\text{si } 2\text{x} + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\text{x} + 3 \ \text{si } 2\text{x} \geq -3 \\ -2\text{x} - 3 \ \text{si } 2\text{x} \leq 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\text{x} + 3 \ \text{si x} \geq {}^{-3}/_{2} \\ -2\text{x} - 3 \ \text{si x} \leq {}^{-3}/_{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	${}^{-3}/_{2}$	5	$+\infty$
$\|x - 5\|$	$5 - x$	$5 - x$	$x - 5$	
$\|2x + 3\|$	$-2\text{x} - 3$	$2\text{x} + 3$	$2\text{x} + 3$	
$\|x - 5\| - 2 = \|2x + 3\|$				

La droite numérique ($\mathbb{R}$) est divisé en 3 parties :

$]-\infty;\ ^{-3}/_{2}]$

$[^{-3}/_{2}\,;5]$

$[5;\ +\infty[$

On va examiner les trois cas en remplaçant à chaque fois l'expression entre signe valeur absolue par sa valeur correspondante dans l'intervalle considéré.

Pour $x \in \left]-\infty;\ ^{-3}/_{2}\right]$: $5 - x - 2 = -2x - 3$

$$\Leftrightarrow -x + 2x = -3 - 5 + 2$$

$$\Leftrightarrow x = -6$$

$$S_1 = \{-6\}$$

Pour $x \in \left[^{-3}/_{2}\,;5\right]$: $5 - x - 2 = 2x + 3$

$$\Leftrightarrow -x - 2x = 3 + 2 - 5$$

$$\Leftrightarrow -3x = 0$$

$$\Leftrightarrow -x = {}^{0}/_{3}$$

$$S_2 = \{0\}$$

Pour $x \in [5;\ +\infty[$: $x - 5 - 2 = 2x + 3$

$$\Leftrightarrow x - 2x = 3 + 2 + 5$$

$$\Leftrightarrow -x = 10$$

$\Leftrightarrow x = -10$ à rejeter car -10 $\notin$ $[5;\ +\infty[$

$$S_3 = \emptyset$$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$S = \{-6, 0\}$

III. PROBLEMES DONT LA RESOLUTION CONDUIT A UNE EQUATION DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE.

Certains problèmes peuvent être résolus en utilisant des équations mathématiques.

Procédure :

- Commencez par comprendre le problème et cela en lisant et relisant plusieurs fois l'énoncé.
- Choix de l'inconnue
- Mise en équation
- Résolution
- Vérification

Exemple 12

Après avoir perdu 20% de sa valeur, un objet vaut 64u.m.

Quel était le prix initial ?

- Choix de l'inconnue

Soit x le prix initial

- Mise en équation

Quand on perd, c'est la diminution, on aura donc :

$x - 20\%\ de\ x = 64$

$\Leftrightarrow x - \frac{20}{100} \times x = 64$

$\Leftrightarrow x - 0{,}2x = 64$

$- Résolution$
$x - 0{,}2x = 64$
$\Leftrightarrow (1 - 0{,}2)x = 64$
$\Leftrightarrow 0{,}8x = 64$
$\Leftrightarrow x = {}^{64}/_{0{,}8}$
$\Leftrightarrow x = 80$

Donc la valeur initiale était de 80 u.m

Exemple 13

Si je gagne 30\$, j'aurai le double de ce que j'aurai si je perdais 30%. Combien ai-je ?

- Choix de l'inconnue

Soit x ce que je possède

- Mise en équation

Si je gagne 30\$, cela veut dire si on m'ajoute 30\$ à ce que je possède : $x + 30$

Si je perds 30% : $x - 30\%\ de\ x$.

On peut avoir l'équation :

$x + 30 = 2 \times (x - 30\%\ de\ x)$

- Résolution

$x + 30 = 2 \times (x - 30\%\ de\ x)$

$\Leftrightarrow x + 30 = 2\left(x - \frac{30}{100} \times x\right)$

$\Leftrightarrow x + 30 = 2(x - 0{,}3x)$

$\Leftrightarrow x + 30 = 2 \times 0{,}7x$

$\Leftrightarrow x + 30 = 1{,}4x$

$\Leftrightarrow 1{,}4x - x = 30$

$\Leftrightarrow 0{,}4x = 30$

$\Leftrightarrow x = {}^{30}/_{0,4}$

$\Leftrightarrow x = 75$

Donc j'ai 75$

IV. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3 - 7x - (1 - x) = 2(x + 1)$
b) $6x - (3 - 7x) - 10(x + 1) = 3(x - 3) - 4$
c) $4x + 2 - (3x - 8) = 11 + x$
d) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{2} = 1$
e) $\frac{x+3}{3} - \frac{2x-1}{4} = \frac{3}{2}$

