

Aimé DIUMI DIKOLO

Cours et exercices pour la préparation du

---

# CONCOURS D'ADMISSION

## EN MATH., STAT ET INFO



Groupe Les Erudits  
6e Edition/ Octobre 2024

Aimé DIUMI DIKOLO

*Cours et exercices pour la préparation du*

# CONCOURS D'ADMISSION EN MATH-STAT.-INFO

Format MIN

Groupe Les Erudits

Wissen corporation

**6<sup>e</sup> édition/Septembre 2024**



# Groupe Les Erudits

*L'amour de la connaissance et de la réussite nous rassemble ici, agissons  
en conséquence. . . .*

Connectez-vous à votre espace membre pour retrouver les batts,  
batts résolus, tps et des cours en vidéos.

[www.wissen-corp.com](http://www.wissen-corp.com)

## DEDICACE

---

A :

Maman Daudine DIONYO

André KONGA DIKOLO

Julie APAMI DIKOLO

Chadrack SHAKO DIKOLO

Pauline TSHULU DIKOLO

Joël YOMBOLA DIKOLO

Thérèse OTAKOTSHA DIKOLO

Jérémie OMELONGA DIKOLO

Moïse ALOMBA DIKOLO

Albertine MBOHELAKA DIKOLO

Mardochée MUKANGA DIKOLO

Junior OMELONGA ALOMBA

Joseph OSONGO OMELONGA

Bony WOLAWATO

*Les érudits*

## REMERCIEMENTS

---

Sincères remerciements à

Tous les Erudits et alliés

Hermans IMBALEVA

Kevin MAYOMBO

Jonas KATEMBO KATEMBO

Issa BIKWELO KANZA

Marcus KABEYA MBIYE

Andy BINAKI KUETUENDA

Cephée MBAYA MUTOMBO

Moïse ILUNGA KAMUANGU

Adéo KWEKWE MABRUKI

Lauclass EKUMU NYANGANZE

Jossy ILANGA BOWAKA

Emmanuel DALO DONDO

Esther MBIYA MUADI

Jemima MATAYI SELESI

John HESHIMA BARAHA

Russell MPENEMOKE KANKU

Aaron MABELE DONGO

Jérémie OMELONGA DIKOLO

Moïse ALOMBA DIKOLO

# AVANT PROPOS

---

## Wissen Corporation

C'est une startup qui propose des solutions informatiques ainsi que des formations de qualité et approfondies en Informatique. Wissen corporation a changé de statut depuis le 26 Juillet 2023.

Nous agissons dans les domaines du développement informatique (création des sites et applications web, logiciels et applications mobiles), l'infographie (conception des banderoles, affiches, panneaux publicitaires, badges, ...) et d'audit informatique. Nous sommes disposés à vous proposer des solutions informatiques selon vos besoins.

Nos formations sont organisées par session ou par demande. Elles peuvent être publiques et privées. Nos formations portent sur plusieurs domaines de l'informatique, notamment l'informatique de base (prise en main de l'ordinateur, installation des systèmes d'exploitation, partitionnement des disques, les astuces essentielles en informatique, etc.), la bureautique (Word, Excel, PowerPoint, etc.), programmation (web, mobile et desktop), infographie, base de données, etc. Nous sommes bien disposés à partager notre connaissance et savoir-faire avec vous.

Il y a une naissance en toute connaissance, Thucydide a dit : « Avoir des connaissances sans les partager, c'est se mettre au niveau de celui qui n'a pas d'idées ». **Wissen Corporation** est là pour assurer votre formation, votre encadrement suivant vos désirs.

# INTRODUCTION

---

Le concours d'admission en L1 LMD Mathématiques, Statistique et Informatique de la faculté des Sciences et Technologies de l'université de Kinshasa concerne tout candidat quel que soit le pourcentage obtenu aux Examens d'Etat.

Le concours comprend huit cours : Analyse, Algèbre, géométrie, trigonométrie et calcul, français, Anglais, Physique – Mécanique et Physique Electricité. Il se déroule pendant deux jours, généralement samedi et dimanche.

Parfois, en arrivant pour la première fois à l'université, certains sont désorientés surtout quand ils tombent dans les mains des faibles ou des gens animés d'une mauvaise foi qui leur font croire qu'il faut des suivis et/ou recommandations pour réussir au concours.

Je serais un grand menteur si je vous disais qu'en MSI<sup>1</sup> (Mathématiques, Statistique et Informatique), il n'y a pas de recommandations, mais ce qui est vrai est que tout celui qui prépare sérieusement son concours réussit sans recommandation ni suivi.

C'est dans le but de vous aider à réussir au concours que j'ai rédigé ce livre. Vous y trouverez le résumé des matières concernées par le concours, 366 exercices résolus (ces exercices sont des questions des concours des années antérieures) ainsi que 180 exercices d'auto-évaluation pour votre entraînement et perfectionnement. Ne bloquez pas les résolutions mais comprenez la matière. Et surtout est **strictement interdit d'utiliser ce livre pendant le concours**.

L'œuvre humaine n'est jamais parfaite, je compte sur vos remarques, critiques et suggestions pour améliorer les versions futures.

Bonne lecture.

**Aimé DIUMI DIKOLO**

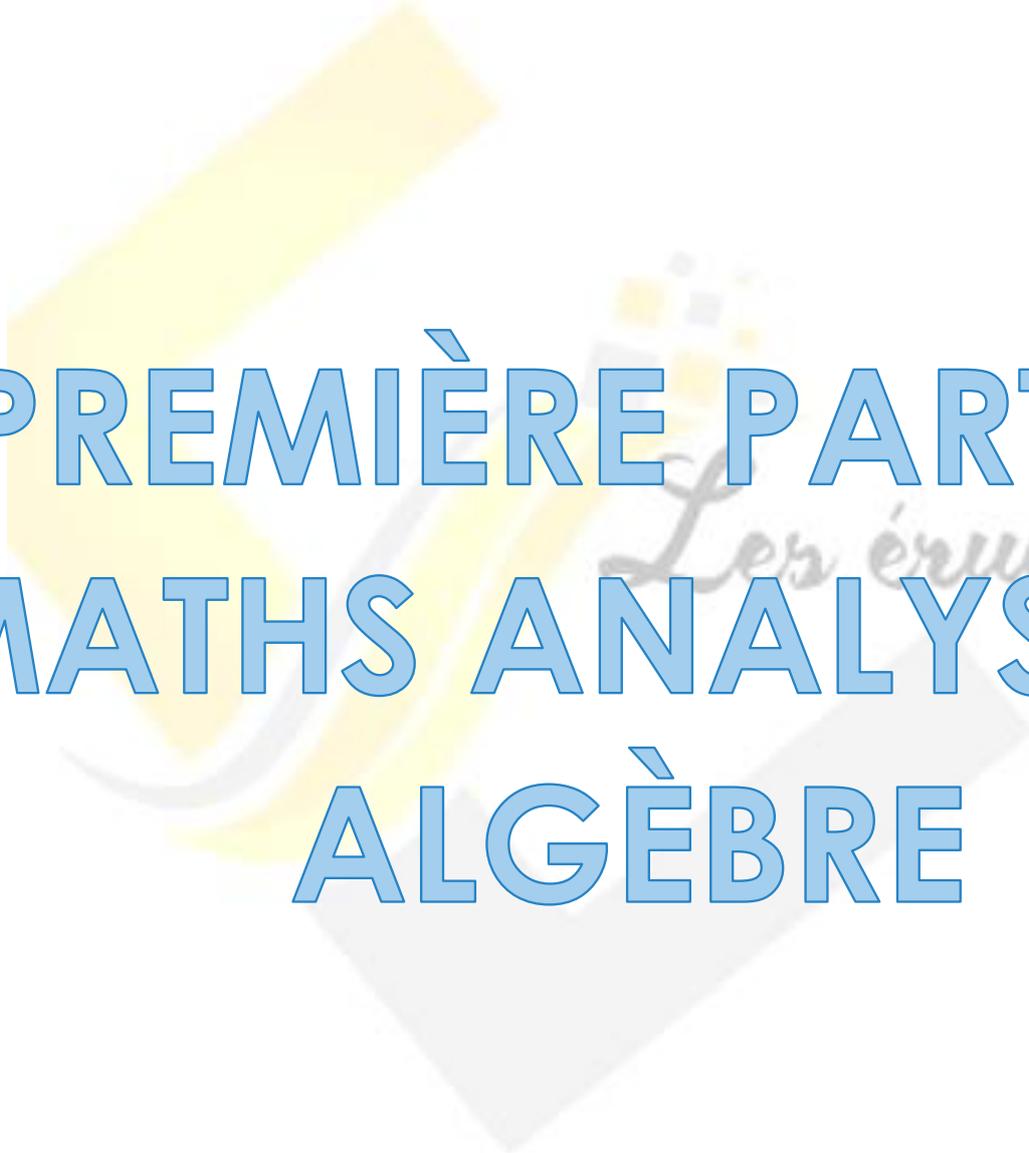
+243 81 083 46 16

[aimediumi2@gmail.com](mailto:aimediumi2@gmail.com)

[www.wissen-corp.com](http://www.wissen-corp.com)

---

<sup>1</sup> Le département de Mathématiques et Informatique (Math-Info) s'appelle maintenant Mathématiques, Statistique et Informatique (MSI)



# PREMIÈRE PARTIE : MATHS ANALYSE ET ALGÈBRE

# I. LES EQUATIONS ET INEQUATIONS

## I.1 Equation du premier degré à une inconnue

Une équation du premier degré a la forme  $ax + b = 0$ . Elle est appelée du premier degré parce que le degré supérieur de l'inconnue  $x$  est 1.

Exemple et contre-exemple :

$2x - 6 = 0$  et  $2x + 3 = 2x - 4$  sont des équations du premier degré

$2x^2 - 6x + 7 = 0$  n'est pas une équation du premier degré

### Marche à suivre pour résoudre une équation du premier degré

Pour résoudre une équation du premier degré, on procède de la manière suivante :

- On fait disparaître les dénominateurs et les parenthèses, puis on effectue les calculs indiqués.
- On transpose dans le premier membre les termes qui renferment l'inconnue et dans l'autre les termes connus (termes indépendants).
- On réduit les termes semblables et on met l'inconnue en facteur.
- On divise les deux termes par le coefficient de l'inconnue ; on trouve ainsi la solution cherchée.

### Exemple

Résoudre les équations

$$1) \frac{4x}{2} + 3 = 3x + \frac{2}{3}$$

$$\frac{4x}{2} + 3 = 3x + \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+6}{2} = \frac{9x+2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2(9x + 2) = 3(4x + 6)$$

$$\Leftrightarrow 18x + 4 = 12x + 18$$

$$\Leftrightarrow 18x - 12x = 18 - 4$$

$$\Leftrightarrow 6x = 14$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{14}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{7}{3} \right\}$$

$$2) 6(x + 5) = 25 + 3x$$

$$6(x + 5) = 25 + 3x \Leftrightarrow 6x + 30 = 25 + 3x$$

$$\Leftrightarrow 6x - 3x = 25 - 30$$

$$\Leftrightarrow 3x = -5$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

$$S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$$

$$3) \frac{3x+3}{2} = \frac{x-2}{3} \Leftrightarrow 3(3x+3) = 2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 9x + 9 = 2x - 4$$

$$\Leftrightarrow 9x - 2x = -4 - 9$$

$$\Leftrightarrow 7x = -13$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{13}{7}$$

$$S = \left\{-\frac{13}{7}\right\}$$

## I.2 Equation réductible au premier degré

### I.2.1 Equation produit $A \cdot B \cdot C = 0$

Soient A, B, C... les facteurs du premier degré, si nous développons le produit  $A \cdot B \cdot C \dots$  cela nous conduira à un cas supérieur à 1.

Pour éviter cela, nous pouvons recourir à la propriété suivante :

$$A \cdot B \cdot C \dots = 0 \Leftrightarrow (A = 0) \text{ ou } (B = 0) \text{ ou } (C = 0)$$

#### Exemples

$$1) (3x + 5)(2x - 2)(4x + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 5 = 0 \text{ ou } 2x - 2 = 0 \text{ ou } 4x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x = -5 \text{ ou } 2x = 2 \text{ ou } 4x = -8$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3} \text{ ou } x = \frac{2}{2} \text{ ou } x = -\frac{8}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3} \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -2$$

$$S = \left\{-2; -\frac{5}{3}; 1\right\}$$

$$2) (4x - 8)(12x + 48) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 8 = 0 \quad \text{ou} \quad 12x + 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = 8 \quad \text{ou} \quad 12x = -48$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-48}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -4$$

$$S = \{-4; 2\}$$

$$3) (x - 2)(3x - 12) = 0$$

$$(x - 2)(3x - 12) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad 3x = 12$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{12}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 4$$

$$S = \{2; 4\}$$

## I.2.2 Equations fractionnaires

Ce sont des équations dont un dénominateur au moins contient une inconnue.

### Résolution :

- On pose la condition préalable sur les dénominateurs
- On résout l'équation.
- On retient les valeurs de l'inconnue qui vérifient la condition préalable posée.

Exemple

Résoudre l'équation :

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x-5} = 0$$

Conditions préalables :  $x + 2 \neq 0$  et  $x - 5 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq -2 \quad \text{et} \quad x \neq 5$$

Cela signifie que parmi les solutions, on ne peut pas retenir 2 et 5. Si on les trouve parmi les solutions, on doit les rejeter.

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x-5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)+x+2}{(x+2)(x-5)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-15+x+2}{(x+2)(x-5)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 15 + x + 2 = (x + 2)(x - 5)0$$

$$\Leftrightarrow (3 + 1)x + (-15 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = 13$$

$$\Leftrightarrow x = 13/4$$

$$S = \{13/4\}$$

$$2) \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-1} = 0$$

Conditions préalables :  $x + 2 \neq 0$  et  $x - 1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq -2 \text{ et } x \neq 1$$

Cela signifie que la solution doit être différent de -2 et 1.

Résolvons maintenant l'équation :

$$\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-1)+3(x+2)}{(x+2)(x-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1) + 3(x + 2) = 0 \cdot (x + 2)(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 + 3x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3x = 2 - 6$$

$$\Leftrightarrow 5x = -4$$

$$\Leftrightarrow x = -4/5$$

$$S = \{-4/5\}$$

### 1.2.3 Equations contenant des valeurs absolues

Dans ce cas, nous allons appliquer la définition de la valeur absolue :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

#### Exemples

Résoudre les équations suivantes

$$1) |3x - 6| - 2 = 1$$

$$2) |2x + 3| - |x - 2| = 2$$

$$3) |2x - 1| + |3x - 2| + |x - 1| = 2$$

Solution

$$1) |3x - 6| - 2 = 1$$

$$|3x - 6| = \begin{cases} 3x - 6 & \text{si } 3x - 6 \geq 0 \\ -(3x - 6) & \text{si } 3x - 6 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x - 6 & \text{si } 3x \geq 6 \\ -3x + 6 & \text{si } 3x \leq 6 \end{cases} = \begin{cases} 3x - 6 & \text{si } x \geq 6/3 \\ 6 - 3x & \text{si } x \leq 6/3 \end{cases}$$

$$|3x - 6| = \begin{cases} 3x - 6 & \text{si } x \geq 2 \\ 6 - 3x & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$ 3x - 6 $	$6 - 3x$		$3x - 6$
$ 3x - 6  - 2 = 1$	$6 - 3x - 2 = 1$		$3x - 6 - 2 = 1$

Dans  $]-\infty ; 2]$

$$6 - 3x - 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow -3x = 1 - 6 + 2$$

$$\Leftrightarrow -3x = -3$$

$$\Leftrightarrow 3x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = 3/3$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Dans  $[2 ; +\infty[$

$$3x - 6 - 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x = 1 + 6 + 2$$

$$\Leftrightarrow 3x = 9$$

$$\Leftrightarrow x = 9/3$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

$$S = \{1 ; 3\}$$

$$2) |2x + 3| - |x - 2| = 2$$

$$\bullet |2x + 3| = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } 2x + 3 \geq 0 \\ -(2x + 3) & \text{si } 2x + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$|2x + 3| = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \geq -3/2 \\ -2x - 3 & \text{si } x \leq -3/2 \end{cases}$$

$$\bullet |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{si } x - 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-3/2$	2	$+\infty$
$ 2x + 3 $	$-2x - 3$			$2x + 3$
$ x - 2 $		$2 - x$		$x - 2$
$ 2x + 3  -  x - 2  = 2$	$-2x - 3 - (2 - x) = 2$		$2x + 3 - (2 - x) = 2$	$2x + 3 - (x - 2) = 2$

Dans  $]-\infty, -3/2]$

$$\begin{aligned}
-2x - 3 - (2 - x) &= 2 \\
\Leftrightarrow -2x - 3 - 2 + x &= 2 \\
\Leftrightarrow -2x + x &= 2 + 3 + 2 \\
\Leftrightarrow (-2 + 1)x &= 7 \\
\Leftrightarrow -x &= 7 \\
\Leftrightarrow x &= -7 \\
S_1 &= \{-7\}
\end{aligned}$$

Dans  $[-3/2, 2]$

$$\begin{aligned}
2x + 3 - (2 - x) &= 2 \\
\Leftrightarrow 2x + 3 - 2 + x &= 2 \\
\Leftrightarrow 2x + x &= 2 - 3 + 2 \\
\Leftrightarrow (2 + 1)x &= 1 \\
\Leftrightarrow 3x &= 1 \\
\Leftrightarrow x &= 1/3 \\
S_2 &= \{1/3\}
\end{aligned}$$

Dans  $[2, +\infty[$

$$\begin{aligned}
2x + 3 - (x - 2) &= 2 \\
\Leftrightarrow 2x + 3 - x + 2 &= 2 \\
\Leftrightarrow 2x - x &= 2 - 3 - 2 \\
\Leftrightarrow (2 - 1)x &= -3 \\
\Leftrightarrow x &= -3 \\
S_3 &= \{-3\}
\end{aligned}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$S = \{-7; -3; 1/3\}$$

3)  $|2x - 1| + |3x - 2| + |x - 1| = 2$

$$|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } 2x - 1 \geq 0 \\ 1 - 2x & \text{si } 2x - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow |2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \\ 1 - 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } 3x - 2 \geq 0 \\ 2 - 3x & \text{si } 3x - 2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow |3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \geq \frac{2}{3} \\ 2 - 3x & \text{si } x \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x - 1 \geq 0 \\ 1 - x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$1/2$	$2/3$	1	$+\infty$
$ 2x - 1 $	$1 - 2x$	$2x - 1$	$2x - 1$	$2x - 1$	$2x - 1$
$ 3x - 2 $	$2 - 3x$	$2 - 3x$	$3x - 2$	$3x - 2$	$3x - 2$
$ x - 1 $	$1 - x$	$1 - x$	$1 - x$	$x - 1$	$x - 1$
$ 2x - 1  +  3x - 2  +  x - 1  = 2$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	

Pour  $x \in ]-\infty; 1/2]$   $E_1 \equiv 1 - 2x + 2 - 3x + 1 - x = 2 \Leftrightarrow (-2 - 3 - 1) = 2 - 1 - 2 - 1$

$$\Leftrightarrow -6x = -2$$

$$\Leftrightarrow 6x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 2/6$$

$$\Leftrightarrow x = 1/3$$

$$S_1 = \{1/3\}$$

$$\text{Pour } x \in \left[ \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right] : E_2 \equiv 2x - 1 + 2 - 3x + 1 - x = 2 \Leftrightarrow 2x - 3x - x = 2 + 1 - 2 - 1$$

$$\Leftrightarrow -2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{0}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$S_2 = \{0\}$$

$$\text{Pour } x \in \left[ \frac{2}{3}; 1 \right] : E_3 \equiv 2x - 1 + 3x - 2 + 1 - x = 2 \Leftrightarrow 2x + 3x - x = 2 + 1 + 2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 4x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 4/4$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$S_3 = \{1\}$$

$$\text{Pour } x \in [1; +\infty[ : E_4 \equiv 2x - 1 + 3x - 2 + x - 1 = 2 \Leftrightarrow 2x + 3x + x = 2 + 1 + 2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 6x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = 6/6$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$S_4 = \{1\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \{1/3\} \cup \{0\} \cup \{1\} \cup \{1\}$$

$$S = \{0; 1/3; 1\}$$

## EXERCICE 1

Pour quelles valeurs de  $x$ , l'équation  $|2x - 5| = |3x + 2|$  est satisfaite ?

$$a) x = \frac{13}{5} \quad b) x \in \left[ \frac{13}{5}, +\infty[ \quad c) x \in \left\{ \frac{13}{5}, \frac{5}{13} \right\} \quad d) x \in \left] \frac{13}{5}, +\infty[ \quad e) ABR$$

(Concours 2023-2024/Analyse)

### Indication

$$S = \{-7; 3/5\}$$

## EXERCICE 2

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(3x + 2)(2x - 5) = 0$ .

a)  $x = \frac{3}{2}$  et 1    b)  $\frac{-2}{3}$  et  $\frac{5}{2}$     c) - 2 et 5    d) 3 et 2    e) - 0,6666 ... et 2,5

(Concours 2017-2018/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Analyse)

(Concours 2022-2023/Analyse)

### Indication

$$S = \left\{ -\frac{2}{3}; \frac{5}{2} \right\} \quad \text{ou } S = \{-0,6666 \dots; 2; 5\}$$

## I.3 Inéquations du premier degré à une inconnue

### I.3.1 Cas général

Formes générales :

$$ax + b \geq 0; \quad ax + b \leq 0; \quad ax + b > 0; \quad ax + b < 0$$

Pour résoudre cette inéquation, il convient de

- Ramener l'inéquation sous forme d'une équation pour trouver la racine

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

- Faire l'étude de signe

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe contraire de $a$	0	Signe de $a$

- Trouver l'ensemble solution qui confère à l'inéquation le signe exigé

Quand  $c$ 'est  $\geq 0$  ou  $> 0$ , on prend la partie positive et quand  $c$ 'est  $\leq 0$  ou  $< 0$ , on prend la partie négative.

### Exemple

Résoudre les inéquations suivantes :

1)  $4x + 3 \geq 6x - 3$

2)  $3x + 6 < 0$

Solution

$$1) 4x + 3 - 6x + 3 \geq 0$$

$$-2x + 6 \geq 0. \text{ Dans notre cas } a = -2$$

Ramenons l'inéquation sous forme d'équation et résolvons cette dernière

$$-2x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x = -6$$

$$\Leftrightarrow 2x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = 6/2$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

L'étude de signe donne

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$-2x + 6$	$+$	$0$	$-$

$$S = ]-\infty, 3]$$

$$2) 3x + 6 < 0$$

Dans notre cas,  $a = 3$

Ramenons l'inéquation sous forme d'équation et résolvons cette dernière

$$3x + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = -6$$

$$\Leftrightarrow x = -6/3$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

L'étude de signe donne

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$3x + 6$	$-$	$0$	$+$

$$S = ]-\infty; -2[$$

### 1.3.2 Inéquations contenant des valeurs absolues

Dans ce cas, on peut utiliser la définition de la valeur absolue ou les deux propriétés suivantes relatives à la valeur absolue :

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad (a \geq 0)$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$$

#### Exemple

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $|4x - 16| \geq 2$

2)  $|2x + 3| \leq 5$

3)  $\frac{7x-3}{3-|x+2|} \geq -2$

4)  $\frac{|x-3|}{x-|2x+2|} \leq -\frac{1}{2}$

Solution

1)  $|4x - 16| \geq 2$

$\Leftrightarrow 4x - 16 \leq -2 \quad \text{ou} \quad 4x - 16 \geq 2$

$4x - 16 \leq -2$

$4x - 16 + 2 \leq 0$

$4x - 14 \leq 0$

$4x - 14 = 0$

$4x = 14$

$x = \frac{14}{4}$

$x = \frac{7}{2}$

$x$	$-\infty$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$4x - 14$	-	0	+

$S_1 = ]-\infty ; \frac{7}{2}]$

$4x - 16 \geq 2$

$4x - 16 - 2 \geq 0$

$4x - 18 \geq 0$

$4x - 18 = 0$

$4x = 18$

$x = \frac{18}{4}$

$x = \frac{9}{2}$

$x$	$-\infty$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$
$4x - 18$	-	0	+

$S_2 = [\frac{9}{2} ; +\infty[$

$S = S_1 \cup S_2$

$S = ]-\infty ; \frac{7}{2}] \cup [\frac{9}{2} ; +\infty[$

2)  $|2x + 3| \leq 5$

$|2x + 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x + 3 \leq 5$

$\Leftrightarrow -5 - 3 \leq 2x \leq 5 - 3$

$\Leftrightarrow \frac{-8}{2} \leq x \leq \frac{2}{2}$

$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1$

$S = [-4, 1]$

$$3) \frac{7x-3}{3-|x+2|} \geq -2$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & \text{si } x+2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$$

$$\text{Pour } x \in [-2; +\infty[ : \frac{7x-3}{3-|x+2|} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{7x-3}{3-(x+2)} \geq -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-3}{3-x-2} \geq -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-3}{-x+1} \geq -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-3}{-x+1} + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-3+2(-x+1)}{-x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-3-2x+2}{-x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-1}{-x+1} \geq 0$$

$$5x - 1 = 0 \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$-x + 1 = 0 \Leftrightarrow -x = -1 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	1	$+\infty$		
5x - 1		-	0	+	+	
-x + 1		+	+	0	-	
$\frac{5x-1}{-x+1}$		-	0	+		-

$$S_1 = [-2; +\infty[ \cap \left[ \frac{1}{5}; 1 \right[ = \left[ \frac{1}{5}; 1 \right[$$

$$\text{Pour } x \in ]-\infty; -2] : \frac{7x-3}{3-|x+2|} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{7x-3}{3-(-x-2)} \geq -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-3}{3+x+2} + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-3}{x+5} + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-3+2(x+5)}{x+5} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-3+2x+10}{x+5} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x+7}{x+5} \geq 0$$

$$9x + 7 = 0 \Leftrightarrow 9x = -7 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{9}$$

$$x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

$x$	$-\infty$	$-5$	$-\frac{7}{9}$	$+\infty$
$9x + 7$	-	-	0	+
$x + 5$	-	0	+	+
$\frac{9x + 7}{x + 5}$	+		0	+

$$S_2 = ]-\infty; -2] \cap (]-\infty; -5[ \cup [-\frac{7}{9}; +\infty[) = ]-\infty; -5[$$

$$S = S_1 \cup S_2 = [1/5; 1[ \cup ]-\infty; -5[$$

$$S = ]-\infty; -5[ \cup [1/5; 1[$$

$$4) \frac{|x-3|}{x-|2x+2|} \leq -\frac{1}{2}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{si } x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 3 \\ 3-x & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$|2x+2| = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } 2x+2 \geq 0 \\ -2x-2 & \text{si } 2x+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |2x+2| = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x \geq -1 \\ -2x-2 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$
$ x-3 $	$3-x$	$3-x$	$x-3$	
$ 2x+2 $	$-2x-2$	$2x+2$	$2x+2$	
$\frac{ x-3 }{x- 2x+2 } \leq -\frac{1}{2}$	$\frac{3-x}{x-(-2x-2)} \leq -\frac{1}{2}$	$\frac{3-x}{x-(2x+2)} \leq -\frac{1}{2}$	$\frac{x-3}{x-(2x+2)} \leq -\frac{1}{2}$	

$$\text{Pour } x \in ]-\infty; -1]: \frac{|x-3|}{x-|2x+2|} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-(-2x-2)} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x}{x+2x+2} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x}{3x+2} + \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(3-x)+3x+2}{2(3x+2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-2x+3x+2}{6x+4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+8}{6x+4} \leq 0$$

$$x+8=0 \Leftrightarrow x=-8$$

$$6x+4=0 \Leftrightarrow 6x=-4 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{6} \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$$

$x$	$-\infty$	$-8$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$x+8$		$-$	$0$	$+$
$6x+4$		$-$	$0$	$+$
$\frac{x+8}{6x+4}$		$+$	$0$	$-$

$$S_1 = ]-\infty; -1] \cap [-8; -\frac{2}{3}[ = [-8; -1]$$

$$\text{Pour } x \in [-1; 3]: \frac{3-x}{x-(2x+2)} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-2x-2} + \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x}{-x-2} + \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(3-x)-x-2}{2(-x-2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-2x-x-2}{-2x-4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x+4}{-2x-4} \leq 0$$

$$-3x+4=0 \Leftrightarrow -3x=-4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3} \quad -2x-4=0 \Leftrightarrow -2x=4 \Leftrightarrow x=-2$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$-3x+4$		$+$	$+$	$0$
$-2x-4$		$+$	$0$	$-$
$\frac{-3x+4}{-2x-4}$		$+$	$  $	$-$

$$S_2 = [-1; 3] \cap ]-2; \frac{4}{3}[ = [-1; \frac{4}{3}[$$

$$\text{Pour } x \in [3; +\infty[ : \frac{x-3}{x-(2x+2)} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2x-2} + \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{-x-2} + \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-3)-x-2}{2(-x-2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-6-x-2}{-2x-4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-8}{-2x-4} \leq 0$$

$$x-8=0 \Leftrightarrow x=8 \quad -2x-4=0 \Leftrightarrow -2x=4 \Leftrightarrow x=-2$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$8$	$+\infty$
$x - 8$		-	0	+
$-2x - 4$		+	0	-
$\frac{x - 8}{-2x - 4}$		-		+

$$S_3 = [3; +\infty[ \cap ( ]-\infty; -2[ \cup [8; +\infty[ ) = [8; +\infty[$$

$$S = [-8; -1] \cup [-1; \frac{4}{3}] \cup [8; +\infty[$$

$$S = [-8; \frac{4}{3}] \cup [8; +\infty[$$

## I.4 Inéquations réductibles au premier degré

### I.4.1 Inéquations quotients $\frac{A}{B} \leq 0$

Etudier les zéros et les signes du quotient et écrire l'ensemble des solutions en se référant au signe de l'inéquation.

Exemple :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\frac{4x-3}{x+1} \leq 3$

**Solution :**

$$\frac{4x-3}{x+1} - 3 \leq 0$$

$$\frac{4x - 3 - 3(x + 1)}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{4x - 3 - 3x - 3}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{x - 6}{x + 1} \leq 0$$

$$\text{Soit } f(x) = \frac{x-6}{x+1}$$

$$x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$6$	$+\infty$
$x - 6$		-	0	+
$x + 1$		-	0	+
$\frac{x - 6}{x + 1}$		+		-

$$S = ]-1, 6]$$

### I.4.2 Inéquations produits $A \cdot B \lesseqgtr 0$

Etudier les zéros et les signes du produit et écrire l'ensemble des solutions en se référant au signe de l'inéquation.

Exemple : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation les équations suivantes

$$1) (2x - 3)(1 - 3x) < 0$$

$$2) \frac{(2x-4)(2x+1)}{(4x-16)} \geq 0$$

#### Résolution

$$1)(2x - 3)(1 - 3x)$$

$$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$2x - 3$	-	-	0	+	
$1 - 3x$	+	0	-	-	
$(2x - 3)(1 - 3x)$	-	0	+	0	-

$$S = ]-\infty, \frac{1}{3}[ \cup ]\frac{3}{2}, +\infty[$$

$$2) \frac{(2x-4)(2x+1)}{(4x-16)} \geq 0$$

$$2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$4x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = 16$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{16}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	4	$+\infty$		
$2x - 4$	-	-	0	+	+		
$2x + 1$	-	0	+	+	+		
$(2x - 4)(2x + 1)$	+	0	-	0	+	+	
$4x - 16$	-	-	-	0	+		
$\frac{(2x - 4)(2x + 1)}{(4x - 16)}$	-	0	+	0	-		+

$$S = \left[-\frac{1}{2}; 2\right] \cup ]4; +\infty[$$

## I.5 Equation du second degré dans $\mathbb{R}$

Forme générale :  $ax^2 + bx + c = 0$

Elle est appelée équation du second degré parce que le degré supérieur de la variable  $x$  est 2.

A noter que **a** représente le coefficient de  $x^2$ , c'est à dire a est le nombre qui est devant  $x^2$  qu'il soit au milieu, au début ou à la fin. Et **b** représente le coefficient de  $x$  (la valeur numérique qui est devant  $x$ ) et  $c$  est le terme indépendant.

On calcule le discriminant ou réalisant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Trois cas sont possible pour  $\Delta$

- Si  $\Delta > 0$ , alors on a deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si  $\Delta = 0$ , alors on a une racine double donnée par  $x = -b/2a$
- Si  $\Delta < 0$ , dans ce cas, il n'y a pas de racines réelles.  $S = \emptyset$

**Exemple :**

Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{R}$

$$1) x^2 - 7x + 12 = 0 \quad 2) x^2 - 2x + 1 = 0 \quad 3) -x^2 - 2x - 9 = 0$$

**Solution**

$$1) x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -7 \quad c = 12$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-7)^2 - 4(1)(12)$$

$$= 49 - 48$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{1}}{2(1)}$$

$$x_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{1}}{2(1)}$$

$$= \frac{7-1}{2}$$

$$= \frac{6}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$= \frac{7+1}{2}$$

$$= \frac{8}{2}$$

$$x_2 = 4$$

$$S = \{3; 4\}$$

$$2) x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4(1)(1)$$

$$= 4 - 4$$

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-(-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$S = \{1\}$$

$$3) -x^2 - 2x - 9 = 0$$

$$a = -1 \quad b = -2 \quad c = -9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4(-1)(-9)$$

$$= 4 - 36$$

$$\Delta = -32$$

Pas de racines réelles

$$S = \emptyset$$

### EXERCICE 3

On désigne par  $S_1$  et  $S_2$  les racines de l'équation du second degré

$s^2 - 11s + 30 = 0$ . Les quantités  $q = (s_1)^2 - (s_2)^2$  et  $p = (s_1)^2 + (s_2)^2$  sont données respectivement par :

a) - 11 et 41    b) 49 et 39    c) 25 et 36    d) - 22 et 36    e) Pas de bonne réponse.

(Concours 2012-2013/ Algèbre)

(Concours 2022-2023/ Algèbre)

### Indication

Il faut d'abord résoudre l'équation pour trouver  $s_1$  et  $s_2$

$$q = -11 \text{ et } p = 61$$

### EXERCICE 4

On désigne par  $x_1$  et  $x_2$  les racines de l'équation du second degré  $x^2 + 5x + 10 = 0$ . Les quantités  $q = (x_1)^2 + (x_2)^2$  et  $p = (x_1)^3 + (x_2)^3$  sont données par :

a) 0 et -1    b) -11 et 17    c) 5 et 25    d) pas de bonne réponse.

(Concours 2014-2015/ Algèbre)

### Indication

Il faut d'abord résoudre l'équation pour trouver  $x_1$  et  $x_2$

Pas de racines réelles. Donc  $x_1$  et  $x_2$  n'existent pas et donc pas moyen de calculer les quantités p et q.

### EXERCICE 5

On désigne par  $x_1$  et  $x_2$  les racines de l'équation du second degré  $x^2 - 2x + 3 = 0$ .

La quantité  $\frac{1}{(x_1)^2} + \frac{1}{(x_2)^2}$  est donnée par :

a)  $\frac{10}{9}$     b)  $\frac{-10}{9}$     c)  $\frac{9}{10}$     d)  $\frac{-9}{10}$     e) ABR

(Concours 2017-2018/ Algèbre)

### EXERCICE 6

On considère l'équation du second degré  $2x^2 + 4x + 9 = 0$ . Et on note  $x_1$  et  $x_2$  les racines de cette équation. Les quantités  $S = x_1 + x_2$  et  $L = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  sont données par :

a) -2 et  $\frac{4}{9}$     b) 2 et  $-\frac{4}{9}$     c) -2 et  $-\frac{4}{9}$     d) 2 et  $\frac{4}{9}$     e) Pas de bonne réponse

(Concours 2018-2019/Algèbre)

## EXERCICE 7

On désigne par  $x_1$  et  $x_2$  les racines de l'équation du second degré  $x^2 + x + 6 = 0$ . Les quantités  $q = (x_1)^2 + (x_2)^2$  et  $p = (x_1)^3 + (x_2)^3$  sont données respectivement par :

a) 0 et -1   b) -11 et 17   c) 10 et -10   d) Pas de bonne réponse

(Concours 2011-2012/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Algèbre)

## EXERCICE 8

On désigne par X et Y les racines de l'équation  $x^2 + 3x + 6 = 0$ . Les quantités  $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$  et  $X^2 + Y^2$  valent respectivement :

a) 12 et 45   b) 100 et 49   c) 81 et 500   d)  $\frac{-1}{2}$  et -3

(Concours 2013-2014/Algèbre)

## 1.6 Inéquation du second degré

Formes générales

$ax^2 + bx + c \geq 0$ ,  $ax^2 + bx + c \leq 0$ ,  $ax^2 + bx + c$  et  $ax^2 + bx + c < 0$

### Procédure de la résolution

- Ramener l'inéquation sous forme d'une équation pour trouver les racines associées :  $ax^2 + bx + c = 0$
- Faire l'étude de signe  
Etant donné que  $\Delta$  est un réel, il peut être soit nul, soit positif ou négatif.

Premier cas : Si  $\Delta > 0$  (Positif)

x	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe contraire de a	0	Signe de a

Deuxième cas : Si  $\Delta = 0$

$x$	$-\infty$	$x$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de $a$		0
			signe de $a$

Troisième cas : Si  $\Delta < 0$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de $a$	

- Trouver l'ensemble solution qui confère à l'inéquation le signe exigé

### Exemple

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes

1)  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$       2)  $-x^2 - 6x - 9 \geq 0$       3)  $x^2 - 2x + 9 \geq 0$

Résolution

1)  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

On ramène ça sous forme d'équation pour trouver les racines associées

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$$

$$= 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$x$	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	0
				+

$$S = ]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$$

2)  $-x^2 - 6x - 9 \geq 0$

$$a = -1 \quad b = -6 \quad c = -9$$

Ramenons ça sous forme d'équation pour trouver les racines associées

$$-x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4(-1)(-9) \\ &= 36 - 36\end{aligned}$$

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-(-6)}{2(-1)} = \frac{6}{-2} = -3$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$+\infty$
$-x^2 - 6x - 9$	$-$	$0$	$-$

$$S = \{0\}$$

$$3) x^2 - 2x + 9 \geq 0$$

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 9$$

Ramenons ça sous forme d'équation pour trouver les racines associées

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-2)^2 - 4(1)(9) \\ &= 4 - 36\end{aligned}$$

$$\Delta = -32$$

Pas de racines réelles

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 - 2x + 9$	$+$	$+$

$$S = ]-\infty; +\infty[$$

## EXERCICE 9

L'inéquation  $8x^2 + 10x - 3 > 0$  a pour solution :

$$a) ]-\infty; \frac{3}{4}[ \cup ]\frac{1}{4}; +\infty[ \quad b) ]-\infty; \frac{3}{4}[ \cup ]\frac{1}{4}; +\infty[ \quad c) ]\frac{-3}{4}; \frac{1}{4}[ \quad d) ABR$$

(Concours 2017-2018/ Algèbre)

### Indication

$$S = ]-\infty; \frac{-3}{2}[ \cup ]\frac{1}{4}; +\infty[$$

## I.7 Equations irrationnelles simples

Une équation irrationnelle simple est celle qui renferme l'inconnue sous un ou plusieurs radicaux d'indice deux.

### Résolution :

- On élimine les signes radicaux par une ou plusieurs élévations au carré de deux membres de l'équation.
- On résout l'équation rationnelle obtenue.
- On rejette les solutions étrangères par l'une de deux méthodes suivantes :
  - Soit on porte dans l'équation donnée les valeurs trouvées et on élimine celles qui ne vérifient pas
  - Soit on pose les conditions que doit remplir l'inconnue à chaque étape transformation

### Exemple

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$1) \sqrt{5x - 25} - \sqrt{x + 1} = 0$$

$$2) \sqrt{x} + 6 = x$$

Résolution

$$1) \sqrt{5x - 25} - \sqrt{x + 1} = 0$$

Si nous élevons directement au carré, après transformation on aura encore le signe radical, dans ce cas, pour éviter beaucoup de transformation, isolons chaque radical et élevons les deux membres au carré.

$$(\sqrt{5x - 25})^2 = (\sqrt{x + 1})^2$$

$$\Leftrightarrow 5x - 25 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow 5x - 25 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5 - 1)x = 1 + 25$$

$$\Leftrightarrow 4x = 26$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{26}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13}{2}$$

Remplaçons la valeur ainsi trouvée dans l'équation pour voir si ça vérifie :

$$\sqrt{5x - 25} - \sqrt{x + 1} = 0$$

$$\sqrt{5\left(\frac{13}{2}\right) - 25} - \sqrt{\frac{13}{2} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{65}{2} - 25} - \sqrt{\frac{13+2}{2}} = 0$$

$$\sqrt{\frac{65-50}{2}} - \sqrt{\frac{15}{2}} = 0$$

$$\sqrt{\frac{15}{2}} - \sqrt{\frac{15}{2}} = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{Vrai}$$

$$\text{Donc } S = \left\{ \frac{13}{2} \right\}$$

$$2) \sqrt{x} + 6 = x$$

$$\text{C.P. : } x \geq 0$$

$$\sqrt{x} + 6 = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 6$$

Élevons les deux membres au carré

$$(\sqrt{x})^2 = (x - 6)^2$$

$$x = x^2 - 2(x)(6) + 6^2$$

$$\text{car } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$x = x^2 - 12x + 36$$

$$x - x^2 + 12x - 36 = 0$$

$$-x^2 + 13x - 36 = 0$$

$$a = -1 \quad b = 13 \quad c = -36$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (13)^2 - 4(-1)(-36)$$

$$= 169 - 144$$

$$\Delta = 25$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-13 + \sqrt{25}}{2(-1)} = \frac{-13 + 5}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4 \\ x_2 = \frac{-13 - \sqrt{25}}{2(-1)} = \frac{-13 - 5}{-2} = \frac{-18}{-2} = 9 \end{cases}$$

Remplaçons les valeurs trouvées dans l'équation pour voir si elles vérifient

$$\sqrt{x} - 6 = x$$

Pour  $x = 4$

$$\sqrt{4} + 6 = 4$$

$$2 + 6 = 4$$

$$8 = 4 \quad \text{Faux}$$

Pour  $x = 9$

$$\sqrt{9} + 6 = 9$$

$$3 + 6 = 9$$

$$9 = 9 \quad \text{Vrai}$$

Donc  $S = \{9\}$

### EXERCICE 10

Soit la fonction  $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{4x+9} + \sqrt{3x-8}$

L'équation  $f(x) = 0$  a pour solution

- a. 0    b. -3    c.  $-\frac{6}{7}$     d. Pas de bonne réponse

(Concours 2014-2015/Algèbre)

#### Indication

$$S = \{4\}$$

### EXERCICE 11

Soit la fonction  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-16}{x^2}}$

L'équation  $f(x) = 0$  a pour solutions :

- a) 1 et -1    b) -4 et 2    c) -4 et 4    d) Pas de bonne réponse

(Concours 2012-2013/Algèbre)

#### Indication

$$S = \{-4; 4\}$$

### EXERCICE 12

Soit la fonction  $f(x) = \sqrt{2x+3} - \sqrt{4x+4} + \sqrt{3x-8}$

L'équation  $f(x) = 0$  a pour solution

- a. 0    b. -3    c.  $-\frac{6}{7}$     d. Pas de bonne réponse

(Concours 2014-2015/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Algèbre)

**Indication**

$$S = \{3\}$$

### EXERCICE 13

Soit la fonction  $f(x) = -2\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-8} + \sqrt{3+2x}$

L'équation  $f(x) = 0$  a pour solution

- a. 0   b. 2   c.  $\frac{6}{7}$    d. 3   e. Pas de bonne réponse

(Concours 2013-2014/Algèbre)

**Indication**

$$S = \{3\}$$

### EXERCICE 14

L'équation  $\sqrt{-8+3x} - 2\sqrt{1+x} + \sqrt{2x+3} = 0$  a pour solution :

- a) -3   b) -5   c) 5   d) 3   e) pas de bonne réponse

(Concours 2020-2021/Algèbre)

**Indication**

$$S = \{3\}$$

## I.8 Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

Forme générale :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Il existe généralement quatre méthodes pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

Pour illustrer ces quatre méthodes, prenons l'exemple suivant :

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

### I.8.1 Méthode de substitution

$$\begin{cases} x + y = 6 & (1) \\ x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

Tirer la valeur de l'une des inconnues ( $x$  ou  $y$ ) dans l'une de deux équations.

Dans notre cas, tirons  $x$  dans la deuxième équation, on aura :

$$x = 2 + y \quad (3)$$

Remplacer la valeur de l'inconnue tirée dans l'autre équation. Dans notre cas, remplaçons  $x = 2 + y$  dans (1).

$$\text{On a : } 2 + y + y = 6$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2y = 6$$

$$\Leftrightarrow 2y = 6 - 2$$

$$\Leftrightarrow 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow y = 4/2$$

$$y = 2 \quad (4)$$

Remplacer la valeur trouvée dans (4) dans (3)

$$x = 2 + 2$$

$$x = 4$$

$$S = (4, 2)$$

### I.8.2 Méthode de comparaison

$$\begin{cases} x + y = 6 & (1) \\ x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

Tirer une de deux inconnues dans les deux équations. Dans notre cas, tirons  $x$  dans les deux équations :

$$\text{De (1) : } x = 6 - y \quad (3)$$

$$\text{De (2) : } x = 2 + y \quad (4)$$

Ensuite, comparer ou égaler (3) et (4) car les deux représentent la valeur de la même variable ( $x$  dans notre cas) :

$$(4) = (3)$$

$$2 + y = 6 - y$$

$$\Leftrightarrow y + y = 6 - 2$$

$$\Leftrightarrow 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow y = 4/2$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \quad (5)$$

Remplacer la valeur trouvée dans (3) ou (4) pour trouver la valeur de l'autre inconnue

(5) dans (3)

$$x = 6 - 2$$

$$x = 4$$

$$S = (4, 2)$$

### 1.8.3 Méthode d'addition

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

On choisit l'inconnue à éliminer, dans notre cas, éliminons  $x$

Ensuite, on permute les coefficients de l'inconnue à éliminer : le coefficient de la première équation sera le multiplicateur de la deuxième équation et vice-versa.