Résolution

a) $3 - 7x - (1 - x) = 2(x + 1)$
$\Leftrightarrow 3 - 7x - 1 + x = 2x + 2$
$\Leftrightarrow 7x + x - 2x = 2 - 3 + 1$
$\Leftrightarrow (7 + 1 - 2)x = 0$
$\Leftrightarrow 6x = 0$
$\Leftrightarrow x = {}^{0}/_{6}$
$S = \{0\}$

b) $6x - (3 - 7x) - 10(x + 1) = 3(x - 3) - 4$
$\Leftrightarrow 6x - 3 + 7x - 10x - 10 = 3x - 9 - 4$
$\Leftrightarrow 6x + 7x - 10x - 3x = -9 - 4 + 3 + 10$
$\Leftrightarrow (6 + 7 - 10 - 3)x = 0$
$\Leftrightarrow 0x = 0$

L'équation est indéterminée

$S = \mathbb{R}$

c) $4x + 2 - (3x - 8) = 11 + x$
$\Leftrightarrow 4x + 2 - 3x + 8 = 11 + x$
$\Leftrightarrow 4x - 3x - x = 11 - 8 - 2$
$\Leftrightarrow (4 - 3 - 1)x = 1$
$\Leftrightarrow 0x = 1$

L'équation est impossible

$S = \emptyset$

d) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{2} = 1$
$\Leftrightarrow \frac{x-1-(x-3)}{2} = \frac{2}{2}$
$\Leftrightarrow \frac{x-1-x+3}{2} = \frac{2}{2}$
$\Leftrightarrow x - 1 - x + 3 = 2$
$\Leftrightarrow x - x = 2 + 1 - 3$
$\Leftrightarrow 0x = 0$

L'équation est indéterminée

$S = \mathbb{R}$

e) $\frac{x+3}{3} - \frac{2x-1}{4} = \frac{3}{2}$
$\Leftrightarrow \frac{4(x+3)-3(2x-1)}{12} = \frac{6\times 3}{12}$

$\Leftrightarrow 4(x + 3) - 3(2x - 1) = 18$
$\Leftrightarrow 4x + 12 - 6x + 3 = 18$
$\Leftrightarrow 4x - 6x = 18 - 12 - 3$
$\Leftrightarrow -2x = 3$
$\Leftrightarrow x = {}^{-3}/_{2}$
$S = \{{}^{-3}/_{2}\}$

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3(x - 2) - (3x - 2) = 8 - 4x$
b) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{2} = 2$
c) $\frac{x+1}{3} - \frac{2x}{5} = \frac{1}{15} - \frac{7x}{5}$
d) $\frac{11-x}{84} + \frac{x-5}{4} - \frac{2x-1}{12} + \frac{7}{3} = 0$
e) $\frac{x}{3} - \frac{2x-1}{4} + 2 = \frac{x+3}{6}$
f) $\frac{2x+2}{5} + \frac{2}{3} = 2(x - 1) + 4x$

Résolution

a) $3(x-2)-(3x-2)=8-4x$
$\Leftrightarrow 3x-6-3x+2=8-4x$
$\Leftrightarrow 3x-3x+4x=8+6-2$
$\Leftrightarrow 4x=12$
$\Leftrightarrow x={}^{12}/_{4}$
$S=\{3\}$

b) $\frac{x-1}{2}-\frac{x-3}{2}=2$
$\Leftrightarrow \frac{x-1-(x-3)}{2}=\frac{4}{2}$
$\Leftrightarrow x-1-x+3=4$
$\Leftrightarrow x-x=4+1-3$
$\Leftrightarrow 0x=2$

L'équation est impossible

$S=\emptyset$

c) $\frac{x+1}{3}-\frac{2x}{5}=\frac{1}{15}-\frac{7x}{5}$
$\Leftrightarrow \frac{5(x+1)-3(2x)}{15}=\frac{1-3(7x)}{15}$
$\Leftrightarrow 5(x+1)-3(2x)=1-3(7x)$
$\Leftrightarrow 5x+5-6x=1-21x$
$\Leftrightarrow 5x-6x+21x=1-5$
$\Leftrightarrow (5-6+21)x=-4$
$\Leftrightarrow 20x=-4$
$\Leftrightarrow x={}^{-4}/_{20}$
$S=\left\{{}^{-1}/_{5}\right\}$

d) $\frac{11-x}{84}+\frac{x-5}{4}-\frac{2x-1}{12}+\frac{7}{3}=0$
$\Leftrightarrow \frac{11-x+21(x-5)-7(2x-1)+28\times 7}{84}=0$
$\Leftrightarrow 11-x+21(x-5)-7(2x-1)+28\times 7=0$
$\Leftrightarrow 11-x+21x-105-14x+7+196=0$
$\Leftrightarrow (-1+21-14)x+(11-105+7+196)=0$
$\Leftrightarrow 6x+109=0$
$\Leftrightarrow 6x=-109$
$\Leftrightarrow x={}^{-109}/_{6}$
$S=\{{}^{-109}/_{6}\}$