Dans notre cas, les coefficients de  $x$  dans les deux équations sont tous 1 :

$$\begin{cases} x + y = 6 & | & 1 \\ x - y = 2 & | & 1 \end{cases}$$

Si les deux coefficients sont de même signe, les multiplicateurs doivent être de signes contraires et s'ils sont de signes contraires, les multiplicateurs doivent être de même signe.

Dans notre cas, les deux coefficients sont de même signe, donc les multiplicateurs doivent être de signes contraires : on est libre d'attribuer le signe moins ou plus à n'importe quel multiplicateur :

$$\begin{cases} x + y = 6 & | & 1 \\ x - y = 2 & | & -1 \end{cases}$$

Tous les termes de la première équation seront multipliés par 1 et ceux de la deuxième équation par  $-1$  :

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{array} \right. \begin{array}{l} | \\ | \\ \hline | \\ | \\ \hline | \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \\ \hline x + y = 6 \\ -x + y = -2 \end{array}$$

On additionne membre à membre les deux équations obtenues :

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{array} \right. \begin{array}{l} | \\ | \\ \hline | \\ | \\ \hline | \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \\ \hline \cancel{x} + y = 6 \\ -\cancel{x} + y = -2 \\ \hline x - x + y + y = 6 - 2 \end{array}$$

$$0x + 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow y = 4/2$$

$$y = 2 \quad (3)$$

Remplacer la valeur trouvée dans l'une des équations :

(3) dans (1)

$$x + 2 = 6$$

$$x = 6 - 2$$

$$x = 4$$

$$S = (4, 2)$$

### Remarque

En utilisant l'une de trois méthodes, on peut tomber sur le cas suivant :

$0x = 0$     ou  $0y = 0$  : Le système est indéterminé

$0x = b$     ou  $0y = b$     avec  $b$  un réel non nul : Le système est impossible

### Exemple

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases}$$

Solution

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 4 & (1) \\ 4x + 6y = 8 & (2) \end{cases}$$

Utilisons la méthode de substitution :

$$\text{De (1), tirons } y : 3y = 4 - 2x \Leftrightarrow y = \frac{4-2x}{3} \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans (2)} \Rightarrow 4x + 6\left(\frac{4-2x}{3}\right) = 8 \Leftrightarrow 4x + 2(4 - 2x) = 8$$

$$\Leftrightarrow 4x + 8 - 4x = 8$$

$$\Leftrightarrow 4x - 4x = 8 - 8$$

$$\Leftrightarrow 0x = 0$$

Le système est indéterminé

$$2) \begin{cases} x - 2y = 5 & (1) \\ 3x - 6y = 3 & (2) \end{cases}$$

Utilisons la méthode de substitution :

$$\text{De (1), tirons } x : x = 5 + 2y \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans (2)} \Rightarrow 3(5 + 2y) - 6y = 3 \Leftrightarrow 15 + 6y - 6y = 3$$

$$\Leftrightarrow 6y - 6y = 3 - 15$$

$$\Leftrightarrow 0y = -12$$

Le système est impossible

### 1.8.4 Méthode de Cramer

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Comme nous avons un système de deux équations à deux inconnues, on doit calculer trois déterminants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a \times b' - a' \times b$$

Le déterminant ci haut appelé déterminant principal qui est formé par les coefficients de deux inconnus. La première colonne représente les coefficients de la première inconnue et la deuxième ceux de la deuxième inconnue.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = c \times b' - c' \times b$$

Le déterminant de  $x$  est obtenu en remplaçant la colonne de  $x$  par les termes indépendants.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = a \times c' - a' \times c$$

De même, le déterminant de  $y$  est obtenu en remplaçant la colonne de  $y$  par les termes indépendants.

Trois cas sont possibles :

Si  $\Delta \neq 0$ , le système est dit de Cramer et admet une solution unique donnée par  $(x, y)$

$$\text{Avec } x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad \text{et } y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

Si  $\Delta = 0$  et  $\Delta x \neq 0$  et  $\Delta y \neq 0$ : le système est impossible

Si  $\Delta = 0$  et  $\Delta x = 0$  ou  $\Delta y = 0$ : le système est indéterminé

Résolvons notre exemple :

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 1 \times 1$$

$$\Delta = -2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \times (-1) - 2 \times 1$$

$$\Delta x = -8$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times 6$$

$$\Delta y = -4$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$S = (4, 2)$$

### EXERCICE 15

Le système d'équations linéaires à deux inconnues  $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -10x - 15y = -20 \end{cases}$  a pour solution :

- a) (8 ; 0)   b) (2 ; -2)   c) (8 ; -∞)   d) le système est impossible   e) Pas de bonne réponse  
(Concours 2018-2019/ Algèbre)

#### Indication

*Le système est impossible*

### EXERCICE 16

Le système  $\begin{cases} 4x - 5y = -9 \\ x + y = 9 \end{cases}$  a pour solution (a, b). Les quantités a-b et ab valent respectivement :

- a) 5 et 12   b) -1 et 20   c) 10 et 100   d) 2 et 18

(Concours 2013-2014/Algèbre)

#### Indication

$$(a ; b) = (4 ; 5)$$

$$a - b = 4 - 5 = -1$$

$$ab = 4 \times 5 = 20$$

### EXERCICE 17

Le système de deux équations à deux inconnues :  $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = -4 \end{cases}$  a pour solution le couple :

- a) (-5 ; 2)   b) (-5 ; -2)   c) (5 ; -2)   d) (5 ; 2)   e) pas de bonne réponse

(Concours 2020-2021/Algèbre)

#### Indication

Le système est impossible :  $S = \emptyset$

## EXERCICE 18

Le système de deux équations à deux inconnues  $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 9x - 3y = -3 \end{cases}$  a pour solution le couple :

a)  $(-9; 2)$  b)  $(-9; -2)$  c)  $(5; -7)$  d)  $(5; 7)$  e) *pas de bonne réponse*

(Concours 2021-2022/Algèbre)

### Indication

Le système est impossible

## I.9 Equations logarithmiques

### I.9.1 Rappel

Soient  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ ,  $b \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n \in \mathbb{R}$ .

$$(\log_a b = n) \Leftrightarrow (a^n = b)$$

Le logarithme de  $b$  dans la base  $a$  égal  $n$  signifie que  $n$  est la puissance à laquelle il faut élever  $a$  pour trouver  $b$ .

Exemple

$$\log_2 8 = 3 \text{ car } 2^3 = 8$$

### Propriétés

- ✓  $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$
- ✓  $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- ✓  $\log_a b^n = n \log_a b$
- ✓  $\log_a^n b^m = \frac{m}{n} \log_a b$
- ✓  $\log_a a = 1$
- ✓ **Formule de changement de base**

Connaissant  $\log_b x$ , comment trouver  $\log_a x$  connaissant également  $\log_b a$  :

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

### I.9.2 Définition et Résolution

Une équation logarithmique est une équation dans laquelle l'inconnue intervient dans l'expression du logarithmique.

Pour résoudre une équation logarithmique, on procède comme suit :

- Poser les conditions d'existence des solutions de l'équation.
- Ramener éventuellement les logarithmes à la même base.
- Utiliser les propriétés pour obtenir :

$$\log_a u(x) = \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$$

- Retenir les valeurs de l'inconnue vérifiant les conditions posées au début.

### Exemple :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$\log_2(x + 14) - \log_2(x - 7) = 3$$

### Résolution

Condition préalable :  $x + 14 > 0$  et  $x - 7 > 0$

$$\Leftrightarrow x > -14 \text{ et } x > 7$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-14; +\infty[ \text{ et } x \in ]7; +\infty[$$

$$x \in ]7; +\infty[$$

Réolvons maintenant l'équation :

$$\log_2(x + 14) - \log_2(x - 7) = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x + 14) - \log_2(x - 7) = 3 \log_2 2 \quad \text{car } \log_2 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{(x+14)}{(x-7)} = \log_2 2^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+14}{x-7} = 2^3$$

$$\Leftrightarrow x + 14 = 8(x - 7)$$

$$\Leftrightarrow x + 14 = 8x - 56$$

$$\Leftrightarrow x - 8x = -56 - 14$$

$$\Leftrightarrow -7x = -70$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{70}{7}$$

$$x = 10$$

$$S = \{10\}$$

### EXERCICE 19

La solution de l'équation :

$$\log(3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}) + \log(3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}}) = 2 \log x - \log 33 - \log(6 + \sqrt{3}) \text{ est :}$$

$$a) x = -33 \quad b) x = \sqrt{3} \quad c) x = 33 \quad d) x = 3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}} \quad e) x = 3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}$$

(Concours 2022-2023/Algèbre)

#### Indication

Condition préalable :  $x > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -33 & \text{A rejeter} \\ x = 33 \end{cases}$$

$$S = \{33\}$$

### EXERCICE 20

L'ensemble de solution de l'équation  $\log_a x = \log_x a$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $a > 0$  est donnée par  $s = \{x_1, x_2\}$ . Les quantités  $x_1 - x_2$  et  $-x_1x_2$  sont respectivement :

$$a) \frac{a}{2} \text{ et } 2a \quad b) -\frac{1-a}{a} \text{ et } -1 \quad c) \frac{a-1}{a} \text{ et } -1 \quad d) \frac{a-1}{a} \text{ et } 1 \quad e) \text{ pas de bonne réponse}$$

(Concours 2020-2021/Algèbre)

#### Indication

$$S = \left\{ \frac{1}{a}; a \right\}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{a} - a = \frac{1-a^2}{a}$$

$$-x_1x_2 = -\frac{1}{a} \times a = -1$$

### EXERCICE 21

La solution de l'équation :

$$2 \log x - \log 33 - \log(6 + \sqrt{3}) = \log(3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}) + \log(3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}}) \text{ est :}$$

$$a) x = 33 \quad b) x = \sqrt{3} \quad c) x = 3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}} \quad d) x = -33$$

(Concours 2012-2013/Algèbre)

(Concours 2023-2024)

**Indication**

$$x_1 = 33 \quad \text{et} \quad x_2 = -33$$

Seul  $x_1 = 33$  qui vérifie la condition préalable.

$$S = \{33\}$$

**EXERCICE 22**

La solution de l'équation :

$$\log x^2 - \log(3 + \sqrt{3}) = \log 33 + \log(3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}) + \log(3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}}) \text{ est :}$$

a)  $x = 33$    b)  $x = \sqrt{3}$    c)  $x = 3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}$    d)  $x = -33$

(Concours 2014-2015/Algèbre)

**EXERCICE 23**

La solution de l'équation :

$$2 \log x = \log 33 + \log(6 + \sqrt{3}) + \log(3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}) + \log(3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}}) \text{ est :}$$

a)  $x = 33$    b)  $x = \sqrt{3}$    c)  $x = 3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}$    d)  $x = -33$

(Concours 2019-2020/Algèbre)

**EXERCICE 24**

L'équation  $2 \log x - \log 33 = \log(6 + \sqrt{3}) + \log(3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}) + \log(3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}})$  a pour solution :

a)  $x = -33$    b)  $x = \sqrt{3}$    c)  $x = 3 + 3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}$    d)  $x = 33$    e) *pas de bonne réponse*

(Concours 2021-2022/Algèbre)

## I.10 Equations exponentielles

Une équation exponentielle dans  $\mathbb{R}$  est celle dans laquelle l'inconnue intervient dans l'exposant.

Exemples :

$$2^{x+1} = 4$$

$$4^x = 2^{x-2}$$

### Marche à suivre pour la résolution

On peut classer les équations exponentielles en 3 cas :

**1<sup>er</sup> cas** : Les deux membres ont la même base.

$$a^{u(x)} = a^{v(x)}, \text{ avec } a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

$$a^{u(x)} = a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$$

Exemple :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$1) 3^{(x+2)(4-x)} = 1$$

$$2) 3^x = \sqrt[3]{9}$$

$$3) \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{9}{16}$$

Solution

$$1) 3^{(x+2)(4-x)} = 1$$

$$3^{(x+2)(4-x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3^{(x+2)(4-x)} = 3^0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(4-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 0 \text{ ou } 4-x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 4$$

$$S = \{-2; 4\}$$

$$2) 3^x = \sqrt[3]{9}$$

$$3^x = \sqrt[3]{9}$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 9^{1/3}$$

$$\text{car } \sqrt[n]{a^p} = a^{p/n}$$

$$\Leftrightarrow 3^x = (3^2)^{1/3}$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3^{2 \times \frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3^{2/3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$\begin{aligned}
3) \left(\frac{4}{3}\right)^x &= \frac{9}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{3^2}{4^2} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \\
&\Leftrightarrow x = -2
\end{aligned}$$

$$S = \{-2\}$$

**2<sup>e</sup> cas : Equation de la forme  $a^{u(x)} = b$  avec  $b \in \mathbb{R}_+^*$**

$$a^{u(x)} = b \Leftrightarrow \log_a a^{u(x)} = \log_a b$$

$$\Leftrightarrow u(x) \log_a a = \log_a b \quad \text{car } \log_a a = 1$$

$$\Leftrightarrow u(x) = \log_a b$$

Exemple :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes

$$1) 5^{\log_5 x} = 125 \quad 2) 5^x = 3$$

Solution

$$1) 5^{\log_5 x} = 125$$

$$\Leftrightarrow \log_5 5^{\log_5 x} = \log_5 125$$

$$\Leftrightarrow \log_5 x \log_5 5 = \log_5 125$$

$$\Leftrightarrow \log_5 x = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_5 x = \log_5 5^3$$

$$\Leftrightarrow x = 5^3$$

$$S = \{125\}$$

$$2) 5^x = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_5 5^x = \log_5 3$$

$$\Leftrightarrow x \log_5 5 = \log_5 3$$

$$\Leftrightarrow x = \log_5 3 \quad \text{car } \log_5 5 = 1$$

$$S = \{\log_5 3\}$$

### 3<sup>e</sup> cas : Autres types d'équations

Ce sont des équations qui après transformation, se ramène à un des cas précédents.

Exemple :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $6^x + \frac{1}{6^x} - 2 = 0$       2)  $8^{2x} - 3 \cdot 8^x = 4$       3)  $49^x - 7^x - 2 = 0$

Résolution

1)  $6^x + \frac{1}{6^x} - 2 = 0$

Résolution

$$6^x + \frac{1}{6^x} - 2 = 0$$

Posons  $6^x = t$ , l'équation devient :

$$t + \frac{1}{t} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 + 1 - 2t}{t} = 0$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

Réolvons cette équation du second degré

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1$$

$$\Delta = 0$$

$$t_1 = t_2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$t = 1 \Leftrightarrow 6^x = 1$$

$$\Leftrightarrow 6^x = 6^0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$S = \{0\}$$

2)  $8^{2x} - 3 \cdot 8^x = 4$

Résolution

$$8^{2x} - 3 \cdot 8^x = 4$$

Posons  $8^x = t$ , l'équation devient :

$$t^2 - 3t = 4$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$$

Réolvons cette nouvelle équation du second degré en t :

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -3 \quad c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4)$$

$$\Delta = 25$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{3+\sqrt{25}}{2} = 4 \\ t_2 = \frac{3-\sqrt{25}}{2} = -1 \text{ à rejeter} \end{cases}$$

$$\text{Pour } t = 4 : 8^x = 4$$

$$\Leftrightarrow (2^3)^x = 2^2$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x} = 2^2$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

$$3) 49^x - 7^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (7^2)^x - 7^x - 2 = 0$$

$$\text{Posons } 7^x = t, \text{ on aura : } (7^2)^x - 7^x - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2)$$

$$= 1 + 8$$

$$\Delta = 9$$

$$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2(1)} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2(1)} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ A rejeter}$$

$$\text{Pour } t = 2 : 7^x = t \Leftrightarrow 7^x = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_7 7^x = \log_7 2$$

$$\Leftrightarrow x \log_7 7 = \log_7 2$$

$$\Leftrightarrow x = \log_7 2$$

$$S = \{\log_7 2\}$$

## EXERCICE 25

La solution de l'équation :  $8^{6x} - 3 \cdot 8^{3x} - 4 = 0$  est :

a)  $S = \{4, -1\}$    b)  $S = \{-4; 0\}$    c)  $S = \{4; 1\}$    d)  $S = \left\{\frac{2}{9}\right\}$    e)  $ABR$

(Concours 2023-2024/Algèbre)

### Indication

Poser  $8^{3x} = t$

$$S = \left\{\frac{2}{9}\right\}$$

## EXERCICE 26

La somme et le produit des  $a$  et  $b$  tels que pour tout réel  $x$  on ait :

$(2x + 1)e^{x+1} + x - 3 = a(x + 1)e^{x+1} + be^{x+1} + x - 3$  valent respectivement :

a) 1 et -3   b) -3 et 4   c) -1 et -2   d) 1 et -2   e) -1 et -3

(Concours 2022-2023/Algèbre)

### Indication

Les termes  $x - 3$  s'annulent, mettre  $e^{x+1}$  en évidence au second membre et procéder par identification.

$$a = 2 \quad \text{et} \quad b = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a + b = 2 + (-1) = 1 \\ a \cdot b = 2(-1) = -2 \end{cases}$$

## EXERCICE 27

Soit la fonction  $f(x) = \frac{2 \ln(x+1)}{\ln x}$

L'ensemble de solution  $S$  de l'équation  $f(x) = 1$  est :

1)  $S = ]0; +\infty[$    2)  $S = [0; 1[$    3)  $S = \left\{0; \frac{1}{6}\right\}$    4)  $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$    5)  $\left[1; \frac{3}{2}\right]$

(Concours 2022-2023/Algèbre)

### Indication

Conditions préalables  $x + 1 > 0$  et  $x > 0$  et  $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x > -1$  et  $x > 0$  et  $x \neq 1$

$$\Delta = -3$$

Pas de racines réelles.

### EXERCICE 28

On rappelle que  $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  et  $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . L'équation  $5chx - 3shx = 4$  dans  $\mathbb{R}$  a pour solution :

a)  $e^2$  b)  $-2 \ln 2$  c)  $\ln 3$  d)  $\ln 2$  e) pas de bonne réponse

(Concours 2020-2021)

#### Indication

Remplacer  $chx$  et  $shx$  par leurs valeurs respectives, puis poser  $e^x = t$  après avoir groupé les termes semblables.

$$S = \{\ln 2\}$$

### EXERCICE 29

Le système  $\begin{cases} \frac{2^y}{3} = x \\ \frac{3^y}{2} = x \end{cases}$  a pour solution  $(x, y)$ . Les quantités  $12x + y$  et  $6xy$  sont

données respectivement par :

a.  $-5$  et  $12$  b.  $-2$  et  $17$  c.  $1$  et  $-1$  d. Pas de bonne réponse

(Concours 2014-2015/ Algèbre)

#### Résolution

Diviser membre à membre (1) par (2)

$$(x, y) = \left(\frac{1}{6}, -1\right)$$

$$12x + y = 12 \times \frac{1}{6} - 1 = 1$$

$$6xy = 6 \times \frac{1}{6} \times (-1) = -1$$

### EXERCICE 30

Le système  $\begin{cases} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y \end{cases}$  a pour solution  $(x, y)$ . Les quantités  $x + y$  et  $xy$  valent respectivement :

a)  $-\frac{5}{6}$  et  $-\frac{1}{6}$  b)  $-\frac{1}{2}$  et  $-\frac{3}{6}$  c)  $\frac{3}{5}$  et  $\frac{5}{6}$  d) Pas de bonne réponse.

(Concours 2012-2013/ Algèbre)

### EXERCICE 31

Le système  $\begin{cases} 2^y = 3x \\ 3^y = 2x \end{cases}$  a pour solution  $(x, y)$ . Les quantités  $x - y$  et  $xy$  valent respectivement :

a)  $-\frac{5}{6}$  et  $\frac{1}{6}$    b)  $-\frac{1}{2}$  et  $-\frac{3}{2}$    c)  $-\frac{3}{2}$  et  $\frac{1}{2}$    d) Pas de bonne réponse.

(Concours 2011-2012/ Algèbre)

(Concours 2019-2020/ Algèbre)

### EXERCICE 32

Le système  $\begin{cases} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y \end{cases}$  a pour solution  $(x, y)$ . Les quantités  $x - y$  et  $x + y$  sont données respectivement par :

a)  $\frac{1}{6}$  et  $-\frac{5}{6}$    b)  $\frac{3}{2}$  et  $-\frac{1}{2}$    c)  $\frac{1}{2}$  et  $-\frac{3}{2}$    d)  $-\frac{5}{6}$  et  $-\frac{7}{6}$    e) Pas de bonne réponse.

(Concours 2021-2022/ Algèbre)

## I.11 Equations avec des factorielles (combinaisons)

Rappelons que  $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$  et que  $n! = n(n-1)!$

$n, p \geq 0$  avec  $n \geq p$  et  $0! = 1$  et  $1! = 1$

Exemples :

$$5! = 5(5-1)!$$

$$= 5 \cdot 4!$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot (4-1)!$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 3!$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (3-1)!$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (2-1)!$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$3! = 3(3-1)!$$

$$= 3 \cdot 2!$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot (2-1)!$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 1!$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$3! = 6$$

$$2! = 2(2-1)!$$

$$= 2 \cdot 1!$$

$$= 2 \cdot 1$$

$$2! = 2$$

$$5! = 120$$

$$\begin{aligned} C_5^2 &= \frac{5!}{(5-2)!2!} \\ &= \frac{120}{3! \times 2} \\ &= \frac{120}{6 \times 2} \\ &= \frac{120}{12} \end{aligned}$$

$$C_5^2 = 10$$

### EXERCICE 33

L'équation  $C_x^2 = 1$  dans  $\mathbb{N}$  a pour solution :

- a) 2 et -1   b) 2 et 1   c) 4 et -2   d) -2 et -1   e) Pas de bonne solution

(Concours 2018-2019/Algèbre)

#### Indication

On sait que  $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

$$S = \{2\}$$

### EXERCICE 34

L'équation  $C_x^2 = 3$  a pour solution :

- a) 3 et -2   b) -3 et -2   c) 3   d) -2   e) -3 et -2

(Concours 2020-2021/Algèbre)

#### Indication

$$S = \{3\}$$

### EXERCICE 35

L'équation  $C_x^2 = 3!$  a pour solution :

- a) 4 et -3   b) -4 et 3   c) -3   d) -4   e) 4

(Concours 2021-2022/Algèbre)

#### Indication

$$S = \{4\}$$

## I.12. Equations du troisième degré

Une équation du troisième degré a la forme générale suivante :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{avec } a \neq 0$$

Nous allons traiter le cas où un des diviseurs du terme indépendant annule ou vérifie l'équation. Dans ce cas, on procède comme suit pour résoudre l'équation du troisième degré :

- Chercher la première racine (solution) qui correspond au diviseur du terme indépendant vérifiant l'équation
- Décomposer le polynôme (équation) par  $x - r$  (avec  $r$  la racine trouvée à l'étape précédente)
- Après décomposition, le quotient donnera une équation du second degré, qu'il faut résoudre pour trouver éventuellement la deuxième et troisième racine.

Exemple :

$$\text{Résoudre } x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$$

Les diviseurs du terme indépendant (12 dans notre cas) sont :  $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6$  et  $\pm 12$

On essaie chaque diviseur pour voir celui qui va vérifier l'équation :

$$\text{Pour } x = 1 : (1)^3 - 7(1)^2 + 16(1) - 12 = -2 \neq 0$$

$$\text{Pour } x = -1 : (-1)^3 - 7(-1)^2 + 16(-1) - 12 = -36 \neq 0$$

$$\text{Pour } x = 2 : (2)^3 - 7(2)^2 + 16(2) - 12 = 0$$

$$x = 2 \text{ vérifie donc } x_1 = 2$$

Décomposons  $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$  par  $x - 2$  par la méthode d'Horner

	1	-7	16	-12
2		2	-10	12
	1	-5	6	0

$$\text{D'où } x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 2)(x^2 - 5x + 6)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6)$$

$$= 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$$x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad x_3 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$S = \{2; 3\}$$

### EXERCICE 36

Soit la fonction  $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ . Les valeurs de  $x$  vérifiant  $f(x) = 0$  sont dans l'ensemble ?

a) 2   b) 3   c) 0   d)  $+\infty$    e)  $-\infty$

(Concours 2023-2024/Analyse)

#### Indication

Trouver les diviseurs du terme indépendant et trouvons celui qui annule le polynôme.

$$S = \{-1, 1\}$$

### I.13. Problèmes qui conduisent à la résolution des équations

Certains problèmes peuvent être résolus par des équations. La résolution d'un problème par l'algèbre peut se décomposer en quatre étapes :

- Choix des inconnues
- Mise en équation
- Résolution des équations
- Discussion du problème

### EXERCICE 37

Une régate, ou course de Voiliers est organisée à la Rochelle. Deux types de Voiliers participent à la régate :

- Les « 420 » qui ont à bord deux personnes
- Les « optimistes » qui sont manœuvrés par une personne.

On compte au départ de la régate 48 voiliers et 80 personnes.

Le nombre de Voiliers de chaque catégorie vaut respectivement :

a) 32 et 16   b) 25 et 23   c) 15 et 33   d) 33 et 15   e) - 33 et - 15

(Concours 2023-2024/Algèbre)

**Indication**

Posons  $x$  : le nombre de Voiliers « 420 » et

$y$  : le nombre de Voiliers « Optimistes »

$$\begin{cases} 2x + y = 80 & (1) \\ x + y = 48 & (2) \end{cases}$$

Donc il y a 32 Voiliers « 420 » et 16 Voiliers « Optimistes »

**EXERCICE 38**

La longueur et la largeur d'une parcelle rectangulaire de périmètre 52 m et d'aire  $165 \text{ m}^2$  sont :

a) 16 m et 12 m b) 10 m et 15 m c) 13 m et 14 m d) ABR

(Concours 2023-2024/algèbre)

**Indication**

Posons  $L$  : la longueur et  $l$  : la largeur

$$\begin{cases} 2L + 2l = 52 & (1) \\ L.l = 165 & (2) \end{cases}$$

$L = 15 \text{ m}$  et  $l = 11 \text{ m}$

**EXERCICE 39**

La largeur et la longueur d'une parcelle rectangulaire de  $80 \text{ m}^2$  de surface et de 42 m de périmètre sont :

a) 7 m et 12 m b)  $-12 \text{ m}$  et  $-7 \text{ m}$  c)  $16 \text{ m}$  et  $-5 \text{ m}$  d) 12m et 16m e) Pas de bonne réponse

(Concours 2022-2023/Algèbre)

**Indication**

$L = 16 \text{ m}$  et  $l = 5 \text{ m}$

#### EXERCICE 40

La largeur et la longueur d'une parcelle rectangulaire de  $80 \text{ m}^2$  de surface et de 42 m de périmètre sont :

- a) 12 m et 7m   b) 15m et 5 m   c) 16m et 5m   d) Pas de bonne réponse

(Concours 2012-2013/Algèbre)

#### Indication

$$\text{Donc } L = 16 \text{ m et } l = 5 \text{ m}$$

#### EXERCICE 41

La longueur et la largeur d'une parcelle rectangulaire de périmètre 56 m et d'aire  $196 \text{ m}^2$  sont :

- a) 16 m et 12m   b) 10m et 15 m   c) 12m et 16m   d) Pas de bonne réponse

(Concours 2011-2012/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Algèbre)

#### Indication

$$L = 14 \text{ m et } l = 14 \text{ m}$$

#### EXERCICE 42

Déterminer la longueur et la largeur d'une parcelle rectangulaire de périmètre 180 m et d'aire  $2000 \text{ m}^2$ .

(Concours 2008-2009/ Algèbre)

#### Indication

$$L = 50 \text{ m et } l = 40 \text{ m}$$

#### EXERCICE 43

Avant sa mort, Monsieur MAKAYABU lègue son avoir de 9000 dollars à ses deux enfants. La part de l'ainé dépasse le double du cadet de 3000 dollars.

Quelle est la part de chacun ?

(Concours 2008-2009/Algèbre)

**Indication**

La part de l'ainé est : 7000 dollars

Et celle du cadet est de 2000 dollars.

**EXERCICE 44**

La longueur et la largeur d'une parcelle rectangulaire de 32m de périmètre et de  $240m^2$  d'aire valent respectivement :

- a) 15m et 18m   b) 20m et 15m   c) 25m et 11m   d) 20m et 12m

(Concours 2013-2014/ Algèbre)

**EXERCICE 45**

Si je gagne 30\$, j'aurai le double de ce que j'aurais si je perdais 30%. Combien ai-je ?

- a) 100\$      b) 60\$      c) 500\$      d) 120\$

(Concours 2013-2014/Algèbre)

**Indication**

Donc j'ai 75\$.

**EXERCICE 46**

Les  $\frac{3}{5}$  d'un morceau du gâteau de votre anniversaire valent 1800 FC. Que vaut un morceau ?

- a) 3000 FC   b) 9000 FC   c) 1500 FC   d) 180 FC   e) 600 FC

(Concours 2021-2022/Algèbre)

**Indication**

Soit  $x$  : le montant d'un morceau

$$x = 3000 \text{ FC}$$

## II. GENERALITES SUR LES FONCTIONS

### II.1 Le domaine de définition d'une fonction

Le domaine de définition d'une fonction dépend du type de la fonction.

#### II.1.1 Fonction polynôme

$$Df = \mathbb{R}$$

**Exemples :**

$$1) f(x) = x^2 + 2x - 3 + 7x^3 \quad Df = \mathbb{R}$$

$$2) f(x) = x^3 + \frac{2x-5}{5} \quad Df = \mathbb{R}$$

#### II.1.2 Fonction rationnelle ( $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ )

$$Df = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} \text{ ou}$$

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$$

Cela signifie qu'on prend toutes les valeurs de  $\mathbb{R}$  sauf celles qui annulent le dénominateur.

Pour trouver le domaine de définition d'une fonction rationnelle, on procède comme suit :

- Egaler le dénominateur à zéro, c'est-à-dire écrire :  $g(x) = 0$
- Résoudre l'équation ainsi formée.
- Prendre toutes les valeurs de  $\mathbb{R}$  à l'exception des racines de l'équation.

#### Exemple

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \frac{x-5}{x-2}$$

$$2) f(x) = \frac{2x+8}{x^2-5x+6}$$

#### Résolution

$$1) f(x) = \frac{x-5}{x-2}$$

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x - 2 = 0\}$$

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{2\} \text{ Ou sous forme d'intervalles}$$

$$Df = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

$$2) f(x) = \frac{2x+8}{x^2-5x+6}$$

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = 2$$

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\} \quad \text{ou} \quad Df = ]-\infty; 2[ \cup ]2; 3[ \cup ]3; +\infty[$$

### II.1.3 Fonction irrationnelle de la forme $f(x) = \sqrt[n]{t(x)}$

Dans ce cas, on examine la parité de n (indice),

Si n est pair  $Df = \{x \in \mathbb{R} : t(x) \geq 0\}$

Si n est impair  $Df = \mathbb{R}$

#### Exemples :

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = \sqrt[3]{2x - 3}$

2)  $f(x) = \sqrt{-x^2 - 5x - 6}$

Résolution

1)  $f(x) = \sqrt[5]{2x - 3}$

L'indice 5 est impair, donc  $Df = \mathbb{R}$

2)  $f(x) = \sqrt{-x^2 - 5x - 6}$

L'indice est pair

$$Df = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 - 5x - 6 \geq 0\}$$

$$-x^2 - 5x - 6 \geq 0$$

$$-x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1) \times (-6)$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = -2$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$+\infty$	
$-x^2 - 5x - 6$	-	0	+	0	-

$$Df = [-3; -2]$$

## II.1.4 Fonction irrationnelle de la forme $f(x) = \sqrt[n]{\frac{h(x)}{g(x)}}$

Si  $n$  est impair :  $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$

Si  $n$  est pair :  $Df = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{h(x)}{g(x)} \geq 0\right\}$

### Exemples :

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+5x-6}{x^2-2x+1}} \quad 2) f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-5}{x^2-7x+12}}$$

Résolution

$$1) f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+5x-6}{x^2-2x+1}}$$

$n$  est impair :  $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 = 0\}$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ = 4 - 4$$

$$\Delta = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \text{ou} \quad Df = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

$$2) f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-5}{x^2-7x+12}}$$

$n$  est pair :  $Df = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-5}{x^2-7x+12} \geq 0\right\}$

$$\frac{x-5}{x^2-7x+12} \geq 0$$

$$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = 3$$

$x$	$-\infty$	3	4	5	$+\infty$		
$x - 5$	-	-	-	0	+		
$x^2 - 7x + 12$		+	0	-	0	+	+
$\frac{x-5}{x^2-7x+12}$	-		+		-	0	+

$$Df = ]3; 4[ \cup ]5; +\infty[$$

### II.1.5 Fonction irrationnelle de la forme $f(x) = \frac{h(x)}{\sqrt[n]{g(x)}}$

Si  $n$  est impair :  $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$

Si  $n$  est pair :  $Df = \{x \in \mathbb{R} : g(x) > 0\}$

#### Exemple

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \frac{x^2+5x-6}{\sqrt[5]{x^2-2x+1}} \quad 2) f(x) = \frac{x^2+5x-6}{\sqrt[2]{-x^2+4x-3}}$$

Résolution

$$1) f(x) = \frac{x^2+5x-6}{\sqrt[5]{x^2-2x+1}}$$

$n$  est impair :  $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 = 0\}$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ = 4 - 4$$

$$\Delta = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \text{ou} \quad Df = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

$$2) f(x) = \frac{x^2+5x-6}{\sqrt[2]{-x^2+4x-3}}$$

$n$  est pair :  $Df = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 4x - 3 > 0\}$

$$-x^2 + 4x - 3 > 0$$

$$a = -1 \quad b = 4 \quad c = -3$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (4)^2 - 4 \times (-1) \times (-3) \\ = 16 - 12$$

$$\Delta = 4$$

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = 3$$

$x$	$-\infty$	$1$	$3$	$+\infty$	
$-x^2 + 4x - 3$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

$$Df = ]1; 3[$$

## II.1.6 Fonction irrationnelle de la forme $f(x) = \frac{\sqrt[n]{h(x)}}{g(x)}$

Si  $n$  est impair :  $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$

Si  $n$  est pair :  $Df = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq 0 \text{ et } g(x) \neq 0\}$  ou

$$Df = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq 0\} \cap \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$$

Exemple :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 15}}{x - 3} \quad 2) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 8x + 4}}{-x^2 + 3x - 2}$$

Résolution

$$1) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 15}}{x - 3}$$

$n$  est pair :  $Df = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 15 \geq 0\} \cap \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x - 3 = 0\}$

$$x^2 - 8x + 15 \geq 0$$

$$a = 1 \quad b = -8 \quad c = 15$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 15$$

$$= 64 - 60$$

$$\Delta = 4$$

$$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-(-8) + \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$x$	$-\infty$	$3$	$5$	$+\infty$	
$x^2 - 8x + 15$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$S_1 = ]-\infty; 3] \cup [5; +\infty[$$

$$x - 3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$S_2 = ]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$$

$$Df = S_1 \cap S_2 = ]-\infty; 3[ \cup [5; +\infty[$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-8x+4}}{-x^2+3x-2}$$

*n est pair*

$$Df = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 3x - 2 = 0\}$$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$a = -1 \quad b = 3 \quad c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (3)^2 - 4(-1)(-2)$$

$$= 9 - 8$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2(-1)} = \frac{-3+1}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2(-1)} = \frac{-3-1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$Df = \mathbb{R} - \{1; 2\} \text{ OU } Df = ]-\infty; 1[ \cup ]1; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

### II.1.7 Fonction irrationnelle de la forme $f(x) = \frac{n\sqrt[h(x)]{h(x)}}{m\sqrt[g(x)]{g(x)}}$

Si n et m sont pairs :  $Df = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq 0 \text{ et } g(x) > 0\}$

Si n et m sont impairs :  $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$

Si n est pair et m impair :  $Df = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq 0 \text{ et } g(x) \neq 0\}$

Si n est impair et m pair :  $Df = \{x \in \mathbb{R} : g(x) > 0\}$

Exemple :

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = \frac{\sqrt{12-x^2+x}}{\sqrt[3]{-2x+1}} \quad b) f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{\sqrt{x^2-7x+12}}$$

Résolution

$$a) f(x) = \frac{\sqrt{12-x^2+x}}{\sqrt[3]{-2x+1}}$$

*n est pair et p est impair*

$$Df = \{x \in \mathbb{R} : 12 - x^2 + x \geq 0 \text{ et } -2x + 1 \neq 0\}$$

$$12 - x^2 + x \geq 0$$

$$12 - x^2 + x = 0$$

$$a = -1 \quad b = 1 \quad c = 12$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1)^2 - 4(-1)(12)$$

$$= 1 + 48$$

$$\Delta = 49$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2(-1)} = \frac{-1 + 7}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2(-1)} = \frac{-1 - 7}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$4$	$+\infty$	
$12 - x^2 + x$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

$$S_1 = [-3; 4]$$

$$-2x + 1 \neq 0$$

$$-2x + 1 = 0$$

$$-2x = -1$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$S_2 = ]-\infty; \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$Df = S_1 \cap S_2$$

$$Df = [-3; \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; 4]$$

$$b) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$$

*n et p sont pairs*

$$Df = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 2 \geq 0 \text{ et } x^2 - 7x + 12 > 0 \}$$

$$x^2 - 2x + 2 \geq 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4(1)(2)$$

$$= 4 - 8$$

$$\Delta = -4$$

$x$	$-\infty$			$+\infty$
$x^2 - 2x + 2$	+	+	+	

$$S_1 = ]-\infty; +\infty[$$

$$x^2 - 7x + 12 > 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -7 \quad c = 12$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-7)^2 - 4(1)(12)$$

$$= 49 - 48$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$x$	$-\infty$	3		4	$+\infty$
$x^2 - 7x + 12$	+	0	-	0	

$$S_2 = ]-\infty; 3[ \cup ]4; +\infty[$$

$$Df = S_1 \cap S_2$$

$$Df = ]-\infty; 3[ \cup ]4; +\infty[$$

### II.1.8 Fonctions logarithmiques

Soit  $f(x) = \log_v u$ . Le domaine de définition est donné par :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : u > 0 \text{ et } v > 0 \text{ et } v \neq 1\}$$

Exemple

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \log_{(x-5)}(x^2 - 5x + 6) \quad 2) f(x) = \ln(x^2 - 6x + 9)$$

$$3) f(x) = \frac{\ln(x^2 - 7x + 12)}{\ln(x-1)}$$

Solution

$$1) f(x) = \log_{(x-5)}(x^2 - 5x + 6)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ et } x - 5 > 0 \text{ et } x - 5 \neq 1\}$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6)$$

$$= 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$x$	$-\infty$	$2$	$3$	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$S_1 = ]-\infty; 2[ \cup ]3; +\infty[$$

$$x - 5 > 0$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$x$	$-\infty$	$5$	$+\infty$	
$x - 5$		$-$	$0$	$+$

$$S_2 = ]5; +\infty[$$

$$x - 5 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1 + 5$$

$$\Leftrightarrow x \neq 6$$

$$S_3 = ]-\infty; 6[ \cup ]6; +\infty[$$

$$D_f = S_1 \cap S_2 \cap S_3$$

$$D_f = ]5; 6[ \cap ]6; +\infty[$$

$$2) f(x) = \ln(x^2 - 6x + 9)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x + 9 > 0\}$$

$$x^2 - 6x + 9 > 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(9)$$

$$= 36 - 36$$

$$\Delta = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-(-6)}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

$x$	$-\infty$		$3$		$+\infty$
$x^2 - 6x + 9$		$+$	$0$	$+$	

$$D_f = ]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$$

$$3) f(x) = \frac{\ln(x^2 - 7x + 12)}{\ln(x-1)}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x + 12 > 0 \text{ et } x - 1 > 0 \text{ et } \ln(x-1) \neq 0\}$$

$$x^2 - 7x + 12 > 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4(1)(12)$$

$$= 49 - 48$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$x$	$-\infty$	$3$		$4$		$+\infty$
$x^2 - 7x + 12$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$S_1 = ]-\infty; 3[ \cup ]4; +\infty[$$

$$x - 1 > 0$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$x$	$-\infty$		$1$		$+\infty$
$x - 1$		$-$	$0$	$+$	

$$S_2 = ]1; +\infty[$$

$$\ln(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) \neq \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x \neq 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2$$

$$S_3 = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

$$D_f = S_1 \cap S_2 \cap S_3$$

$$D_f = ]1; 2[ \cup ]2; 3[ \cup ]4; +\infty[$$

**Nota** : soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles de domaine de définition respectifs  $D_f$  et  $D_g$ , on a :

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{af} = D_f \quad \text{avec } a \text{ un réel non nul}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap D_{\frac{1}{g}}$$

### EXERCICE 47

Soit la fonction réelle d'une variable réelle  $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$

Le domaine de définition de la fonction  $f$  est :

- a)  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$  b)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  c)  $\mathbb{R}$  d)  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  e)  $ABR$

(Concours 2023-2024/Algèbre)

### EXERCICE 48

Soit  $f(x) = x^3 - 4x + 3x^2 - 12$ . Le domaine de définition de  $f$  est :

- a)  $\{12\}$  b)  $\mathbb{R} - \{12\}$  c)  $] -12, +\infty[$  d)  $\mathbb{R}$  e)  $\mathbb{R} - \{12, -12\}$

(Concours 2023-2024)

### EXERCICE 49

Soit la fonction  $f(x) = \frac{2 \ln(x+1)}{\ln x}$

Le domaine de définition de la fonction  $f$  est donné par :

- 1)  $] -\infty; +\infty[$  2)  $\left] \frac{1}{6}; 1[ \cup ] 1; +\infty[$  3)  $] 0; +\infty[$  4)  $\left] \frac{1}{6}; \frac{1}{2}[ \cup \left] \frac{1}{2}; 4[$  5)  $\left] \frac{1}{6}; 4[$

(Concours 2022-2023/Algèbre)

### Indication

$$D_f = ] 0; 1[ \cup ] 1; +\infty [$$

### EXERCICE 50

Le domaine de définition de  $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$  est

- a)  $\mathbb{R} - \{3\}$  b)  $] -\infty; -3[ \cup ] -3; +\infty[$  c)  $\mathbb{R} - \{-3; 3\}$  d)  $\mathbb{R} - \{-3\}$  e)  $\mathbb{R}$

(Concours 2022-2023/Analyse)

**Indication**

$$Df = \mathbb{R} - \{-3\} \text{ ou}$$

$$Df = ]-\infty; -3[ \cup ]-3; +\infty[$$

**EXERCICE 51**

Le domaine de définition de  $\frac{x^5+x^3-2}{x+3}$  est :

a)  $\mathbb{R}$  b)  $\mathbb{R} - \{-3\}$  c)  $\mathbb{R} - \{3\}$  d)  $\mathbb{R} - \{3; -3\}$  e)  $]-\infty; -3[ \cup ]-3; +\infty[$

(Concours 2018-2019/Analyse)

**EXERCICE 52**

Le domaine de définition de  $\frac{x^2-9}{x+3}$  est :

a)  $\mathbb{R}$  b)  $\mathbb{R} - \{-3\}$  c)  $\mathbb{R} - \{3\}$  d)  $\mathbb{R} - \{3; -3\}$  e)  $]-\infty; -3[ \cup ]-3; +\infty[$

(Concours 2017-2018/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

*Les érudits*

**EXERCICE 53**

Soit les fonctions d'une variable réelle  $f(x) = 2x + 1$  et  $g(x) = x^2 - 1$ .

Les domaines de définition des fonctions  $f(x)$  et  $\frac{1}{g(x)}$  sont respectivement :

a)  $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$  et  $[-1; 1]$  b)  $\mathbb{R}^*$  et  $\mathbb{R}$  c)  $[-\frac{1}{2}; 1]$  et  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  d)  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

(Concours 2018-2019/Algèbre)

**Indication**

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_{\frac{1}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

**EXERCICE 54**

Soit la fonction  $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{4x+9} + \sqrt{3x-8}$

Le domaine de définition de la fonction  $f(x)$  est donné par :

a)  $\mathbb{R}$  b)  $\{+3; -3\}$  c)  $\mathbb{R} - \{3; -3\}$  d)  $[\frac{8}{3}; +\infty[$

(Concours 2014-2015/Algèbre)

**Indication**

Poser  $f = f_1 - f_2 + f_3$  avec  $f_1 = \sqrt{2x+1}$ ,  $f_2 = \sqrt{4x+9}$  et  $f_3 = \sqrt{3x-8}$

$$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$$

$$D_f = [8/3; +\infty[$$

**EXERCICE 55**

Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-8x+15}}{\sqrt{x^2-2x-8}}$

- a)  $\mathbb{R} - \{-2; 4\}$  b)  $\mathbb{R} - \{3; 4\}$  c)  $\mathbb{R}$  d)  $\mathbb{R} - \{5; 2\}$  e)  $ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

**Indication**

$$D_f = ]-\infty; -2[ \cup [5; +\infty[$$

**EXERCICE 56**

Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{x+5}}$

- a)  $] -3; -1[ \cup [2; 3[$  b)  $\mathbb{R} - \{3; 4\}$  c)  $] -\infty; 5[ \cup ] \frac{3}{2}; +\infty[$  d)  $\emptyset$  e)  $ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

**Indication**

$$Df = ]-\infty; -5[ \cup [ \frac{3}{2}; +\infty[$$

**EXERCICE 57**

Soit la fonction  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-16}{x^2}}$

Le domaine de définition de la fonction f est :

- a)  $] -\infty; 4[ \cup ] 4; +\infty[$  b)  $] -\infty; 4[ \cup [ 4; +\infty[$  c)  $] -\infty; 4[ \cup ] 4; +\infty[$  d)  $ABR$

(Concours 2012-2013/Algèbre)

**Indication**

$$Df = ]-\infty; -4[ \cup [4; +\infty[$$

### EXERCICE 58

Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+2}}{\sqrt{9-x^2}}$

a)  $] -3; -1[ \cup ] 2; 3[$  b)  $\mathbb{R} - \{3; 4\}$  c)  $\mathbb{R} - \{2; 3\}$  d)  $\emptyset$  e)  $ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

#### Indication

$$D_f = ] -3; 3[$$

### EXERCICE 59

Soit la fonction  $f(x) = \sqrt{2x+3} - \sqrt{4x+4} + \sqrt{3x-8}$

Le domaine de définition de la fonction  $f(x)$  est donné par :

a)  $\mathbb{R}$  b)  $\{+3; -3\}$  c)  $\mathbb{R} - \{3; -3\}$  d)  $\left[\frac{8}{3}; +\infty[$

(Concours 2011-2012/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Algèbre)

### EXERCICE 60

Le domaine de définition de la fonction  $f(x) = \cos x$  est :

a)  $[-1; 1]$  b)  $\mathbb{R}$  c)  $\mathbb{R} - \{0\}$  d)  $\mathbb{R} - \{1\}$  e)  $] -\infty; +\infty[$

(Concours 2021-2022/Analyse)

### EXERCICE 61

On considère la fonction réelle d'une variable réelle  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$

Le domaine de définition de la fonction  $f$  est :

a)  $\mathbb{R}_+$  b)  $\mathbb{R} - \{-3\} \cup ] -2; +\infty[$  c)  $] -2; +\infty[$  d)  $[2; +\infty[$  e)  $ABR$

(Concours 2018-2019/Analyse)

#### Indication

$$D_f = ] -2; +\infty[$$

## EXERCICE 62

Soit la fonction  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Le domaine de définition de  $f$  est :

- a)  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  b)  $\mathbb{R} - \{12\}$  c)  $\mathbb{R} - \{0\}$  d)  $\mathbb{R}$  e)  $\mathbb{R} - \{12; -12\}$

(Concours 2017-2018/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

(Concours 2021-2022/Analyse)

(Concours 2022-2023/Analyse)

### Indication

$$Df = ]0; +\infty[$$

## EXERCICE 63

Le domaine de définition de la fonction  $f(x) = x$  est :

- a)  $\mathbb{C}$  b)  $\mathbb{R} - \{0\}$  c)  $\mathbb{R} - \{1\}$  d)  $\mathbb{R}$  e)  $]-\infty; +\infty[$

(Concours 2017-2018/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

## EXERCICE 64

Soit la fonction  $f(x) = -2\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-8} + \sqrt{3+2x}$

Le domaine de définition de  $f$  est :

- a)  $\{-3; 3\}$  b)  $[\frac{8}{3}; +\infty[$  c)  $]-\infty; -\frac{8}{3}]$  d)  $\mathbb{R}$

(Concours 2013-2014/Algèbre)

## II.2. Parité d'une fonction

Soit  $f$  une fonction réelle de domaine de définition  $D_f$ .