e) $\frac{x}{3}-\frac{2x-1}{4}+2=\frac{x+3}{6}$
$\Leftrightarrow \frac{4x-3(2x-1)+12\times 2}{12}=\frac{2(x+3)}{12}$
$\Leftrightarrow 4x-3(2x-1)+12\times 2=2(x+3)$
$\Leftrightarrow 4x-6x+3+24=2x+6$
$\Leftrightarrow 4x-6x-2x=6-3-24$
$\Leftrightarrow (4-6-2)x=-21$
$\Leftrightarrow -4x=-21$

$\Leftrightarrow -x = {}^{-21}/_{4}$

$S = \{{}^{21}/_{4}\}$

f) $\frac{2x+2}{5} + \frac{2}{3} = 2(x-1) + 4x$

$\Leftrightarrow \frac{3(2x+2)+5\times 2}{15} = \frac{15\times 2(x-1)+15\times 4x}{15}$

$\Leftrightarrow 3(2x+2) + 5 \times 2 = 15 \times 2(x-1) + 15 \times 4x$

$\Leftrightarrow 6x + 6 + 10 = 30x - 30 + 60x$

$\Leftrightarrow 6x - 30x - 60x = -30 - 6 - 10$

$\Leftrightarrow (6 - 30 - 60)x = -46$

$\Leftrightarrow -84x = -46$

$\Leftrightarrow x = {}^{46}/_{84}$

$\Leftrightarrow x = {}^{23}/_{42}$

$S = \{{}^{23}/_{42}\}$

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{x+3}{2} - \frac{x+5}{6} = \frac{x-1}{3} + 1$

b) $\frac{x}{2} + \frac{2x+3}{12} - 2 = 2(x-1)$

c) $\frac{x}{2} + 11 - \frac{2x}{3} - 4 = \frac{x}{4} + 25 - \frac{5x}{12}$

d) $\frac{9x+7}{2} - \left(x - \frac{x-2}{7}\right) = 3$

e) $\frac{2x-1}{3} = x - \frac{1-x}{2}$

Résolution

a) $\frac{x+3}{2} - \frac{x+5}{6} = \frac{x-1}{3} + 1$

$\Leftrightarrow \frac{9(x+3)-3(x+5)}{18} = \frac{6(x-1)+18\times 1}{18}$

$\Leftrightarrow 9(x+3) - 3(x+5) = 6(x-1) + 18 \times 1$

$\Leftrightarrow 9x + 27 - 3x - 15 = 6x - 6 + 18$

$\Leftrightarrow 9x - 3x - 6x = 18 - 6 - 27 + 15$

$\Leftrightarrow (9 - 3 - 6)x = 0$

$\Leftrightarrow 0x = 0$

L'équation est indéterminée.

$S = \mathbb{R}$

b) $\frac{x}{2} + \frac{2x+3}{12} - 2 = 2(x-1)$

$\Leftrightarrow \frac{6x+2x+3-12\times 2}{12} = \frac{12\times 2(x-1)}{12}$

$\Leftrightarrow 6x + 2x + 3 - 24 = 24x - 24$
$\Leftrightarrow 6x + 2x - 24x = -24 - 3 + 24$
$\Leftrightarrow (6 + 2 - 24)x = -3$
$\Leftrightarrow -16x = -3$
$\Leftrightarrow x = {}^{3}/_{16}$
$S = \{{}^{3}/_{16}\}$

c) $\frac{x}{2} + 11 - \frac{2x}{3} - 4 = \frac{x}{4} + 25 - \frac{5x}{12}$
$\Leftrightarrow \frac{6x+12\times11-4\times2x-12\times4}{12} = \frac{3x+12\times25-5x}{12}$
$\Leftrightarrow 6x + 132 - 8x - 48 = 3x + 300 - 5x$
$\Leftrightarrow 6x - 8x - 3x + 5x = 300 - 132 + 48$
$\Leftrightarrow (6 - 8 - 3 + 5)x = 216$
$\Leftrightarrow 0x = 216$