- $f$  est paire si et seulement si :  $\forall x \in D_f, -x \in D_f$  et  $f(x) = f(-x)$
- $f$  est impaire si et seulement si :  $\forall x \in D_f, -x \in D_f$  et  $f(-x) = -f(x)$

Il existe des fonctions qui ne sont ni paires ni impaires et une fonction ne peut pas être à la fois paire et impaire.

Nota :

$$(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -x^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

### Exemple :

Examiner la parité de chacune de fonctions suivantes

1)  $f(x) = 3x^2 + 5$

2)  $f(x) = 2x^3 - x$

3)  $f(x) = 4x^2 + x - 2$

### Résolution

1)  $f(x) = 3x^2 + 5$

Commençons par vérifier si elle est paire c'est-à-dire  $f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3 \cdot (-x)^2 + 5 \\ &= 3x^2 + 5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc  $f$  est paire.

2)  $f(x) = 2x^3 - x$

Commençons par vérifier si elle est paire c'est-à-dire  $f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2 \cdot (-x)^3 - (-x) \\ &= -2x^3 + x \\ &\neq f(x) \quad f \text{ n'est pas paire} \end{aligned}$$

Vérifions si elle est impaire c'est-à-dire  $f(-x) = -f(x)$

$$-f(x) = -2x^3 + x$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2 \cdot (-x)^3 - (-x) \\ &= -2x^3 + x \end{aligned}$$

$$= -f(x)$$

Donc  $f$  est impaire

$$3) f(x) = 4x^2 + x - 2$$

Commençons par vérifier si elle est paire c'est-à-dire  $f(x) = f(-x)$

$$f(-x) = 4.(-x)^2 + (-x) - 2$$

$$= 4x^2 - x - 2$$

$$\neq f(x) \quad f \text{ n'est pas paire}$$

Vérifions si elle est impaire c'est-à-dire  $f(-x) = -f(x)$

$$-f(x) = -4x^2 - x + 2$$

$$f(-x) = 4.(-x)^2 + (-x) - 2$$

$$= 4x^2 - x - 2$$

$$\neq -f(x) \quad f \text{ n'est pas impaire}$$

Donc  $f$  n'est ni paire ni impaire

### EXERCICE 65

Soit la fonction réelle d'une variable réelle  $f(x) = 2x^2 - 3$  est :

- a) impaire    b) paire    c) ni paire ni impaire    d) pas de bonne réponse

(Concours 2022-2023/Algèbre)

#### Indication

$f$  est paire

### EXERCICE 66

La fonction réelle d'une variable réelle  $f(x) = x^2 - 1$  est :

- a) Paire    b) impaire    c) ni paire ni impaire

(Concours 2012-2013/Algèbre)

#### Indication

$f$  est paire.

### EXERCICE 67

La fonction  $f(x) = 8x^5 - 5x^7$  est :

- a) Paire    b) impaire    c) ni paire ni impaire    d) ABR

(Concours 2013-2014/Algèbre)

### Indication

f est impaire

### EXERCICE 68

Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = \sin x$  . f est :

a) Paire b) non périodique c) impaire d) Périodique e) aucune bonne réponse

(Concours 2021-2022/Analyse)

### Indication

f est impaire et périodique

## II.3. Fonction injective, surjective et bijective

Soit f une fonction réelle

- f est injective si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\text{OU } \forall x_1, x_2 \in D_f: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

### Exemple et contre-exemple :

1)  $f(x) = 2x + 5$

f est injective ssi  $\forall x_1, x_2 \in D_f: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Donc f est injective

2)  $f(x) = 2x^2 - 3$

f est injective ssi  $\forall x_1, x_2 \in D_f: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow 2x_1^2 - 3 = 2x_2^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow 2x_1^2 = 2x_2^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{x_2^2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$$

Donc f n'est pas injective

- f est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in D_f: y = f(x)$$

**Exemple :**

$$f(x) = 2x - 3$$

$f$  est surjective car  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in D_f: y = f(x)$

$$y = f(x)$$

$$y = 2x - 3$$

$$x = \frac{y+3}{2}$$

$$2y = x - 3$$

$$y = \frac{x-3}{2}$$

Donc  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = \frac{y+3}{2} \in D_f: y = f(x)$

Nota : pour que  $f$  soit surjective, il suffit que la dernière expression trouvée ait pour domaine de définition l'ensemble d'arrivée de la fonction ( $\mathbb{R}$  dans plusieurs cas)

- $f$  est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

**EXERCICE 69**

On considère les fonctions d'une variable réelle  $f$  et  $g$  définies par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \rightarrow g(x) = x^2$$

- 1)  $f$  et  $g$  sont injectives    2)  $f$  et  $g$  ne sont pas surjectives    3)  $f$  est injective et  $g$  non injective    4) PBR

(Concours 2022-2023/Algèbre)

**Indication**

$f$  n'est pas injective et  $f$  n'est pas surjective.

$g$  n'est pas injective et  $g$  est surjective.

**EXERCICE 70**

La fonction réelle d'une variable réelle  $f(x) = x^2 + 10$  est :

- a) Injective    b) surjective    c) ni injective ni surjective    d) bijective

(Concours 2014-2015/Algèbre)

**Indication**

Donc  $f$  n'est ni injective ni surjective.

### EXERCICE 71

La fonction réelle d'une variable réelle  $f(x) = x^2 + 1$  est :

a) Injective      b) surjective      c) ni injective ni surjective      d) ABR

(Concours 2017-2018/Algèbre)

(Concours 2023-2024/Algèbre)

#### Indication

$f$  n'est ni injective ni surjective.

### EXERCICE 72

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  d'une variable réelle définies dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 3$$

La fonction  $f$  est : a) injective et surjective      b) injective et non surjective      c) ni injective ni surjective      d) pas de bonne réponse

(Concours 2020-2021/Algèbre)

#### Indication

$f$  n'est ni injective ni surjective.

### EXERCICE 73

La fonction réelle d'une variable réelle  $f(x) = x^3$  est :

a) Injective      b. surjective      c.ni injective ni surjective      d. bijective

(Concours 2011-2012/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Algèbre)

#### Indication

Donc  $f$  est bijective

### EXERCICE 74

On considère la fonctions  $f$  d'une variable réelle définie par :  $f(x) = -3x - 4$

La fonction  $f$  est :

a) Injective et non surjective      b) non injective et surjective      c) bijective      d) pas de bonne réponse

(Concours 2021-2022/Algèbre)

**Indication**

$f$  est bijective

## II.4. Composition des fonctions

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles à une variable réelle.

$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$  C'est-à-dire on remplace dans  $f$  la variable par la valeur de la fonction  $g$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$  C'est-à-dire on remplace dans  $g$  la variable par la valeur de la fonction  $f$

**Exemple:**

Soient  $f(x) = 2x + 1$  et  $g(x) = x - 1$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\ &= 2[g(x)] + 1 \\ &= 2(x - 1) + 1 \\ &= 2x - 2 + 1\end{aligned}$$

$$(f \circ g)(x) = 2x - 1$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] \\ &= [f(x)] - 1 \\ &= 2x + 1 - 1\end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = 2x$$

### EXERCICE 75

Soient les fonctions réelles d'une variable réelle  $f(x) = 2x + 1$

et  $g(x) = x^2 + 1$ .

Le couple  $(r, s)$  avec  $r = (f \circ g)(1)$  et  $s = (g \circ f)(1)$  est donné par :

a)  $(5, -5)$     b)  $(5, -10)$     c)  $(10, 5)$     d)  $(-5, 10)$     e)  $ABR$

(Concours 2017-2018/Algèbre)

**Indication**

$(r, s) = (5, 10)$

## EXERCICE 76

Considérons les fonctions réelles d'une variable réelle  $f(x) = 2x + 1$

$$\text{et } g(x) = x^2 - 1 .$$

Les quantités  $(f \circ g)(-5)$  et  $(g \circ f)(-5)$  sont données par :

- a) 49 et - 80 b) 50 et 80 c) 49 et 100 d) - 49 et - 80 e) ABR

(Concours 2018-2019/Algèbre)

### Indication

$$(f \circ g)(-5) = 49 \quad (g \circ f)(-5) = 80$$

## EXERCICE 77

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  d'une variable réelle définies dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 - 1, g(x) = 2x + 3 .$$

1. Les fonctions  $(f \circ g)(x)$  et  $(g \circ f)(x)$  sont données respectivement par :

- a)  $x^2 + 12x - 8$  et  $2x^2 + 1$  b)  $x^2 + x + 8$  et  $2x^2 + 5$  c)  $-x^2 + 12x + 8$  et  $x^2 - 1$   
d)  $x^2 + 12x + 8$  et  $2x^2 - 1$  e) pas de bonne réponse

2. Les valeurs de  $(f \circ g)(-1)$  et  $(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right)$  sont données respectivement par :

- a) 1 et - 3 b) 0 et  $-\frac{1}{2}$  c)  $\frac{1}{2}$  et 1 d) 0 et  $\frac{1}{2}$  e) pas de bonne réponse

(Concours 2020-2021/Algèbre)

### Indication

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 + 12x + 8 \quad (g \circ f)(x) = 2x^2 + 1$$

$$(f \circ g)(-1) = 0 \quad (g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

## EXERCICE 78

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  d'une variable réelle définies par :

$$f(x) = -3x - 4, g(x) = -2x^2 + 5$$

1. Les fonctions composées  $(f \circ g)(x)$  et  $(g \circ f)(x)$  sont données respectivement par :

- a)  $x^2 + 19$  et  $-18x^2 - 48x - 27$  b)  $-x^2 + 19$  et  $-18x^2 - 48x - 27$  c)  $x^2 + 19$  et  $-18x^2 - 48x + 27$  d)  $6x^2 + 19$  et  $-18x^2 - 48x - 27$  e)  $6x^2 - 19$  et  $-18x^2 - 48x - 27$

2. Les quantités  $(f \circ g)(-1)$  et  $(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right)$  valent respectivement :

a)  $-12$  et  $-\frac{5}{2}$    b)  $12$  et  $-\frac{5}{2}$    c)  $-13$  et  $-\frac{5}{2}$    d)  $-13$  et  $\frac{5}{2}$    e)  $-13$  et  $-\frac{15}{2}$

(Concours 2021-2022/Algèbre)

### Indication

$$(f \circ g)(x) = 6x^2 - 19 \quad (g \circ f)(x) = -18x^2 - 48x - 27$$

$$(f \circ g)(-1) = -13 \quad (g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-15}{2}$$

## II.5. Réciproque d'une fonction

Soit  $f(x) = y$ , pour trouver la réciproque de  $f$  notée  $f^{-1}$ , on procède comme suit :

- Remplacer  $x$  par  $y$  et  $y$  par  $x$  dans  $f(x) = y$
- Expliciter  $y$  à partir de l'équation obtenue

### Exemple :

Trouver la réciproque des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = 2x - 4$

2)  $f(x) = x^2 - 4$

Solution

1)  $f(x) = 2x - 4$

Soit  $f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 4 = y$

Remplaçons  $x$  par  $y$  et  $y$  par  $x$  :

$$2y - 4 = x$$

Explicitons  $y$

$$2y - 4 = x$$

$$\Leftrightarrow 2y = x + 4$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x+4}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$$

2)  $f(x) = x^2 - 4$

Soit  $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 4 = y$

Remplaçons  $x$  par  $y$  et vice-versa :

$$y^2 - 4 = x$$

Explicitons  $y$  :  $y^2 - 4 = x \Leftrightarrow y^2 = x + 4$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{x+4}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$$

### EXERCICE 79

Soit la fonction réelle d'une variable réelle  $f(x) = 2x^2 - 3$

La quantité  $f^{-1}(-2)$  est égale à :

- a)  $-\frac{1}{2}$     b)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     c)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     d)  $\frac{1}{2}$     e) pas de bonne réponse

(Concours 2022-2023/Algèbre)

#### Résolution

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2}} \qquad f^{-1}(-2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

### EXERCICE 80

Soit  $f(x) = 2x + 1$ .

La quantité  $q = f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$  où  $f^{-1}$  est la réciproque de  $f$  est donnée par :

- a)  $-1$     b)  $\frac{-1}{2}$     c)  $\frac{1}{2}$     d)  $\frac{-1}{4}$     e) ABR

(Concours 2017-2018/Algèbre)

#### Indication

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \qquad q = \frac{-1}{4}$$

### EXERCICE 81

La réciproque de la fonction  $f(x) = 2x + 1$  est donnée par :

- a)  $\frac{x+1}{2}$     b)  $\frac{x^2-1}{2}$     c)  $\frac{x-2}{2}$     d)  $\frac{2x-1}{2}$     e) ABR

(Concours 2018-2019/Algèbre)

#### Indication

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

### EXERCICE 82

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  d'une variable réelle définies dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 - 1, g(x) = 2x + 3.$$

1. La valeur de  $g^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)$  est :

- a)  $-\frac{9}{4}$    b)  $-\frac{4}{9}$    c)  $-15$    d)  $\frac{9}{4}$    e) pas de bonne réponse

2. Le domaine de définition de  $f^{-1}(x)$  est :

- a)  $[0; +\infty[$    b)  $[-1; +\infty[ \cup ]-\infty; 0[$    c)  $\mathbb{R}_+$    d)  $[-1; +\infty[ \cap ]-\infty; 0[$    e) pas de bonne réponse

(Concours 2020-2021)

### Indication

$$g^{-1}(x) = \frac{x-3}{2} \quad g^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{Dom } f^{-1} = [-1; +\infty[$$

### EXERCICE 83

On considère la fonction  $f$  d'une variable réelle définie par :  $f(x) = -3x - 4$

La valeur de  $f^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$  est :

- a)  $-\frac{9}{11}$    b)  $\frac{9}{11}$    c)  $-\frac{15}{11}$    d)  $-\frac{10}{9}$    e)  $\frac{10}{9}$

(Concours 2021-2022/Algèbre)

### Indication

$$f^{-1}(x) = -\frac{x+4}{3} \quad f^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{9}$$

### EXERCICE 84

On considère la fonction  $g$  d'une variable réelle définie par :  $g(x) = -2x^2 + 5$

Le domaine de définition de  $g^{-1}(x)$  est :

- a)  $]-\infty; 5] \cup [5; +\infty[$    b)  $]-\infty; -5] \cup [5; +\infty[$    c)  $[5; +\infty[$    d)  $]-\infty; 5]$    e) pas de bonne réponse

(Concours 2021-2022/Algèbre)

### Indication

$$y = -\sqrt{\frac{x-5}{2}} \quad \text{dom}(g^{-1}) = [5; +\infty[$$

## III. LIMITES

### III. 1 Introduction

D'une manière générale, pour calculer  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , on calcule  $f(a)$ , c'est-à-dire on remplace partout il y a la variable  $x$  par le réel  $a$ .

**Exemples :**

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} 2x + 5$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x + 5 = 2 \times 2 + 5 = 9$$

2)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{x^2 + 9}}$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{4^2 + 2 \times 4 - 8}{\sqrt{4^2 + 9}} = \frac{16}{5}$$

Mais, il arrive de fois qu'en remplaçant la variable par le réel  $a$ , on trouve ceci :

$\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ , ces formes ne sont pas de vraies valeurs, elles sont appelées formes indéterminées. Dans ce cas, il faut lever l'indétermination pour trouver la vraie valeur.

### III.2 Cas d'indétermination $\frac{0}{0}$

**1<sup>er</sup> cas : Fractions rationnelles**

Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ , pour lever l'indétermination, décomposer  $f(x)$  et  $g(x)$  tout en sachant que les deux fonctions ont un facteur commun  $x - a$ .

Pour la décomposition, nous pouvons utiliser la division euclidienne ou la méthode d'Horner.

**Exemple :**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

Résolution

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2^2 - 2 - 2}{2^2 - 3 \times 2 + 2} = \frac{0}{0} \text{ (F.I.)}$$

Levons l'indétermination

Dans ce cas, les deux fonctions ont un facteur commun :  $x - 2$

Utilisons la division euclidienne par  $x - 2$

d'effectuer la division euclidienne par  $x - 2$

$x^2 - x - 2$	$x - 2$	$x^2 - 3x + 2$	$x - 2$
$-x^2 + 2x$	$x+1$	$-x^2 + 2x$	$x-1$
<hr/> $x - 2$		<hr/> $-x + 2$	
$-x + 2$		$x - 2$	
<hr/> $0$		<hr/> $0$	

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) \text{ et } x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)}{(x-1)} \\ &= \frac{2+1}{2-1} = 3 \end{aligned}$$

## 2<sup>e</sup> cas : Fractions irrationnelles

Dans ce cas, on multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par l' (les) expression (s) conjuguée (s) du (des) terme (s) contenant les radicaux.

### Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

Résolution

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{\sqrt{3+1}-2}{3-3} = \frac{0}{0}$$

Levons l'indétermination.

Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué du numérateur (car c'est la seule expression qui contient le radical)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1+2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3+1}+2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Dans le cas de l'indétermination  $\frac{0}{0}$ , nous pouvons aussi utiliser la règle de l'Hospital pour lever l'indétermination. Cette règle stipule que pour lever l'indétermination, il suffit de dériver le numérateur et le dénominateur (Les dérivées sont traitées au point VII, nous vous recommandons d'étudier d'abord les dérivées pour continuer cette section).

Reprenons les deux exemples ci-haut :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$$

Résolution

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \frac{2^2-2-2}{2^2-3 \times 2+2} = \frac{0}{0} \text{ (F.I.)}$$

Pour lever l'indétermination, dérivons le numérateur et le dénominateur :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)'}{(x^2-3x+2)'} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2)'-(x)'-(2)'}{(x^2)'-(3x)'+(2)'} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1-0}{2x-3+0} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{2x-3} \\
&= \frac{2(2)-1}{2(2)-3} \\
&= \frac{4-1}{4-3} \\
&= \frac{3}{1} \\
&= 3
\end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{\sqrt{3+1}-2}{3-3} = \frac{0}{0}$$

Levons l'indétermination :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)'}{(x-3)'} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1})' - (2)'}{(x)' - (3)'} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} - 0}{1 - 0} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3+1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{4}} \\
&= \frac{1}{2 \times 2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

### III.3 Cas d'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$

Les érudits

La limite d'un polynôme lorsque  $x$  tend vers l'infini est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

#### 1<sup>er</sup> cas : Fractions rationnelles

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n}{bx^p}$  : trois cas sont possibles

si  $n = p$  alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n}{bx^p} = a/b$

si  $n < p$  alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n}{bx^p} = 0$

Si  $p < n$  alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n}{bx^p} = \infty$

Exemples :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 5}{5 - x + 3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{3x^3} = 2/3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 5}{5 - x + 3x^3 + 8x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{3x^3} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 5}{5 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{3x^3} = +\infty$$

## 2<sup>e</sup> cas : Fractions irrationnelles :

$$\begin{aligned} \text{A retenir que } \sqrt{x^2} &= |x| \\ &= \begin{cases} x & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ -x & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases} \end{aligned}$$

**Exemple :**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 2}}{2x + \sqrt{16x^2 + x + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}}{2x + \sqrt{16x^2 \left(1 + \frac{1}{16x} + \frac{1}{16x^2}\right)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2}}{2x + \sqrt{16x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |x|}{2x + |4x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - (-x)}{2x - 4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-2x} \\ &= -1 \end{aligned}$$

La règle de l'Hospital s'applique aussi dans ce cas d'indétermination.

### III.4 Cas d'indétermination $\infty - \infty$

Pour lever cette indétermination, on multiplie et on divise l'expression donnée par son conjugué. Et cela nous ramènera dans le cas de la forme  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Exemple :**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x - 2}) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x - 2}) = \infty - \infty \text{ (F.I.)} \end{aligned}$$

Levons l'indétermination en multipliant et en divisant  $(x - \sqrt{x^2 + 2x - 2})$  par son conjugué  $(x + \sqrt{x^2 + 2x - 2})$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x - 2}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 2x - 2})(x + \sqrt{x^2 + 2x - 2})}{(x + \sqrt{x^2 + 2x - 2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x\sqrt{x^2 + 2x - 2} - x\sqrt{x^2 + 2x - 2} - (x^2 + 2x - 2))}{(x + \sqrt{x^2 + 2x - 2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x + 2}{(x + \sqrt{x^2 + 2x - 2})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+2}{(x+\sqrt{x^2+2x-2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x+|x|} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{2x} \\
&= -1
\end{aligned}$$

**Nota :** Le cas d'indétermination  $0 \cdot \infty$  se ramene aux cas  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$

### EXERCICE 85

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{x^2-1}}{2} - \sqrt{1+2x-3x^2} \right)$  est égale à :

- a)  $\infty$    b)  $\frac{1}{2}$    c)  $\sqrt{3}$    d)  $-\infty$    e) *Aucune assertion n'est correcte*

(Concours 2023-2024/Analyse)

#### Indication

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{x^2-1}}{2} - \sqrt{1+2x-3x^2} \right) = \infty$$

### EXERCICE 86

Soit la fonction  $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$ .

Soit  $g(x) = ax + b$  l'asymptote oblique de la fonction  $f(x)$ . La limite de  $g(x)$  quand  $x$  tend vers  $-1$  vaut :

- a) 2   b)  $y = -2$    c)  $y = 1$    d)  $y = -1$    e) *Aucune assertion n'est correcte*

(Concours 2023-2024/Analyse)

#### Résolution

Nous devons d'abord trouver l'asymptote oblique (voir chapitre suivant)

$$g(x) = x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x + 2) = -1$$

### EXERCICE 87

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{x} \right) =$$

- a) 2    b)  $\frac{\infty+1}{\infty}$     c)  $+\infty$     d)  $(\infty+1)$     e) aucune bonne réponse

(Concours 2021-2022/Analyse)

#### Résolution

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{x} \right) = 2$$

### EXERCICE 88

Soit la fonction numérique  $f(x) = \left( \frac{1-\cos x}{x} \right)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  vaut :

- a) 0    b) 1    c)  $+\infty$     d)  $-\infty$     e) aucune bonne réponse

(Concours 2021-2022/Analyse)

#### Indication

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1-\cos x}{x} \right) = 0$$

Utiliser la règle de l'Hospital

### EXERCICE 89

Calculez :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9991x^{25} - 4000x^{28}}{58x^{25} + 100x^{28}}$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

#### Indication

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9991x^{25} - 4000x^{28}}{58x^{25} + 100x^{28}} = -40$$

## EXERCICE 90

Calculez et simplifiez

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 4 - \sqrt{x^2 + 75x + 7857})$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

### Indication

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 4 - \sqrt{x^2 + 75x + 7857}) = \frac{-83}{2}$$

## EXERCICE 91

On considère la fonction réelle d'une variable réelle  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ .

La  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$  est égale à :

- a)  $\frac{1}{4}$     b)  $\frac{-1}{4}$     c) 0    d)  $+\infty$     e)  $-\infty$

(Concours 2018-2019/Analyse)

### Indication

$$f'(x) = \frac{x+4}{2x+4\sqrt{x+2}} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{2x+4\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2}$$

## EXERCICE 92

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+x^3+x^4}{x}$  est égale à :

- a) 1    b)  $+\infty$     c) 0    d) 3    e)  $-\infty$     f) 2

(Concours 2018-2019/Analyse)

### Indication

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+x^3+x^4}{x} = \frac{2 \cdot 0 + 0^3 + 0^4}{0} = 2$$

## EXERCICE 93

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+1}{x} =$

- a)  $-\infty$     b) 1    c) 0    d)  $+\infty$     e)  $\frac{\infty}{\infty}$     f) 1.000

(Concours 2018-2019/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

(Concours 2022-2023/Analyse)

**Indication**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \infty$$

**EXERCICE 94**

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

- a) 3    b) 0    c)  $\frac{5}{4}$     d)  $\frac{3}{2}$     e) ABR

(Concours 2015-2016/Analyse)

**Indication**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{1^3 - 1}{1^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

**EXERCICE 95**

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

- a) 1    b) 0    c)  $\frac{1}{2}$     d)  $\frac{1}{4}$     e) ABR

(Concours 2015-2016/Analyse)

**Indication**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

**EXERCICE 96**

Calculez :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4521x^{150} - 5000x^{152}}{9758x^{150} + 100x^{152}}$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

**EXERCICE 97**

Calculez et simplifiez

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 9 - \sqrt{x^2 + 54x + 7859})$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

### Indication

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 9 - \sqrt{x^2 + 54x + 7859}) = -36$$

### EXERCICE 98

Calculez

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{12547+11x^{10520}-14000x^{10521}}}{24x^{10520}-2000^{10521}+214x^{1021}}$$

(Concours 2012-2013/Analyse)

### Indication

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{12547+11x^{10520}-14000x^{10521}}}{24x^{10520}-2000^{10521}+214x^{1021}} = 7$$

### EXERCICE 99

Calculez et simplifiez

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x - 10 - \sqrt{49x^2 - 126x + 7859})$$

(Concours 2012-2013/Analyse)

### Indication

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x - 10 - \sqrt{49x^2 - 126x + 7859}) = -1$$

### EXERCICE 100

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^5+11}{2x^4+3}$

- a) 3    b) 0    c)  $\infty$     d)  $\frac{3}{2}$     e) ABR

(Concours 2015-2016/Analyse)

### Résolution

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^5+11}{2x^4+3} = \frac{14}{5}$$

### EXERCICE 101

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+x^2+2x}{x}$  est égale à :

- a) 2    b) 3    c) 0    d)  $+\infty$     e)  $-\infty$

(Concours 2018-2019/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

(Concours 2023-2024/Analyse)

**Indication**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 + 2x}{x} = 2$$

**EXERCICE 102**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 + 2x}{x}$  est égale à :

- a) 0    b) 3    c) 2    d)  $+\infty$     e)  $-2$

(Concours 2020-2021/Analyse)

**EXERCICE 103**

Calculez :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{30001x^{21} - 3000x^{23}}{569x^{21} + 100x^{23}}$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

*Les érudits*

**EXERCICE 104**

Calculez et simplifiez

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 71 - \sqrt{x^2 + 83x + 7852})$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

**Indication**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 71 - \sqrt{x^2 + 83x + 7852}) = \frac{-225}{2}$$

**EXERCICE 105**

Calculez :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5281x^{20000} - 6000x^{20002}}{9x^{20000} + 100x^{20002}}$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

### EXERCICE 106

Calculez et simplifiez

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 35 - \sqrt{x^2 + 85x + 7871})$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

#### Indication

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 35 - \sqrt{x^2 + 85x + 7871}) = \frac{-225}{2}$$

### EXERCICE 107

On considère la fonction réelle  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par la formule

$$f(x) = \frac{2-x^2}{2+x^2}$$

Évaluez en vous justifiant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(Concours 2009-2010/Analyse)

### EXERCICE 108

Calculez :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2531x^{30} - 7000x^{32}}{9x^{30} + 800x^{32}}$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

### EXERCICE 109

Calculez et simplifiez

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 21 - \sqrt{x^2 + 35x + 7857})$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

#### Indication

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 21 - \sqrt{x^2 + 35x + 7857}) = \frac{7}{2}$$

## EXERCICE 110

Évaluez et simplifiez

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3 - \sqrt{x^2 + 3x + 800})$$

(Concours 2009-2010/Analyse)

**Indication**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3 - \sqrt{x^2 + 3x + 800}) = \frac{3}{2}$$

## EXERCICE 111

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 + 5x^2 - 2x}{x^2 + 2}$  est égale à :

a)  $-7$  b)  $-6$  c)  $7$  d)  $6$  e) aucune bonne réponse

(Concours 2020-2021/Analyse)

**Indication**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 + 5x^2 - 2x}{x^2 + 2} \cong 7$$

Les érudits

## IV. ASYMPTOTES

---

Il y a trois sortes d'asymptotes :

- ✓ Asymptote verticale
- ✓ Asymptote horizontale
- ✓ Asymptote oblique

### IV.1 Asymptote verticale (A.V.)

La droite d'équation  $x = a$  est asymptote verticale de la fonction  $f$  si et seulement si  $a$  est un adhérent de  $f$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Si la fonction est rationnelle, pour trouver l'équation de l'asymptote verticale, il suffit d'égaliser le dénominateur à 0 et résoudre l'équation formée et la (les) racine(s) trouvée(s) est (sont) l'(les) asymptote(s) verticale(s).

**Exemple :**

$$f(x) = \frac{2x+3}{5x-10}$$

$$5x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x = 10$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

La droite d'équation  $x = 2$  est A.V. car  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+3}{5x-10} = \frac{2 \cdot 2 + 3}{5 \cdot 2 - 10} = \frac{7}{0} = \infty$

### IV.2 Asymptote horizontale (A.H.)

La droite d'équation  $y = b$  est A.H. à la courbe de la fonction  $f$  si et seulement si  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Exemple :

$$f(x) = \frac{3x^2+4x-2}{x^2+3}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+4x-2}{x^2+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2}$$

$$b = 3$$

La droite d'équation  $y = 3$  est A.H.

### IV.3 Asymptote oblique (A.O.)

La droite d'équation  $y = mx + p$  est asymptote oblique à la courbe représentative de  $f$  ssi  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + p)] = 0$

$m$  et  $p$  sont donnés par :

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

**Exemple :**

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 5}{x - 1}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 5}{x(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 5}{x^2 - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2}$$

$$m = 2$$

$y = 2x + 3$  est l'équation de l' A.O.

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x^2 + x - 5}{x - 1} - 2x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x^2 + x - 5 - (x - 1)2x}{x - 1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x^2 + x - 5 - 2x^2 + 2x}{x - 1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{3x - 5}{x - 1} \right]$$

$$p = 3$$

**Nota :**

Une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est supérieur de 1 au degré du dénominateur admet une A.O. dont l'équation est obtenue en effectuant la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

**Exemple :**

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 5}{x - 1}$$

Le degré du numérateur est 2 et celui du dénominateur est 1.

Effectuons la division euclidienne du numérateur par le dénominateur pour trouver l'A.O.

$2x^2 + x - 5$	$x - 1$
$-2x^2 + 2x$	$2x + 3$
$3x - 5$	
$-3x + 3$	
$-2$	

$y = 2x + 3$  est l'équation de l'A.O.

### EXERCICE 112

Soit la fonction réelle d'une variable réelle  $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$

L'équation de l'asymptote oblique à la courbe de la fonction  $f(x)$  est :

a)  $y = -\frac{1}{2}x + 3$    b)  $y = x - 1$    c)  $y = \frac{3}{2}x - 1$    d)  $y = -\frac{3}{2}x + 1$    e)  $y = \frac{1}{2}x$

(Concours 2023-2024/Algèbre)

#### Indication

$$y = \frac{1}{2}x$$

### EXERCICE 113

Soit la fonction  $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$ . L'asymptote oblique de  $f(x)$  est :

a)  $y = x + 2$    b)  $y = x - 2$    c)  $y = -x + 2$    d)  $y = -x - 2$    e)  $y = 2x + 1$

(Concours 2023-2024/Analyse)

#### Indication

$$y = x + 2$$

### EXERCICE 114

Soit la fonction réelle  $f(x) = \frac{3x^2-2}{x-1}$ , l'équation de l'asymptote oblique est :

a)  $y = -x + 3$    b)  $y = x - 3$    c)  $y = -3x$    d)  $y = 3x + 3$    e) ABR

(Concours 2015-2016/Analyse)

#### Indication

$$y = 3x + 3$$

### EXERCICE 115

Soit la fonction réelle  $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 2}$ , l'équation de l'asymptote oblique est :

$$a) y = -x + 3 \quad b) y = 2x + 3 \quad c) y = -3x \quad d) y = 3x + 3 \quad e) ABR$$

(Concours 2015-2016/Analyse)

#### Indication

$$y = 2x + 3$$

### EXERCICE 116

Soit la fonction réelle  $f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$ , l'équation de l'asymptote oblique est :

$$a) y = -x + 1 \quad b) y = -1 \quad c) y = 1 \quad d) y = x - 1 \quad e) ABR$$

(Concours 2015-2016/Analyse)

#### Indication

$$y = -x$$

### EXERCICE 117

L'équation de l'asymptote oblique à la courbe C de la fonction  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  est :

$$a) y - 2 = 0 \quad b) y + 2 = 0 \quad c) x - 1 = 0 \quad d) y = x - 1 \quad e) ABR$$

(Concours 2018-2019/Analyse)

#### Indication

Cette équation est celle de l'asymptote horizontale et non oblique.

## V. CONTINUITE

---

$f$  est continue au point  $a$  si et seulement si :

- $a \in D_f$  ou  $f(a) \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Exemple :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

$f$  est continue au point  $x = 2$ , en effet:

(i)  $D_f = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$

$2 \in D_f$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

### EXERCICE 118

Pour quelle valeur de  $x$ , la fonction  $f(x) = \frac{x^3+x^2+2x}{x+1}$  est continue :

- a) 0   b) 1   c) 2   d) 3   e) Toutes les assertions sont bonnes

(Concours 2023-2024/Analyse)

#### Indication

$$D_c = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

### EXERCICE 119

Pour quelle(s) valeur(s) de  $x$ , la fonction  $\frac{x^2-9}{x-3}$  est discontinue :

- a) {3}   b)  $]-\infty; -3[$    c) {3; -3}   d) {-3}   e)  $\mathbb{N}$

(Concours 2022-2023/Analyse)

#### Indication

$$D_c = \mathbb{R} \setminus \{3\} \text{ ou } D_c = ]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$$

### EXERCICE 120

Pour quelle(s) valeur(s) de  $x$ , la fonction  $\frac{x^2-9}{x-3}$  est discontinue :

- a)  $\mathbb{N}$    b)  $\{-3\}$    c)  $\{3\}$    d)  $\{3; -3\}$    e)  $]-\infty; -3[$

(Concours 2018-2019/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

#### Indication

$$D_c = \mathbb{R} \setminus \{3\} \text{ ou } D_c = ]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty [$$

### EXERCICE 121

Pour quelle(s) valeur(s) de  $x$ , la fonction  $f(x) = \frac{7x^3+x^2}{x+1}$  est continue :

- a) 0   b) 1   c) 2   d) 3   e) *Toutes les assertions sont bonnes*

(Concours 2018-2019/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

(Concours 2022-2023/Analyse)

### EXERCICE 122

Pour quelle(s) valeur(s) de  $x$ , la fonction  $\frac{x^2-9}{x-3}$  est discontinue :

- a) 3   b)  $\{-3\}$    c)  $\mathbb{N} - \{3\}$    d)  $\{3; -3\}$    e)  $\mathbb{R} - \{3\}$

(Concours 2020-2021/Analyse)

### EXERCICE 123

Pour quelle(s) valeur(s) de  $x$ , la fonction  $\frac{x^2+9}{x-3}$  est discontinue :

- a)  $\mathbb{N}$    b)  $\{3; -3\}$    c)  $\{-3\}$    d)  $\{3\}$    e)  $]-\infty; -3[$

(Concours 2021-2022/Analyse)

## VI. DERIVEES

---

### VI.1 Quelques formules ou résultats sur les dérivées

$$1) c' = 0 \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

$$2) x' = 1$$

$$3) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$4) (u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$5) (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$6) (u^n)' = n u' u^{n-1}$$

$$7) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$8) \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2} \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

$$9) (\sin x)' = \cos x$$

$$10) (\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$11) (\cos x)' = -\sin x$$

$$12) (\cos u)' = -u' \sin u$$

$$13) (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$14) (\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$15) (\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$16) (\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$$

$$17) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$18) (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$19) (\text{Arc sin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$20) (\text{Arc sin } u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$21) (\text{Arc cos } x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$22) (\text{Arc cos } u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$23) (\text{Arc tan } x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$24) (\text{Arc tan } u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$25) (\text{Arc cot } x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$26) (\text{Arc cot } u)' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$27) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$28) (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$29) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$30) (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$31) (a^x)' = a^x \ln a$$

$$32) (a^u)' = u' a^u \ln a$$

$$33) (e^x)' = e^x$$

$$34) (e^u)' = u' e^u$$

$$35) (u^v)' = u^v \left( v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \text{ Avec } u > 0$$

## VI.2 La croissance et la décroissance d'une fonction

Soit  $f$  une fonction de domaine de définition  $D_f$  et  $E$  une partie de  $D_f$ .

- $f$  est croissante sur  $E$  si :  $\forall x_1, x_2 \in E, (x_1 < x_2) \Rightarrow \left[ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \right]$
- $f$  est décroissante sur  $E$  si :  $\forall x_1, x_2 \in E, (x_1 < x_2) \Rightarrow \left[ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0 \right]$

### Exemple

1) La fonction  $f(x) = 2x + 3$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , car

$$\begin{aligned} \text{Soient } 2 \text{ et } 5 : 2 < 5 &\Rightarrow \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{(2 \cdot 5 + 3) - (2 \cdot 2 + 3)}{5 - 2} \\ &= \frac{(10 + 3) - (4 + 3)}{3} \\ &= \frac{13 - 7}{3} \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Soient } -4 \text{ et } 0 : -4 < 0 &\Rightarrow \frac{f(0)-f(-4)}{0-(-4)} = \frac{(2 \cdot 0+3)-(2 \cdot (-4)+3)}{0+4} \\
&= \frac{(0+3)-(-8+3)}{4} \\
&= \frac{3-(-5)}{4} \\
&= \frac{8}{4} \\
&= 2 \geq 0
\end{aligned}$$

2. La fonction  $f(x) = x^2$  est décroissante sur  $]-\infty ; 0[$

$$\begin{aligned}
\text{Soient } -2 \text{ et } -1 : -2 < -1 &\Rightarrow \frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = \frac{(-1)^2-(-2)^2}{-1+2} \\
&= \frac{1-4}{1} \\
&= -3 \leq 0
\end{aligned}$$

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $]a ; b[$

- $f$  est croissante sur  $]a ; b[$  ssi  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in ]a ; b[$
- $f$  est décroissante sur  $]a ; b[$  ssi  $f'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]a ; b[$

Pour déterminer l'intervalle de croissance ou de décroissance d'une fonction, on procède comme suit :

- Calculer la dérivée première de la fonction
- Trouver les valeurs qui annulent la dérivée première (c'est-à-dire égaler la dérivée première à zéro et résoudre l'équation ainsi formée)
- Faire l'étude de signe de la dérivée première

Exemples :

$$1. f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 10$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x^3}{3}\right)' - \left(\frac{5x^2}{2}\right)' + (6x)' + (10)' \\
&= \frac{3x^2}{3} - \frac{10x}{2} + 6 + 0
\end{aligned}$$

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6)$$

$$= 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$f(2) = \frac{(2)^3}{3} - \frac{5(2)^2}{2} + 6(2) + 10 = \frac{8}{3} - 10 + 12 + 10 = \frac{8}{3} + 12 = \frac{8+36}{3} = \frac{44}{3}$$

$$f(3) = \frac{(3)^3}{3} - \frac{5(3)^2}{2} + 6(3) + 10 = 9 - \frac{45}{2} + 18 + 10 = 37 - \frac{45}{2} = \frac{74-45}{2} = \frac{29}{2}$$

$x$	$-\infty$	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{44}{3}$	$\searrow$	$\frac{29}{2}$	$\nearrow$

La fonction est croissante dans  $]-\infty ; 2] \cup [3 ; +\infty[$  et décroissante dans  $[2 ; 3]$

$$2. f(x) = x^2 + 3x + 10$$

$$f'(x) = (x^2)' + (3x)' + (10)'$$

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 10 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 10 = \frac{9-18+40}{4} = \frac{31}{4}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{31}{4}$	$\nearrow$

La fonction est croissante sur  $\left[-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$  et décroissante sur  $]-\infty ; -\frac{3}{2}]$

### VI.3 Extremum (maximum ou minimum) d'une fonction

Si  $f$  est une fonction dérivable sur  $I = ]a ; b[$  et  $x_0 \in I$  alors  $f$  admet un extremum en  $x_0$  si  $f'(x_0) = 0$  et  $f'$  change de signe en  $x_0$

Lorsque  $f'$  change de signe en passant du positif au négatif, l'extremum est un maximum

Lorsque  $f'$  change de signe en passant du négatif au positif, l'extremum est un minimum

Exemples

$$1. f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 10$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - \left(\frac{5x^2}{2}\right)' + (6x)' + (10)'$$

$$= \frac{3x^2}{3} - \frac{10x}{2} + 6 + 0$$

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6)$$

$$= 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$f(2) = \frac{(2)^3}{3} - \frac{5(2)^2}{2} + 6(2) + 10 = \frac{8}{3} - 10 + 12 + 10 = \frac{8}{3} + 12 = \frac{8+36}{3} = \frac{44}{3}$$

$$f(3) = \frac{(3)^3}{3} - \frac{5(3)^2}{2} + 6(3) + 10 = 9 - \frac{45}{2} + 18 + 10 = 37 - \frac{45}{2} = \frac{74-45}{2} = \frac{29}{2}$$

$x$	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$		$\nearrow \frac{44}{3}$	$\searrow \frac{29}{2}$	$\nearrow$

La courbe de  $f$  admet un maximum relatif  $M\left(2; \frac{44}{3}\right)$  et un minimum relatif  $m\left(3; \frac{29}{2}\right)$

$$2. f(x) = x^2 + 3x + 10$$

$$f'(x) = (x^2)' + (3x)' + (10)'$$

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 10 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 10 = \frac{9-18+40}{4} = \frac{31}{4}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$		$\frac{31}{4}$	

La courbe de  $f$  admet un minimum relatif  $m\left(-\frac{3}{2}; \frac{31}{4}\right)$

## VI.4 Sens de concavité et points d'inflexion

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivables sur  $I = ]a; b[$  et  $(C)$  sa courbe représentative.

Si  $\forall x \in I, f''(x) > 0$ , alors la courbe tourne sa concavité vers les  $y$  positifs

Si  $\forall x \in I, f''(x) < 0$ , alors la courbe tourne sa concavité vers les  $y$  négatifs

La courbe représentative admet un point d'inflexion en  $x_0$  si  $f''(x_0) = 0$  et  $f''$  change de signe en  $x_0$

Exemple

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 10$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^3}{3}\right)' - \left(\frac{5x^2}{2}\right)' + (6x)' + (10)' \\ &= \frac{3x^2}{3} - \frac{10x}{2} + 6 + 0 \end{aligned}$$

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x^2)' - (5x)' + (6)' \\ &= 2x - 5 + 0 \end{aligned}$$

$$f''(x) = 2x - 5$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^3}{3} - \frac{5 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2}{2} + 6\left(\frac{5}{2}\right) + 10 = \frac{\frac{125}{8}}{3} - \frac{5 \times \frac{25}{4}}{2} + 15 + 10 = \frac{125}{24} - \frac{125}{8} + 25 = \frac{125 - 375 + 600}{24} = \frac{350}{24}$$

$x$	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$		$0$	
$f(x)$	$\cap$	$\frac{350}{24}$	$\cup$

La courbe admet un point d'inflexion d'abscisse  $\frac{5}{2}$  et d'ordonnée  $\frac{350}{24}$

### NOTA

Un point critique d'une fonction est un point où la dérivée est nulle ou n'est pas définie.

Un point critique est la réunion de tous les points où la dérivée est nulle (appelés points stationnaires) avec tous les points où la dérivée n'est pas définie (appelés points singuliers)

### EXERCICE 124

Soit la fonction réelle d'une variable réelle  $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$

La quantité  $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$  est égale à :

- a)  $-\frac{3}{4}$    b)  $\frac{-5}{6}$    c)  $-\frac{11}{2}$    d)  $\frac{11}{4}$    e) ABR

(Concours 2023-2024)

### Indication

$$f'(x) = \frac{x^2-3}{2x^2} \qquad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{2}$$

### EXERCICE 125

Soit la fonction réelle d'une variable réelle  $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$

La fonction  $f$  admet les points critiques aux points d'abscisses  $x$  égal à :

- a)  $x = 1$  et  $x = -1$    b)  $x = 2$  et  $x = \sqrt{2}$    c)  $x = \sqrt{3}$  et  $x = -\sqrt{3}$    d)  $x = -3$    e) ABR

(Concours 2023-2024)

### Résolution

$$f'(x) = \frac{x^2-3}{2x^2}$$

Les points critiques sont  $\{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$

### EXERCICE 126

Soit la fonction polynomiale suivante définie dans  $\mathbb{R}$ .  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ .

Le point critique est :

- a) (0,1)   b) (1,2)   c) (1,0)   d) (2,1)   e) aucune bonne réponse

(Concours 2021-2022/Analyse)

#### Indication

$$f'(x) = 2x - 2$$

Le point critique est est (1, 0)

### EXERCICE 127

On considère la fonction réelle d'une variable réelle  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ .

La quantité  $f'(2)$  vaut :

- a)  $\frac{-3}{4}$    b)  $\frac{4}{3}$    c)  $\frac{-1}{2}$    d)  $\frac{-3}{8}$    e) ABR

(Concours 2018-2019/Analyse)

#### Indication

$$f'(x) = \frac{x+4}{(2x+4)\sqrt{x+2}} \quad f'(2) = \frac{3}{8}$$

### EXERCICE 128

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par la formule  $f(x) = \frac{(x^2-40)^{555}}{555}$

a) Calculez les dérivées  $f'(x)$  et  $f''(x)$

b) Évaluez les nombres  $f(-\sqrt{39})$  et  $f(\sqrt{41})$

(Concours 2012-2013/Analyse)

#### Indication

$$f'(x) = 2x(x^2 - 40)^{554} \quad f''(x) = (x^2 - 40)^{553} [2218x^2 - 80]$$

$$f(-\sqrt{39}) = \frac{-1}{555} \quad f(\sqrt{41}) = \frac{1}{555}$$

### EXERCICE 129

On donne  $f(x) = \frac{-1-3x}{2x+4}$ , que vaut  $[f'(-2)]^2$

- a) 72    b) 49    c) 9    d) 27    e) ABR

(Concours 2015-2016/Analyse)

#### Indication

$$f' = \frac{-10}{(2x+4)^2} \quad [f'(-2)]^2 = \infty$$
$$= \left[ \frac{-10}{(-4+4)^2} \right]^2$$

### EXERCICE 130

Evaluez  $f''(4)$  si  $y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x}}$  avec  $y = f(x)$

- a) 1.47    b) 3.22    c) 0.96    d) 5.63    e) ABR

(Concours 2015-2016/Analyse)

#### Indication

$$f' = \frac{3x^2-5}{2x\sqrt{x}} \quad f'' = \frac{12x^2\sqrt{x} - (3x^2-5)\left[\frac{3x}{\sqrt{x}}\right]}{4x^3} \quad f''(4) = 0.4921875$$

### EXERCICE 131

On donne  $(x) = \frac{-3-3x}{2x+4}$ , que vaut  $[f'(3)]^2$

- a)  $-\frac{5}{3}$     b) 49    c) 23    d)  $\frac{25}{9}$     e) ABR

(Concours 2015-2016/Analyse)

#### Indication

$$f'(x) = \frac{-6}{(2x+4)^2} \quad [f'(3)]^2 = \frac{9}{2500}$$

### EXERCICE 132

Evaluez  $f''(4)$  si  $f(x) = \frac{x^2+6}{\sqrt{x}}$

- a) 1.47    b) 3.22    c) 0.51    d) 5.63    e) ABR

(Concours 2015-2016/Analyse)

### Indication

$$f' = \frac{3x^2-6}{2x\sqrt{x}} \quad f'' = \frac{12x^2\sqrt{x}-(3x^2-6)\left[\frac{3x}{\sqrt{x}}\right]}{4x^3} \quad f''(9) = 0.268518518$$

### EXERCICE 133

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par la formule  $f(x) = \frac{(7-x^2)^{326}}{326}$

- Calculez les dérivées  $f'(x)$  et  $f''(x)$
- Evaluez les nombres  $f(-\sqrt{7})$ ,  $f(\sqrt{7})$  et  $f(-\sqrt{8})$

(Concours 2013-2014/Analyse)

### Indication

$$f'(x) = -2x(7-x^2)^{325} \quad f''(x) = (7-x^2)^{324}[1302x^2 - 14]$$
$$f(-\sqrt{7}) = 0 \quad f(\sqrt{7}) = 0 \quad f(-\sqrt{8}) = \frac{1}{326}$$

### EXERCICE 134

On donne  $f(x) = \frac{5-2x}{4+3x}$ , que vaut  $[f'(-2)]^2$

- a)  $\frac{169}{16}$     b)  $\frac{16}{100}$     c)  $\frac{13}{4}$     d)  $\frac{-13}{4}$     e) ABR

(Concours 2015-2016/Analyse)

### Indication

$$f' = \frac{-23}{(4+3x)^2} \quad [f'(-2)]^2 = \frac{529}{16}$$

### EXERCICE 135

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par la formule  $f(x) = \frac{(x^5+21)^{452}}{452}$

- Calculez les dérivées  $f'(x)$  et  $f''(x)$
- Evaluez les nombres  $f(\sqrt[5]{-22})$  et  $f(-\sqrt[5]{22})$

(Concours 2013-2014/Analyse)

### Indication

$$f'(x) = 5x^4(x^5+21)^{451} \quad f''(x) = (x^5+21)^{450}[11295x^8+420x^3]$$

### EXERCICE 136

On considère la fonction réelle  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par la formule

$$f(x) = \frac{2-x^2}{2+x^2}$$

- Calculez et simplifiez la dérivée  $f'(x)$
- Que vaut  $f'(-1)$
- Que vaut  $f(-2)$

(Concours 2009-2010/Analyse)

#### Indication

$$f'(x) = \frac{-8x}{(2+x^2)^2} \quad f'(-1) = \frac{8}{9} \quad f(-2) = \frac{-1}{3}$$

### EXERCICE 137

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par la formule  $f(x) = \frac{(1-x^4)^{150}}{150}$

- Calculez les dérivées  $f'(x)$  et  $f''(x)$
- Evaluez les nombres  $f(-1)$ ,  $f(\sqrt[4]{2})$  et  $f(0)$

(Concours 2013-2014/Analyse)

#### Indication

$$f'(x) = -4x^3(1-x^4)^{149} \quad f''(x) = (1-x^4)^{148}[-12x^2 + 12x^6 + 2384x^6]$$

### EXERCICE 138

La fonction  $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 10$  est strictement croissante sur

- $\mathbb{R}$
- $] -3; 0[$
- $] -\infty; -3[$
- $] 0; +\infty[$
- $] -\infty; -3[ \cup ] 0; +\infty[$

(Concours 2020-2021/Analyse)

#### Indication

$f$  est strictement croissante sur  $] -\infty; -3[ \cup ] 0; +\infty[$

### EXERCICE 139

Les points critiques de la fonction  $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 10$  sont :

a)  $x = 0$  et  $x = 2$  b)  $x = -3$  et  $x = 2$  c)  $x = 0$  et  $x = -10$  d)  $x = 0$  et  $x = -3$

(Concours 2020-2021/Analyse)

#### Indication

Les points critiques sont  $0$  et  $-3$

### EXERCICE 140

Soit la fonction  $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$ , la dérivée première de  $g(x)$  est :

a)  $g'(x) = (x - 3)(x + 2)$  b)  $g'(x) = 6x^2 - 6x - 30$  c)  $g'(x) = 6x^2 + 6x$

d)  $g'(x) = 6x^2 + 6x - 36$  e) aucune bonne réponse

(Concours 2020-2021/Analyse)

#### Indication

$g'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

### EXERCICE 141

La fonction  $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$  atteint son minimum relatif au point d'abscisse

a)  $x = 3$  b)  $x = -3$  c)  $x = -2$  d)  $x = 2$  e) aucune bonne réponse

(Concours 2020-2021/Analyse)

#### Indication

La fonction atteint son minimum relatif au point d'abscisse  $x = 3$  et d'ordonnée  $y = -76$

### EXERCICE 142

Soit la fonction polynomiale suivante définie dans  $\mathbb{R}$ .  $f(x) = x^2 e^x - 2x$

La dérivée première par rapport à  $x$ ,  $\frac{df}{dx}$  est :

a)  $2xe^x$  b)  $2x^2 e^x$  c)  $2xe^x - 2$  d)  $2x e^x + x^2 e^x - 2$  e) aucune bonne réponse

(Concours 2021-2022/Analyse)

### Indication

$$\frac{df}{dx} = 2x e^x + x^2 e^x - 2$$

### EXERCICE 143

Soit la fonction polynomiale suivante définie dans  $\mathbb{R}$ .  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ .

$$f(-1) = 0.$$

a) est la droite passant par le point  $(-1,0)$  b) Est la tangente à la fonction  $f(x)$

c) Est un minimum d) Est un maximum e) aucune bonne réponse

(Concours 2021-2022/Analyse)

### Indication

L'équation de la tangente d'une fonction  $f(x)$  en  $x = a$  est donnée par :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

La fonction admet  $(-1, 0)$  comme le minimum.

### EXERCICE 144

Soit la fonction suivante définie dans  $\mathbb{R}$ .  $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$

La dérivée seconde par rapport à  $x$ ,  $\frac{d^2f}{dx^2}$  est

a) 1      b)  $2x$       c) 2      d)  $2x - 2$       e) aucune bonne réponse

(Concours 2021-2022/Analyse)

### Indication

$$\frac{df}{dx} = \frac{3}{(x+1)^2} \qquad \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{-6}{(x+1)^3}$$

## VII. RENDRE RATIONNEL LE DENOMINATEUR D'UNE FRACTION

### 1<sup>er</sup> cas : Le dénominateur est un monôme :

D'une manière générale, on a :

$$\frac{a}{\sqrt[n]{x^p}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{x^{n-p}}}{\sqrt[n]{x^p} \cdot \sqrt[n]{x^{n-p}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{x^{n-p}}}{x}$$

En particulier, pour les radicaux d'indice deux, on multiplie les deux termes de la fraction par ce monôme irrationnel.

Exemples :

$$\begin{aligned} 1) \frac{5}{3\sqrt[3]{2}} &= \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2^{3-1}}}{3\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^{3-1}}} \\ &= \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{3\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} \\ &= \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{3\sqrt[3]{8}} \\ &= \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{3 \cdot 2} \\ &= \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{1}{5\sqrt{3}} &= \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{15} \end{aligned}$$

### 2<sup>e</sup> cas : Le dénominateur est un binôme ou un trinôme :

On multiplie les deux termes de la fraction par le conjugué du dénominateur.

Voici quelques cas :

Dénominateur	Conjugué	Produit
$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$	$\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$	$a - b$
$\sqrt{a} \pm b$	$\sqrt{a} \mp b$	$a - b^2$
$a \pm \sqrt{b}$	$a \mp \sqrt{b}$	$a^2 - b$
$\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$a \pm b$

$\sqrt[3]{a} \pm b$	$\sqrt[3]{a^2} \mp b\sqrt[3]{a} + b^2$	$a \pm b^3$
$a \pm \sqrt[3]{b}$	$a^2 \mp a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}$	$a^3 \pm b$

### EXERCICE 145

La quantité  $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$  est égale à

a)  $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$    b)  $\sqrt{2} - \sqrt{3}$    c)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$    d)  $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

(Concours 2014-2015/Algèbre)

#### Indication

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

### EXERCICE 146

La quantité  $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$  est égale à :

a)  $\frac{\sqrt{5}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2}$    b)  $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{5-2\sqrt{6}}$    c)  $\frac{\sqrt{5}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{5-2\sqrt{6}}$    d)  $\frac{\sqrt{5}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}$    e) ABR

(Concours 2018-2018/Algèbre)

#### Indication

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$$

## VIII. COMPLEMENTS

---

### EXERCICE 147

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  par  $f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x+2}$ . La quantité  $a - b + c$  telle que pour tout  $x \neq -2$ ,  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$  est égale :

a) - 11   b) 8   c) - 10   d) 13   e) 12

(Concours 2023-2024/Algèbre)

#### Indication

$$a = 2, b = -1 \text{ et } c = 3$$

$$a - b + c = 6$$

### EXERCICE 148

Le domaine de variation de la fonction  $f(x) = \cosinus x$  est

a)  $\mathbb{R} - \{1\}$    b)  $] -\infty ; +\infty[$    c)  $\mathbb{R}$    d)  $\mathbb{R} - \{0\}$    e)  $[-1; 1]$

(Concours 2022-2023/Analyse)

#### Indication

Pour tout  $x \in \mathbb{R} : \cosinus x \in [-1 ; 1]$

### EXERCICE 149

$$\text{Soit } f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{4x+9} + \sqrt{3x-8}.$$

La valeur de  $f(-5)$  de la fonction au point  $x=5$  est égale à :

a. - 2   b. -3   c. -8   d. aucune bonne réponse

(Concours 2014-2015/Algèbre)

#### Indication

Remplacer partout il y a  $x$  par -5

### EXERCICE 150

On considère un angle  $\theta$  tel que  $\sin \theta + \cos \theta = r$ .

Le nombre réel  $r$  appartient dans l'intervalle :

- a.  $[-1; 1]$  b.  $]-1; 1[$  c.  $]-2; 2]$  d. *pas de bonne réponse*

(Concours 2014-2015/Algèbre)

#### Indication

$$\sin \theta + \cos \theta = r$$

On sait que pour tout angle  $\theta$ , on a :  $\sin \theta \in [-1; 1]$  et  $\cos \theta \in [-1; 1]$

### EXERCICE 151

On considère un angle  $\theta$  tel que  $\sin \theta + \cos \theta = r$ .

Le réel  $R = 100 \cos \theta \sin \theta$  est donné par :

- a.  $r^2$  b.  $\frac{r^2-1}{2}$  c.  $r^2 - 1$  d. *aucune bonne réponse*

(Concours 2014-2015/Algèbre)

#### Indication

$$R = 50(r^2 - 1)$$

### EXERCICE 152

Soit la fonction  $f(x) = \sqrt{x^3} + x^2 - x - 1$ . Donner la valeur de  $f(2)$

- a.  $\sqrt{8} - 1$  b.  $\sqrt{27} + 5$  c.  $27 - \sqrt{3}$  d.  $1 + \sqrt{8}$  e.  $2\sqrt{2} + 1$

(Concours 2018-2019/Analyse)

### EXERCICE 153

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\sin \theta = a$ .

$\cos(2\theta)$  exprimé en fonction de  $a$  vaut :

- a.  $2a^2 - 1$  b.  $1 - 2a^2$  c.  $1 + a$  d.  $\frac{1+a}{2}$

(Concours 2012-2013/Algèbre)

#### Indication

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

### EXERCICE 154

On considère un angle  $\theta$  tel que  $\sin \theta + \cos \theta = a$ .

Le réel  $K = \sin \theta \cos \theta$  est donné par :

- a.  $a^2 + 1$       b.  $a^2$       c.  $a^2 - 1$       d)  $-2a + 1$       e. pas de bonne réponse

(Concours 2022-2023/Algèbre)

#### Indication

$$K = \frac{a^2 - 1}{2}$$

### EXERCICE 155

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\sin \theta = a$ .

Le réel  $L = \operatorname{tg} \theta$ , exprimé en fonction de  $a$  vaut :

- a.  $\frac{1}{1-a}$       b.  $\frac{a-1}{\sqrt{1-a^2}}$       c.  $\sqrt{\frac{a^2}{1-a^2}}$       d. pas de bonne réponse

(Concours 2012-2013/Algèbre)

#### Indication

$$L = \sqrt{\frac{a^2}{1-a^2}}$$

### EXERCICE 156

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\sin \theta = a$ .

Le réel  $K = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$  exprimé en fonction de  $a$  vaut :

- a.  $2a^2 - 1$       b.  $a^2 - 2$       c.  $1 + a$       d. pas de bonne réponse

(Concours 2012-2013/Algèbre)

#### Indication

$$K = 2a^2 - 1$$

### EXERCICE 157

Quelles sont les expressions factorisées de :  $4x^2 - 12x + 9$  ?

a)  $(2x - 3)^2$  b)  $(2x + 3)(2x - 3)$  c)  $(2x + 3)^2$  d)  $(x - \frac{3}{2})^2$  e) ABR

(Concours 2017-2018/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

(Concours 2022-2023/Analyse)

#### Indication

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$$

### EXERCICE 158

Soit la fonction  $f(x) = \sqrt{x^3} + x^2 - x - 1$ . Deux assertions donnent la valeur de  $f$  pour  $x = 3$ :

a. 9 b.  $\sqrt{27} + 5$  c.  $27 - \sqrt{3}$  d.  $\sqrt{9} - 5$  e.  $\sqrt{3^3} + 5$

(Concours 2017-2018/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

(Concours 2022-2023/Analyse)

### EXERCICE 159

On considère un angle  $\theta$  tel que  $\sin \theta + \cos \theta = a$ .

Le réel  $K = \sin \theta \cos \theta$  est donné par :

a.  $a^2$  b.  $\frac{a^2-1}{2}$  c.  $a^2 - 1$  d. aucune bonne réponse

(Concours 2011-2012/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Algèbre)

#### Indication

$$K = \frac{a^2-1}{2}$$

### EXERCICE 160

On considère un angle  $\theta$  tel que  $\sin \theta + \cos \theta = a$ .

Le réel  $L = (\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)$  est donné par :

a.  $a^2$       b.  $\frac{a^2-1}{2}$       c.  $a^2 - 1$       d. aucune bonne réponse

(Concours 2011-2012/Algèbre)

(Concours 2013-2014/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Algèbre)

#### Indication

$$L = \frac{a(3-a^2)}{2}$$

### EXERCICE 161

Déterminer  $m$  pour que les trois nombres  $\log_a 2, \log_a(5^m - 2), \log_a(5^m + 2)$  soient en progression arithmétique.

(Concours 2008-2009/Algèbre)

#### Indication

Trois nombres  $a, b$  et  $c$  forment une progression arithmétique si et seulement si le terme du milieu est la moyenne arithmétique des termes qui l'encadrent.

$$b = \frac{a+c}{2}$$

$$m = \log_5 6$$

### EXERCICE 162

On considère un angle  $\theta$  tel que  $\sin \theta + \cos \theta = a$ .

Le réel  $M = \sin 2\theta$  est donné par :

a)  $2a^2$       b)  $a^2 - 1$       c)  $2(a^2 - 1)$       d) 1

(Concours 2013-2014/Algèbre)

#### Indication

$$M = a^2 - 1$$

### EXERCICE 163

Soit  $f(x) = \sqrt{2x + 3} - \sqrt{4x + 9} + \sqrt{3x - 8}$ .

La valeur de  $f(-5)$  de la fonction au point  $x=-5$  est égale à :

- a. -2   b. 2   c.  $\frac{1}{4}$    d. aucune bonne réponse

(Concours 2019-2020 / Algèbre)

#### Indication

On sait que la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas dans  $\mathbb{R}$ . Donc la fonction n'est pas définie au point  $x=-5$



# DEUXIÈME PARTIE : TRIGONOMETRIE ET CALCUL

# I. UNITES D'ARCS ET D'ANGLES

---

$$(360^\circ = 400 \text{ gr} = 2\pi \text{ rad})$$

$$\Leftrightarrow (180^\circ = 200 \text{ gr} = \pi \text{ rad})$$

## I.1 Conversion Degré-grade

$$180^\circ = 200 \text{ gr}$$

$$\Leftrightarrow \frac{180^\circ}{180} = \frac{200}{180} \text{ gr}$$

$$\Leftrightarrow 1^\circ = \frac{10}{9} \text{ gr}$$

Pour convertir degré en grade, il suffit de multiplier le nombre de degré donné par  $\frac{10}{9}$  pour avoir sa valeur correspondante en grade.

Inversement, pour convertir de grade en degré, il suffit de multiplier le nombre donné par  $\frac{9}{10}$ .

### Exemples:

1) Convertir

a)  $50^\circ = ? \text{ gr}$

b)  $270^\circ = ? \text{ gr}$

Résolution :

a) On sait que  $1^\circ = \frac{10}{9} \text{ gr}$

$$\Rightarrow 50^\circ = 50 \times \frac{10}{9} \text{ gr}$$

$$50^\circ = 55,555 \dots \text{ gr}$$

b) On sait que  $1^\circ = \frac{10}{9} \text{ gr}$

$$\Rightarrow 270^\circ = 270 \times \frac{10}{9} \text{ gr}$$

$$50^\circ = 300 \text{ gr}$$

2)  $100 \text{ gr} = ?^\circ$

On sait que  $1 \text{ gr} = \frac{9}{10}^\circ$

$$\Rightarrow 100^\circ = 100 \times \frac{9}{10} \text{ gr}$$

$$100 \text{ gr} = 90^\circ$$

## I.2 Conversion Degré-radians

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$\Leftrightarrow \frac{180^\circ}{180} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$\Leftrightarrow 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

Pour convertir degré en radians, il suffit de multiplier le nombre de degré donné par  $\frac{\pi}{180}$  pour avoir sa valeur correspondante en radians.

Inversement, pour convertir de grade en degré, il suffit de multiplier le nombre donné par  $180/\pi$ .

### Exemples :

Convertir :

a)  $45^\circ = ? \text{ rad}$

b)  $\frac{2\pi}{3} \text{ rad} = ?^\circ$

Résolution

a) On sait que  $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$

$$\Rightarrow 45^\circ = 45 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

b) On sait que  $1 \text{ rad} = 180/\pi^\circ$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \times \frac{180}{\pi}$$

$$\frac{2\pi}{3} \text{ rad} = 120^\circ$$

## I.3 Conversion grade-radians

$$200 \text{ gr} = \pi \text{ rad}$$

$$\Leftrightarrow \frac{200}{200} \text{ gr} = \frac{\pi}{200} \text{ rad}$$

$$\Leftrightarrow 1 \text{ gr} = \frac{\pi}{200} \text{ rad}$$

Pour convertir grade en radians, il suffit de multiplier le nombre de grade donné par  $\frac{\pi}{200}$  pour avoir sa valeur correspondante en radians.

Inversement, pour convertir de grade en degré, il suffit de multiplier le nombre donné par  $\frac{200}{\pi}$ .

## I.4 Conversion Degré décimal – Degré minute, seconde

Pour convertir un degré décimal en degré minute et seconde, on procède comme suit :

- Multiplier la partie décimale par 60.
- Après multiplication, la partie entière trouvée constitue le nombre de minutes.
- Si dans le nombre de minutes, il y a une partie décimale, la multiplier par 60 pour avoir la valeur correspondante en seconde.

Exemple

Convertir le degré décimal suivant en degré minute seconde  $25^{\circ},48$

$$\begin{aligned}25^{\circ},48 &= 25^{\circ} + (0,48 \times 60) \\ &= 25^{\circ} + 28,8' \\ &= 25^{\circ}28' + (0,8) \times 60 \\ &= 25^{\circ} 28'48''\end{aligned}$$

Pour convertir le degré minute seconde en degré décimal, on procède comme suit : On additionne le nombre de degré, le nombre de minutes divisé par 60 et le nombre de seconde divisé par 3600.

$$d^{\circ}m's'' = d + \frac{m}{60} + \frac{s}{3600}$$

Exemple :

Convertir en degré décimale la valeur suivante :  $34^{\circ} 48'56''$

$$\begin{aligned}34^{\circ} 48'25'' &= 34 + \frac{48}{60} + \frac{56}{3600} \\ &= 34 + 0,8 + 0,015555555555 \\ &= 34,81555 \dots^{\circ}\end{aligned}$$

### EXERCICE 164

Convertir en degré décimal l'angle au centre  $\alpha = 58^{\circ}25'53''$

Réponse :

1. 59,1849°
2. 57,6378 °
3. 58,4314°
4. 4,3559°
5. 25,3857 °

(Concours 2022-2023/Trigo et calcul)

### EXERCICE 165

Convertir 50,8836° en grades

Réponse :

(Concours 2022-2023/Trigo et calcul)

### EXERCICE 166

Compléter le tableau suivant :

Angle $\theta$ en degré	Angle $\theta$ en radian
30°	$\frac{\pi}{6}$
.....	$\frac{\pi}{3}$
270°	.....
360°	....