L'équation est impossible

$S = \emptyset$

d) $\frac{9x+7}{2} - \left(x - \frac{x-2}{7}\right) = 3$
$\Leftrightarrow \frac{9x+7}{2} - x + \frac{x-2}{7} = 3$
$\Leftrightarrow \frac{7(9x+7)-14x+2(x-2)}{14} = \frac{14\times3}{14}$
$\Leftrightarrow 63x + 49 - 14x + 2x - 4 = 42$
$\Leftrightarrow 63x - 14x + 2x = 42 - 49 + 4$
$\Leftrightarrow (63 - 14 + 2)x = -3$
$\Leftrightarrow 51x = -3$
$\Leftrightarrow x = {}^{-3}/_{51}$
$S = \left\{{}^{-3}/_{51}\right\}$

e) $\frac{2x-1}{3} = x - \frac{1-x}{2}$
$\Leftrightarrow \frac{2(2x-1)}{6} = \frac{6x-3(1-x)}{6}$
$\Leftrightarrow 4x - 2 = 6x - 3 + 3x$
$\Leftrightarrow 4x - 6x - 3x = -3 + 2$
$\Leftrightarrow (4 - 6 - 3)x = -1$
$\Leftrightarrow -5x = -1$
$\Leftrightarrow x = {}^{1}/_{5}$
$S = \left\{{}^{1}/_{5}\right\}$

EXERCICE 4

Soient les équations :

a) $(2m - 3)(x - 2) = (3x - 4)(2m - 3)$
b) $m(x - 1) - (m + 1)(x + 6) = 10(x + 5)$

Déterminer la valeur de m pour que les équations a) et b) aient respectivement pour solutions -3 et $\frac{1}{2}$

Résolution

a) Commençons par résoudre l'équation

$(2m-3)(x-2) = (3x-4)(2m-3)$

$\Leftrightarrow 2mx - 4m - 3x + 6 = 6mx - 9x - 8m + 12$

$\Leftrightarrow 2mx - 3x - 6mx + 9x = -8m + 12 + 4m - 6$

$\Leftrightarrow (2m - 3 - 6m + 9)x = 6 - 4m$

$\Leftrightarrow (6-4m)x = 6 - 4m$

$\Leftrightarrow x = \frac{6-4m}{6-4m}$

Or il faut que $x = -3$

$\frac{6-4m}{6-4m} = -3$

$\Leftrightarrow -3(6-4m) = 6 - 4m$

$\Leftrightarrow -18 + 12m = 6 - 4m$

$\Leftrightarrow 12m + 4m = 6 + 18$

$\Leftrightarrow 16m = 24$

$\Leftrightarrow m = {}^{24}/_{16}$

$\Leftrightarrow m = {}^{3}/_{2}$

En remplaçant m par ${}^{3}/_{2}$ dans l'équation, cette dernière devient indéterminée, c'est-à-dire $S = \mathbb{R}\ et - 3\ \in \mathbb{R}$.

Donc m doit être égal à ${}^{3}/_{2}$ pour que cette équation aie -3 comme une solution (pas l'unique).

b) $m(x-1) - (m+1)(x+6) = 10(x+5)$

$\Leftrightarrow mx - m - (mx + 6m + x + 6) = 10x + 50$

$\Leftrightarrow mx - m - mx - 6m - x - 6 = 10x + 50$

$\Leftrightarrow mx - mx - x - 10x = 50 + m + 6m + 6$

$\Leftrightarrow (m - m - 1 - 10)x = 7m + 56$

$\Leftrightarrow -11x = 7m + 56$

$\Leftrightarrow x = -\frac{7m+56}{11}$ (1)

$or\ x = \frac{1}{2}$ (2)

(2) = (1)

$\frac{-(7m+56)}{11} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{-2(7m+56)}{22} = \frac{11}{22}$

$\Leftrightarrow -14m - 112 = 11$

$\Leftrightarrow -14m = 11 + 112$

$\Leftrightarrow -14m = 123$

$\Leftrightarrow m = {}^{-123}/_{14}$

EXERCICE 5

Soient l'équation :

$(2m - 3)(x - 2) = (3x - 4) + 2m$

Déterminer la valeur de m pour que cette équation ait pour solution -1

Résolution

$(2m - 3)(x - 2) = (3x - 4) + 2m$

$\Leftrightarrow 2mx - 4m - 3x + 6 = 3x - 4 + 2m$

$\Leftrightarrow 2mx - 3x - 3x = -4 + 2m + 4m - 6$

$\Leftrightarrow (2m - 3 - 3)x = 6m - 10$

$\Leftrightarrow (2m - 6)x = 6m - 10$

$\Leftrightarrow x = \frac{6m-10}{2m-6} \qquad (1)$

$or\ x = -1 \qquad (2)$

(2) = (1)

$\frac{6m-10}{2m-6} = -1$

$\Leftrightarrow 6m - 10 = -1(2m - 6)$

$\Leftrightarrow 6m - 10 = -2m + 6$

$\Leftrightarrow 6m + 2m = 6 + 10$

$\Leftrightarrow 8m = 16$

$\Leftrightarrow m = {}^{16}/_{8}$

$\Leftrightarrow m = 2$

EXERCICE 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(x-4)^2+(4-x)(1-2x)=0$
b) $x(x-1)(x-2)-3x(x-1)(3-2x)=0$
c) $(4x-3)(x+2)=(4+2x)(1-x)+5x(2+x)$
d) $(x-1)+(x-1)^2=0$

Résolution

a) $(x-4)^2+(4-x)(1-2x)=0$
$\Leftrightarrow (x-4)(x-4)+(4-x)(1-2x)=0$
$\Leftrightarrow -(4-x)(x-4)+(4-x)(1-2x)=0$
$\Leftrightarrow (4-x)[-(x-4)+(1-2x)]$
$\Leftrightarrow (4-x)(-x+4+1-2x)=0$
$\Leftrightarrow (4-x)(-3x+5)=0$
$\Leftrightarrow 4-x=0 \quad ou-3x+5=0$
$\Leftrightarrow x=4 \quad ou\; x={}^5/_3$
$S=\left\{{}^5/_3\,;4\right\}$

b) $x(x-1)(x-2)-3x(x-1)(3-2x)=0$

$\Leftrightarrow x(x-1)[(x-2)-3(3-2x)]=0$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2-9+6x)=0$

$\Leftrightarrow x(x-1)(7x-11)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \;\; ou\; x-1=0 \; ou\; 7x-11=0$

$\Leftrightarrow x=0 \quad ou\; x=1 \quad ou\; 7x=11$

$\Leftrightarrow x=0 \quad ou\; x=1 \quad ou\; x={}^{11}/_7$

$S=\{0;1;\,{}^{11}/_7\}$

c) $(4x-3)(x+2)=(4+2x)(1-x)+5x(2+x)$
$\Leftrightarrow (4x-3)(x+2)-(4+2x)(1-x)-5x(2+x)=0$
$\Leftrightarrow (4x-3)(2+x)-2(2+x)(1-x)-5x(2+x)=0$
$\Leftrightarrow (2+x)[(4x-3)-2(1-x)-5x]=0$
$\Leftrightarrow (2+x)(4x-3-2+2x-5x)=0$
$\Leftrightarrow (2+x)(x-5)=0$
$\Leftrightarrow 2+x=0 \;\; ou\; x-5=0$
$\Leftrightarrow x=-2 \quad ou\; x=5$
$S=\{-2;5\}$

d) $(x-1)+(x-1)^2=0$
$\Leftrightarrow (x-1)+(x-1)(x-1)=0$
$\Leftrightarrow (x-1)[1+(x-1)]=0$
$\Leftrightarrow (x-1)(1+x-1)=0$
$\Leftrightarrow (x-1)x=0$
$\Leftrightarrow x-1=0 \quad ou\; x=0$

$\Leftrightarrow x = 1 \quad ou\ x = 0$
$S = \{0; 1\}$

EXERCICE 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
b) $(x-5)^2 = x^2 - 10x$
c) $(4x+16) - (x+4)^2 = 4(2x+8)$

Résolution

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow (x^3 + 2x^2) - (x+2) = 0$
$\Leftrightarrow x^2(x+2) - (x+2) = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)[x^2 - 1]$
$\Leftrightarrow (x+2)(x+1)(x-1) = 0 \qquad car\ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
$\Leftrightarrow x+2 = 0\ \ ou\ x+1 = 0\ \ ou\ x-1 = 0$
$\Leftrightarrow x = -2 \quad ou\ x = -1 \quad ou\ x = 1$

b) $(x-5)^2 = x^2 - 10x$
$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x \qquad car\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = x^2 - 10x$
$\Leftrightarrow x^2 - 10x - x^2 + 10x = -25$
$\Leftrightarrow 0x = -25$

L'équation est impossible

$S = \emptyset$

$c)$ $(4x+16) - (x+4)^2 = 4(2x+8)$

$\Leftrightarrow (4x+16) - (x+4)^2 - 4(2x+8) = 0$
$\Leftrightarrow 4(x+4) - (x+4)(x+4) - 4 \times 2(x+4) = 0$
$\Leftrightarrow (x+4)[4 - (x+4) - 8] = 0$
$\Leftrightarrow (x+4)(4 - x - 4 - 8) = 0$
$\Leftrightarrow (x+4)(-x-8) = 0$
$\Leftrightarrow x+4 = 0 \quad ou - x - 8 = 0$
$\Leftrightarrow x = 4 \quad ou - x = 8$
$\Leftrightarrow x = 4\ ou\ x = -8$
$S = \{-8; 4\}$

EXERCICE 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{x+2}{x+1} = \frac{5x}{x+2} - 4$
b) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$

Résolution

a) $\frac{x+2}{x+1} = \frac{5x}{x+2} - 4$

Condition préalable : $x + 1 \neq 0 \; et \; x + 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -1 \; et \; x \neq -2$

$\frac{x+2}{x+1} = \frac{5x}{x+2} - 4$

$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x+1)5x-4(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x + 2) = (x + 1)5x - 4(x + 1)(x + 2)$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x + 2) - 5x(x + 1) + 4(x + 1)(x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2x + 4 - 5x^2 - 5x + 4(x^2 + 2x + x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2x + 4 - 5x^2 - 5x + 4x^2 + 8x + 4x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 5x^2 + 4x^2) + (2x + 2x - 5x + 4x + 8x) + 4 + 8 = 0$

$\Leftrightarrow 11x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow 11x = -12$

$\Leftrightarrow x = {}^{-12}/_{11}$

$S = \{{}^{-12}/_{11}\}$

b) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$

Condition préalable : $x - 1 \neq 0 \; et \; x + 1 \neq 0 \; et \; x^2 - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1 \; et \; x \neq -1$

Résolvons maintenant l'équation :

$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)+(x-1)}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}$

$\Leftrightarrow (x + 1) + (x - 1) = 2$

$\Leftrightarrow x + 1 + x - 1 = 2$

$\Leftrightarrow 2x = 2$

$\Leftrightarrow x = {}^{2}/_{2}$

$\Leftrightarrow x = 1$ À rejeter

$S = \emptyset$

EXERCICE 9

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a) $\frac{2}{1-x} - \frac{3}{1+x} = \frac{2+x}{1-x^2}$

b) $\frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$

c) $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 2$

Résolution

a) Condition préalable : $1 - x \neq 0 \; et \; 1 + x \neq 0 \; et \; 1 - x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1 \quad et \; x \neq -1$

$\frac{2}{1-x} - \frac{3}{1+x} = \frac{2+x}{1-x^2}$

$\Leftrightarrow \frac{2(1+x)-3(1-x)}{1-x^2} = \frac{2+x}{1-x^2}$

$\Leftrightarrow 2(1 + x) - 3(1 - x) = 2 + x$

$\Leftrightarrow 2 + 2x - 3 + 3x = 2 + x$

$\Leftrightarrow 2x + 3x - x = 2 - 2 + 3$

$\Leftrightarrow 4x = 3$

$\Leftrightarrow x = {}^{3}/_{4}$

$S = \{{}^{3}/_{4}\}$

b) Condition préalable : $x - 1 \neq 0 \;\; \Leftrightarrow x \neq 1$

$\frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-(x-1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 1 - 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad ou \; x = 1$ (à $rejeter$)

$S = \{1\}$

c) $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 2$

Condition préalable : $1+\frac{1}{x} \neq 0 \; et \; x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} \neq 0 \; et \; x \neq 0$

$\Leftrightarrow x+1 \neq 0 \; et \; x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -1 \; et \; x \neq 0$

Résolvons l'équation :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1}$$
$$\Leftrightarrow x = 2(x+1)$$
$$\Leftrightarrow x = 2x+2$$
$$\Leftrightarrow x-2x = 2$$
$$\Leftrightarrow -x = 2$$
$$\Leftrightarrow x = -2$$
$$S = \{-2\}$$

EXERCICE 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$

b) $\frac{3x^2-3x+1}{x^2-1} = 3 + \frac{2}{x+1} - \frac{5}{x-1}$

c) $\frac{1}{x-3} - \frac{x+4}{2x-6} = \frac{-1}{2}$

Résolution

a) Condition préalable : $x+2 \neq 0 \quad et \; x \neq 0 \quad et \; x^2+2x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -2 \; et \; x \neq 0 \; et \; x(x+2) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -2 \; et \; x \neq 0$

$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x(x+2)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x-2(x+2)}{x(x+2)} = \frac{x-4}{x(x+2)}$$
$$\Leftrightarrow 3x-2x-4 = x-4$$
$$\Leftrightarrow 3x-2x-x = -4+4$$
$$\Leftrightarrow 0x = 0$$

L'équation est indéterminée.

$S = \mathbb{R} - \{0;\ -2\}$

b) $\frac{3x^2-3x+1}{x^2-1} = 3 + \frac{2}{x+1} - \frac{5}{x-1}$

Condition préalable : $x^2 - 1 \neq 0\ et\ x + 1 \neq 0\quad et\ x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1\ et\ x \neq -1$

Résolvons l'équation :

$\frac{3x^2-3x+1}{x^2-1} = 3 + \frac{2}{x+1} - \frac{5}{x-1}$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2-3x+1}{x^2-1} = \frac{3(x^2-1)+2(x-1)-5(x+1)}{x^2-1}$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 1 = 3x^2 - 3 + 2x - 2 - 5x - 5$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x^2 - 3x - 2x + 5x = -2 - 5 - 1$

$\Leftrightarrow (3-3)x^2 + (-3-2+5)x = -8$

$\Leftrightarrow 0x = -8$

L'équation est impossible

$S = \emptyset$

c) $\frac{1}{x-3} - \frac{x+4}{2x-6} = \frac{-1}{2}$

Condition préalable : $x - 3 \neq 0\ et\ 2x - 6 \neq 0\ \Leftrightarrow x \neq 3\ et\ 2x \neq 6$

$\Leftrightarrow x \neq 3\ et\ x \neq {}^{6}/_{2}$

$\Leftrightarrow x \neq 3$

$\frac{1}{x-3} - \frac{x+4}{2x-6} = \frac{-1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x-3} - \frac{x+4}{2(x-3)} = \frac{-1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{2\times1-(x+4)}{2(x-3)} = \frac{-1(x-3)}{2(x-3)}$

$\Leftrightarrow 2 - x - 4 = -x + 3$

$\Leftrightarrow -x + x = 3 - 2 + 4$

$\Leftrightarrow 0x = 5$

L'équation est impossible

$S = \emptyset$

EXERCICE 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{2}{3x-1} - \frac{3x}{3x+1} = \frac{4}{9x^2-1} - 1$
b) $\frac{5}{3x-2} - \frac{6x}{3x+2} + 2 = \frac{10}{4-9x^2}$
c) $\frac{2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2+1} = \frac{4}{x^4-1}$

Résolution

a) Condition préalable : $3x - 1 \neq 0 \; et \; 3x + 1 \neq 0 \; et \; 9x^2 - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow 3x \neq 1 \; et \; 3x \neq -1$

$\Leftrightarrow x \neq {}^{1}/_{3} \; et \; x \neq {}^{-1}/_{3}$

$\frac{2}{3x-1} - \frac{3x}{3x+1} = \frac{4}{9x^2-1} - 1$
$\Leftrightarrow \frac{2(3x+1)-3x(3x-1)}{9x^2-1} = \frac{4-1(9x^2-1)}{9x^2-1}$
$\Leftrightarrow 6x + 2 - 9x^2 + 3x = 4 - 9x^2 + 1$
$\Leftrightarrow -9x^2 + 9x^2 + 6x + 3x = 4 + 1 - 2$
$\Leftrightarrow 9x = 1$
$\Leftrightarrow x = {}^{3}/_{9}$
$\Leftrightarrow x = \{{}^{1}/_{3}\}$
$S = \emptyset$

b) Condition préalable : $3x + 2 \neq 0 \; et \; 3x - 2 \neq 0 \; et \; 4 - 9x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow 3x \neq -2 \quad ou \; 3x \neq 2$

$\Leftrightarrow x \neq {}^{-2}/_{3} \; et \; x \neq {}^{2}/_{3}$

$\frac{5}{3x-2} - \frac{6x}{3x+2} + 2 = \frac{10}{4-9x^2}$
$\Leftrightarrow \frac{5}{3x-2} - \frac{6x}{3x+2} + 2 = \frac{10}{-(9x^2-4)}$
$\Leftrightarrow \frac{5(3x+2)-6x(3x-2)+2(9x^2-4)}{9x^2-4} = \frac{-10}{9x^2-4}$
$\Leftrightarrow 15x + 10 - 18x^2 + 12x + 18x^2 - 8 = -10$
$\Leftrightarrow -18x^2 + 18x^2 + 15x + 12x = -10 + 8 - 10$
$\Leftrightarrow 27x = -12$
$\Leftrightarrow x = {}^{-12}/_{27}$
$\Leftrightarrow x = {}^{-4}/_{9}$

c) $\frac{2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2+1} = \frac{4}{x^4-1}$

Condition préalable : $x^2 - 1 \neq 0 \;\; et \; x^2 + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1 \; et \; x \neq -1$

$\frac{2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2+1} = \frac{4}{x^4-1}$

$\Leftrightarrow \frac{2(x^2+1)-2(x^2-1)}{x^4-1} = \frac{4}{x^4-1}$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 - 2x^2 + 2 = 4$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x^2 = 4 - 2 - 2$

$\Leftrightarrow 0x = 0$

L'équation est indéterminée.

$S = \mathbb{R}$

EXERCICE 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $|2x - 1| = 5$
b) $|x - 1| = \frac{x-5}{3}$

Résolution

a) $|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } 2x - 1 \geq 0 \\ -(2x - 1) \text{si } 2x - 1 \leq 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } 2x \geq 1 \\ 1 - 2x \text{ si } 2x \leq 1 \end{cases}$

$= \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } x \geq {}^1/_2 \\ 1 - 2x \text{ si } x \leq {}^1/_2 \end{cases}$

x	$-\infty$	${}^1/_2$	$+\infty$
$\lvert 2x - 1\rvert$	$1 - 2x$		$2x - 1$
$\lvert 2x - 1\rvert = 5$	$1 - 2x = 5$		$2x - 1 = 5$

Dans $]-\infty;\ {}^1/_2]$: $1 - 2x = 5$

$\Leftrightarrow -2x = 5 - 1$

$\Leftrightarrow -2x = 4$

$\Leftrightarrow -x = {}^4/_2$

$\Leftrightarrow x = 2$ à rejeter car $2 \notin\ ]-\infty;\ {}^1/_2]$

$S_1 = \emptyset$

Dans $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right[$: $2x - 1 = 5$

$\Leftrightarrow 2x = 5 + 1$

$$\Leftrightarrow 2x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = {}^{6}/_{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

$S_2 = \{3\}$

$S = S_1 \cup S_2$

$S = \{3\}$

V. EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3 - 7x - (10 - x) = 2(x + 12) + 3x$

b) $6x - (3 - 7x) - 10(x + 1) = 3(x - 3) - 4$

c) $4x + 2 - (3x - 8) = 11 + x$

d) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{12} = 1 + 2(x + 1)$

e) $\frac{x+3}{3} - \frac{2x-1}{4} + 4x + 4 = \frac{3}{2} - 2(x + 2)$

EXERCICE 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3(x - 2) - (3x - 2) - 2(x + 1) = 4(2 - x) + 2x + 2$

b) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4} = 1$

c) $\frac{x+1}{5} - \frac{2x}{5} = \frac{1}{15} - \frac{7x}{3}$

d) $\frac{11-x}{84} + \frac{x-5}{4} + \frac{7}{3} = \frac{2x-1}{12}$

e) $\frac{x}{3} - \frac{2x-1}{6} + 2 = \frac{x+3}{2}$

f) $\frac{2x+2}{5} + \frac{2}{3} = 2(x - 1) + 4x$

EXERCICE 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{x+3}{4} - \frac{2x+5}{12} = \frac{x+1}{6} + 3(x+1)$

b) $\frac{x}{2} + \frac{2x+3}{12} - 2 - x = 2(x+1) - x$

c) $\frac{x}{2} + 11 - \frac{2x}{3} - 4 = \frac{x}{4} + 5 - \frac{5x}{24}$

d) $\frac{9x+7}{2} - \left(2x - \frac{x-2}{5}\right) = 2$

e) $\frac{2x-1}{3} = x - \frac{1-x}{2}$

EXERCICE 16

Soient les équations :

a) $(m-3)(x-1) + 2x = (3x-2)(2m-3)$

b) $m + 2(x-1) - (m+2)(x+6) = 10(x+1)$

Déterminer la valeur de m pour que les équations a) et b) aient respectivement pour solutions 0 et 1

EXERCICE 17

Soient l'équation :

$(2m-3)(x-2) = (3x-4) + 2m$

Déterminer la valeur de m pour que cette équation ait pour solution 1

EXERCICE 18

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(x-2)^2 + (2-x)(1-x) = 2x(2-x)$

b) $x(x-1)(x-2) - 3x(x-1)(3-2x) = x^2 - x$

c) $(4x-3)(x+1) = (2+2x)(1-x) + 5x(2+x)$

d) $(x+1) + x^2 = 1$

EXERCICE 19

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^3 + +2 + 2x^2 - x - 2 + 2x = 2(x+1)$

b) $(x-5)^2 = x^2 - 10x$

c) $(4x+16) - (x+4)^2 = 4(2x+8)$

EXERCICE 20

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{x+2}{x+1} - 2x = \frac{5x}{x+2} - 2x$

b $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}$

c) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{1}{1-x^2}$

EXERCICE 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1+x} = \frac{x-1}{1-x^2}$

b) $\frac{x^2}{x-1} - 1 + 2x = \frac{1}{x-1} + 2x$

c) $\frac{1}{1+\frac{2}{2x}} = 3$

EXERCICE 22

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{2}{x+2} - \frac{3}{x} = \frac{x-2}{x^2+2x}$

b) $\frac{3x^2-3x+1}{x^2-1} = 3 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

c) $\frac{1}{x-3} - \frac{x+4}{2x-6} = \frac{-1}{2}$

d) $\frac{2}{x-3} - \frac{x+4}{4x-12} = \frac{-3}{4}$

EXERCICE 23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{2}{3x-1} - \frac{2x}{3x+1} = \frac{2}{1-9x^2} - 1$

b) $\frac{2}{3x-2} - \frac{6x}{3x+2} + 2 = \frac{10}{9x^2-4}$

c) $\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{2}{x^4-1}$

EXERCICE 24

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $|x-1| = 3$

b) $|x-2| = \frac{x-5}{3}$

EXERCICE 25

a) $|x+2| + |x-1| - 3 = 0$

b) $|x-1| - \frac{1}{3}x = 2$

c) $\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = 3$

d) $|x+3| + |2x-1| - 3 = 2|x+1|$

e) $\frac{|x+1|}{3} + \frac{|x+4|}{5} = \frac{|x|}{15}$