(Concours 2016-2017/Trigo et calcul)

### EXERCICE 167

Compléter le tableau suivant :

Angle $\theta$ en degré	Angle $\theta$ en radian
$30^\circ$	$\frac{\pi}{6}$
.....	$\frac{4\pi}{3}$
$180^\circ$	.....
.....	$\frac{\pi}{2}$

(Concours 2018-2019/Trigo et calcul)

### EXERCICE 168

Que vaut en radians un angle de  $315^\circ$  ?

1.  $\frac{\pi}{4}$     2.  $\frac{3\pi}{4}$     3.  $2\pi$     4.  $\frac{7\pi}{4}$     5.  $\frac{5\pi}{3}$

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

#### Indication

On sait que  $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$

### EXERCICE 169

Que vaut en degré l'angle  $\frac{4\pi}{3} \text{ rad}$  ?

1.  $360^\circ$     2.  $120^\circ$     3.  $45^\circ$     4.  $135^\circ$     5.  $240^\circ$

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

#### Indication

On sait que  $1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi}^\circ$

### EXERCICE 170

Soit un angle au centre de  $56^{\circ} 27' 48''$ . En degré décimal, cet angle au centre vaut :

- a)  $56,14159$     b)  $56,25584$     c)  $56,00000$     d)  $56,0081$     e)  $56,46333$

(Concours 2020-2021/Trigo et calcul)

### EXERCICE 171

La période d'un pendule est donnée par la relation  $p = 2\sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}$  où  $L$  est la longueur (en mètre),  $\theta$  est l'angle d'oscillation et  $g = 9,8$  (constante de gravité). La valeur de l'angle  $\theta$  vaut en degré si on donne  $L = 26 \text{ m}$ ,  $p = 2,3 \text{ s}$

- a)  $120^{\circ}$     b)  $150^{\circ}$     c)  $60^{\circ}$     d)  $45^{\circ}$     e) *pas de bonne réponse*

(Concours 2020-2021/Trigo et calcul)

#### Indication

$$\theta = 60,1004607^{\circ}$$

### EXERCICE 172

Dans un cercle, l'angle au centre mesure  $45^{\circ} 25' 40''$ . En degré décimal, cet angle vaut :

- 1)  $18,117$     2)  $30,328$     3)  $40''$     4)  $35^{\circ}$     5)  $45,427$

(Concours 2021-2022/Trigo et calcul)

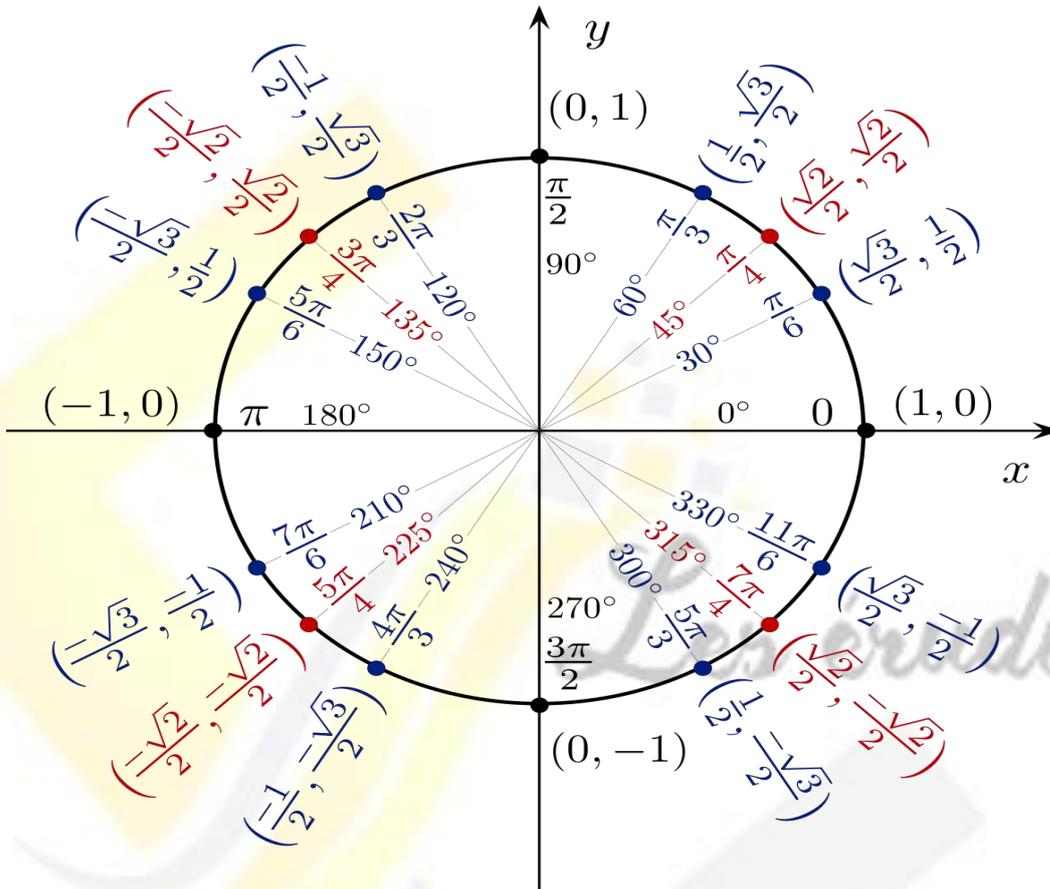
### EXERCICE 173

La conversion de  $45^{\circ} 25' 40''$  en grade vaut :

- 1)  $50 \text{ gr}$     2)  $20 \text{ gr}$     3)  $58 \text{ gr}$     4)  $15 \text{ gr}$     5) *Aucune réponse n'est vraie*

(Concours 2021-2022/Trigo et calcul)

## II. RAPPORTS TRIGONOMETRIQUES DES QUELQUES ANGLES REMARQUABLES



La première valeur est pour le cos et la deuxième pour sinus.

$\theta$	Premier quadrant					Deuxième quadrant				Troisième quadrant				Quatrième quadrant			
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	$0\pi$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \theta$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	
$\sec \theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2		-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2		2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\operatorname{cosec} \theta$		2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	-1	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	

### EXERCICE 174

On donne  $y = \sin(30^\circ) + \cos(60^\circ)$ . Notre  $y$  est donné par :

- a. 6    b. 3    c.  $\frac{1}{2}$     d. 1    e. Aucune bonne réponse

(Concours 2023-2024/Trigo et calcul)

### EXERCICE 175

Trouver la valeur de  $y$  avec l'équation :  $y = \tan(30^\circ) \times \cot(30^\circ)$

- a.  $y = -1$     b.  $y = 1$     c.  $y = 30$     d.  $y = 20$     e.  $y = 14$

(Concours 2023-2024/Trigo et calcul)

### EXERCICE 176

Donner la valeur numérique de :

$$\sin 30^\circ =$$

$$\sin 60^\circ =$$

$$\tan 45^\circ =$$

$$\sin (2\pi + 30^\circ) =$$

$$\sin (2\pi + 60^\circ) =$$

$$\tan (\pi + 45^\circ) =$$

(Concours 2016-2017/Trigo et calcul)

### EXERCICE 177

Donner la valeur numérique de :

$$\sin 30^\circ =$$

$$\cos 120^\circ =$$

$$\tan 60^\circ =$$

$$\sin (\pi + 60^\circ) =$$

$$\cotg (\pi + 45^\circ) =$$

(Concours 2018-2019/Trigo et calcul)

### EXERCICE 178

$\sin 60^\circ$  vaut :

- 1) 0    2) 7    3)  $\frac{1}{2}$     4)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     5)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(Concours 2021-2022/Trigo et calcul)

## EXERCICE 179

$tg 45^\circ$  vaut :

- 1) 1      2) 0      3) 2      4) 5      5)  $\sqrt{3}$

(Concours 2021-2022/Trigo et calcul)

# III. RELATIONS ET GRANDES FORMULES TRIGONOMETRIQUES

## III.1 Relations fondamentales

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

## III.2 Quelques relations dérivées

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha = \sec^2 \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\sec^2 \alpha + \tan^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$$

## III.3 Angles opposés

$$\cos(-a) = \cos a$$

$$\sin(-a) = -\sin a$$

$$\tan(-a) = -\tan a$$

$$\cot(-a) = -\cot a$$

$$\sec(-a) = \sec a$$

$$\operatorname{cosec}(-a) = -\operatorname{cosec} a$$

## III.4 Angles complémentaires et anti-complémentaires

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \operatorname{cosec} a$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sec a$$

### Anti-complémentaires

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\operatorname{cosec} a$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sec a$$

## III.5 Angles supplémentaires et anti- supplémentaires

### Supplémentaires

$$\cos(\pi - a) = -\cos a$$

$$\sin(\pi - a) = \sin a$$

$$\tan(\pi - a) = -\tan a$$

$$\cot(\pi - a) = -\cot a$$

$$\sec(\pi - a) = -\sec a$$

$$\operatorname{cosec}(\pi - a) = \operatorname{cosec} a$$

### Anti- supplémentaires

$$\cos(\pi + a) = -\cos a$$

$$\sin(\pi + a) = -\sin a$$

$$\tan(\pi + a) = \tan a$$

$$\cot(\pi + a) = \cot a$$

$$\sec(\pi + a) = -\sec a$$

$$\operatorname{cosec}(\pi + a) = -\operatorname{cosec} a$$

## III.6 Formules d'addition des angles

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

## III.7 Formules de multiplication par 2

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Relations dérivées :

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

$$\cot^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}$$

### III.8 Formules de division par 2

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2} - 1$$

$$\cos a = 1 - 2\sin^2 \frac{a}{2}$$

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$\tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$\sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$\cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

#### EXERCICE 180

Calculer l'expression  $\cos^2(200^\circ) + \sin^2(200^\circ)$  :

- a.  $\infty$     b.  $-1$     c.  $1$     d.  $200$     e. Aucune bonne réponse

(Concours 2023-2024/Trigo et calcul)

#### EXERCICE 181

a) Montrer que  $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b$

b) Calculer  $y = 2 \sin 45^\circ \cos 15^\circ$

c)  $0.3183098 \times \frac{22}{7} \times 3,141593 \times 10^6$

(Concours Trigo et calcul)

#### EXERCICE 182

En sachant que  $\cos x = \frac{1}{3}$ . La valeur de  $\sin x$  est :

1.  $\frac{1}{2}$     2.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     3.  $1$     4.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$     5.  $\frac{2}{3}$

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

### EXERCICE 183

En fonction de  $\sin x$  et  $\cos x$ . L'expression  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$  s'écrit :

$$1. \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \quad 2. \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \quad 3. \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$$

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

#### Indication

On sait que  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

### EXERCICE 184

On suppose que  $\sin \theta = 0,6$  et  $\theta$  appartient au deuxième quadrant. Les valeurs de  $\cos \theta$  et  $\tan \theta$  sont données respectivement par :

$$a) -0,8 \text{ et } 0,75 \quad b) -0,75 \text{ et } 0,85 \quad c) -0,85 \text{ et } -0,75 \quad d) -0,75 \text{ et } -0,8 \quad e) -0,8 \text{ et } -0,75$$

(Concours 2020-2021/Trigo et calcul)

#### Indication

$$\cos \theta = -0,8 \quad \tan \theta = -0,75$$

### EXERCICE 185

En remarquant que  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ . La valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{12}$  est :

$$1. 0,259 \quad 2. 0,1 \quad 3. 0,966 \quad 4. 0,25 \quad 5. 0,759$$

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

#### Indication

$$\cos \frac{\pi}{12} = 0,966$$

### EXERCICE 186

On rappelle que  $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$  et  $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ . Les valeurs  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$  sont données respectivement par :

$$a) \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad b) \frac{\sqrt{4+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad c) -\frac{\sqrt{4+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad d) \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad e) ABR$$

(Concours 2020-2021/Trigo et calcul)

$$\text{Indication} \quad : \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

## IV. EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

---

Une équation est dite trigonométrique lorsque l'inconnue  $x$  intervient par l'intermédiaire d'une ou de plusieurs fonctions trigonométriques.

### IV.1 Equation en cos

#### IV.1.1 Equation de la forme $\cos x = \cos \alpha$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$$

#### IV.1.2 Equation de la forme $\cos x = a$

L'équation admet de solution dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $a \in [-1; 1]$

On cherche un réel  $\alpha$  tel que  $\cos \alpha = a$ . Et l'équation peut s'écrire :

**$\cos x = \cos \alpha$** , ce qui nous ramène au premier cas.

#### IV.1.3 Equation de la forme $\cos u(x) = \cos v(x)$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = v(x) + 2k\pi \\ u(x) = -v(x) + 2k\pi \end{cases}$$

### IV.2 Equation en sin

#### IV.2.1 Equation de la forme $\sin x = \sin \alpha$

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \end{cases}$$

#### IV.2.2 Equation de la forme $\sin x = a$

L'équation admet de solution dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $a \in [-1; 1]$

On cherche un réel  $\alpha$  tel que  $\sin \alpha = a$ . Et l'équation peut s'écrire :

**$\sin x = \sin \alpha$** , ce qui nous ramène au premier cas.

### IV.2.3 Equation de la forme $\sin u(x) = \sin v(x)$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = v(x) + 2k\pi \\ u(x) = (\pi - v(x)) + 2k\pi \end{cases}$$

## IV.3 Equation en tan

### IV.3.1 Equation de la forme $\tan x = \tan \alpha$ ( $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ )

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$$

### IV.3.2 Equation de la forme $\tan x = a$

On cherche un réel  $\alpha$  tel que  $\tan \alpha = a$ . Et l'équation peut s'écrire :

**$\tan x = \tan \alpha$** , ce qui nous ramène au premier cas.

### IV.3.3 Equation de la forme $\tan u(x) = \tan v(x)$

$$\tan u(x) = \tan v(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x) + k\pi$$

### EXERCICE 187

Résoudre dans le 4<sup>e</sup> quadrant l'équation  $2 \cos x = 1$

(Concours 2015-2016/Trigo et calcul)

**Indication**

$$S = \left\{ \frac{5\pi}{3} \right\}$$

### EXERCICE 188

Résoudre dans le 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> quadrants l'équation trigonométrique :  $2 \sin x = 1$

(Concours 2011-2012/Trigo et calcul)

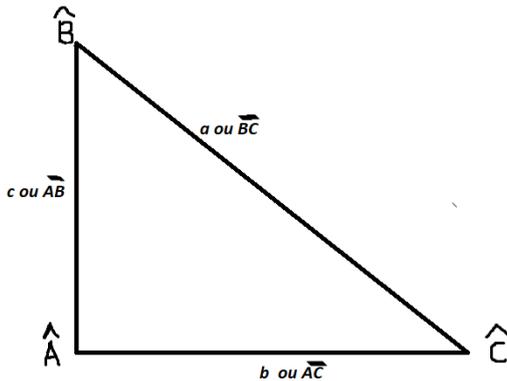
**Indication**

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

## V. RESOLUTIONS DES TRIANGLES

Résoudre un triangle, c'est déterminer ses éléments inconnus en fonction des éléments donnés.

### V.1 TRIANGLES RECTANGLES

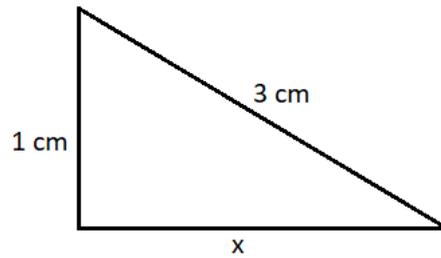


Les différents cas de résolution sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Données	Inconnues	Relations
Les côtés b et c de l'angle droit	$\hat{B}$ et $\hat{C}$ Et l'hypoténuse a	$a^2 = b^2 + c^2$ $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ $\tan \hat{C} = \frac{c}{b}$
Un côté c de l'angle droit et un angle aigu $\hat{C}$	$\hat{B}$ et les côtés a, b	$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ $b = c \cot \hat{C}$ $a = \frac{c}{\sin \hat{C}}$
L'hypoténuse a et un côté de l'angle droit c	$\hat{B}$ , $\hat{C}$ et b	$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ $\sin \hat{C} = \frac{c}{a}$ $a^2 = b^2 + c^2$
L'hypoténuse a et un angle aigu $\hat{C}$	$\hat{B}$ , b et c	$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ $c = a \sin \hat{C}$

### EXERCICE 189

La valeur de  $x$  dans le triangle ci-dessous vaut :



- a.  $x = 8$       b.  $x = -8$       c.  $x = \sqrt{8}$       d.  $x = 2\sqrt{2}$       e.  $\pm 2\sqrt{2}$

(Concours 2023-2024/Trigo et calcul)

#### Indication

Utiliser théorème de Pythagore

### EXERCICE 190

Considérer le triangle rectangle BAC tel que  $\hat{A} = 90^\circ$ ,

$$\overline{AB} = \overline{AC} = 21,50 \text{ cm.}$$

- Calculer les angles  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$
- Calculer à 5 décimales près le côté  $\overline{BC}$

(Concours Trigo et calcul)

### EXERCICE 191

Soit BAC un triangle rectangle en A (c'est à dire  $\hat{A} = 90^\circ$ ) ; calculer l'hypoténuse  $\overline{BC}$  et les angles  $\hat{B}$  ,  $\hat{C}$  sachant que  $\overline{AB} = \overline{AC} = 10 \text{ cm.}$

(Concours 2016-2017/ Trigo et calcul)

#### Indication

$$\hat{C} = 45^\circ \quad \hat{B} = 45^\circ$$

### EXERCICE 192

Donner les relations trigonométriques dans un triangle rectangle

(Concours 2011-2012/Trigo et calcul)

### EXERCICE 193

Donner les relations entre les côtés et les angles dans un triangle rectangle :

(Concours 2011-2012/Trigo et calcul)

### EXERCICE 194

Soit BAC un triangle rectangle en A (c'est à dire  $\hat{A} = 90^\circ$ ) . Sachant que  $\overline{AB} = \overline{AC} = 5 \text{ cm}$ .

a) Calculer à 5 décimales l'hypoténuse  $\overline{BC}$  ;

b) Calculer en radian les angles  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$  .

(Concours 2018-2019/ Trigo et calcul)

#### Indication

$$\overline{BC} = 7,07107 \text{ cm} \quad \hat{C} = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \quad \hat{B} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

### EXERCICE 195

Résoudre le triangle ABC tel que  $\hat{A} = \frac{\pi}{4}, \hat{B} = \frac{\pi}{2}$  et  $\overline{BC}^2 = 90,25$

(Concours 2011-2012/Trigo et calcul)

#### Indication

$$\hat{C} = \frac{\pi}{4} \quad \overline{AB} = 9,5 \quad \overline{AC} = 13,43502884$$

### EXERCICE 196

Les côtés opposé et adjacent d'un triangle rectangle mesurent respectivement 4 cm et 3 cm.

Calculer la longueur de l'hypoténuse vaut :

1) 4 cm 2) 3 cm 3) 5 cm 4) 10 cm 5) 8 cm

(Concours 2021-2022/Trigo et calcul)

#### Indication

Utiliser le théorème de Pythagore

## V.2 TRIANGLES QUELCONQUES

### V.2.1 Relation de sinus

$$\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

### V.2.2 Relation de cosinus

Dans un triangle ABC, le carré de la mesure d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, diminué du double produit des mesures de ces côtés par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

### V.2.3 Résolution des triangles quelconques

Résoudre un triangle, c'est déterminer ses trois éléments inconnus quand on en donne trois autres.

Données	Relations
On donne un côté et deux angles	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ La relation de sinus
On donne deux côtés et l'angle qu'ils forment	La relation de cosinus
On donne trois côtés	La relation de cosinus

### EXERCICE 197

Un côté d'un triangle équilatéral vaut 10cm. Calculer le périmètre de ce triangle

a. 30 cm   b. 100 cm   c. 1000 cm   d. 20 cm   e. 60 cm

(Concours 2023-2024/Trigo et calcul)

#### Indication

$$P = C + C + C$$

Dans le cas d'un triangle équilatéral, la formule devient :

$$P = 3 \times C$$

### EXERCICE 198

Considérer le triangle ABC tel que  $\overline{AB} = \overline{AC} = 60 \text{ cm}$  et  $\hat{A} = 30^\circ$ .

a) Calculer les angles  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$

b) Calculer le côté  $\overline{BC}$  et le segment  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ .

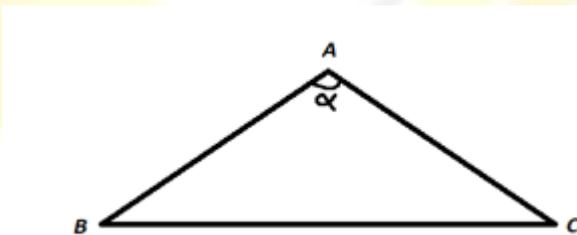
(Concours 2015-2016/Trigo et calcul)

#### Résolution

$$\overline{BC} = 31,05828541 \text{ cm} \quad \hat{c} = 75^\circ \quad \hat{B} = 75^\circ \quad \overline{AD} = 57,9555 \text{ cm}$$

### EXERCICE 199

Etablir les relations indispensables pour résoudre un triangle quelconque



Connaissant les éléments suivants  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  et l'angle  $\alpha$

(Concours 2011-2012/Trigo et calcul)

### EXERCICE 200

Tracer le graphique de :

a)  $y = \sin x$ , pour  $x \in [0; 2\pi]$

b)  $y = \cos x$ , pour  $x \in [0; 2\pi]$

(Concours Trigo et calcul)

### EXERCICE 201

Calculer à 5 décimales près les quantités numériques suivantes :

1)  $(1999,65695)^0 =$

2)  $(1999,65695)^1 =$

3)  $(6666,31836) \times 0 =$

4)  $\pi \div 3,14159 =$

5)  $(10^6 \times 9999) \div (9999 \times 10^5) =$

(Concours 2016-2017/Trigo et calcul)

### EXERCICE 202

Simplifier les expressions numériques suivantes :

a)  $10^6 \times 0,999999 \times 0 =$

b)  $3,14 \times \log_{10}(10^{100}) =$

(Concours 2011-2012/Trigo et calcul)

### EXERCICE 203

Calculer à 4 décimales près les quantités numériques suivantes :

a)  $(3,14159)^0$

b)  $(3,14159)^1$

c)  $3,14159 \times \log_{10}(10)^2$

(Concours 2018-2019/Trigo et calcul)

### EXERCICE 204

La moyenne proportionnelle de 2 nombres (4, 7) est :

1. 5,5    2.  $2\sqrt{7}$     3. 5,0    4.  $4\sqrt{7}$     5.  $\frac{7}{4}$

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

### Indication

Etant donné deux réels de même signe a et b, la moyenne proportionnelle à a et b est le réel x tel que  $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$

### EXERCICE 205

La quatrième proportionnelle à 3 nombres (2, -1, 7) est :

1.  $-\frac{7}{2}$       2. 8      3. 2      4. -2      5.  $\frac{3}{4}$

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

#### Indication

Etant donné trois réels a, b et c, la quatrième proportionnelle des termes a, b et c est le réel x tel que :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

### EXERCICE 206

La solution de l'équation  $\frac{3}{x-3} + \frac{4}{2x+1} = \frac{31}{4x-7}$  est :

1.  $(4; -\frac{31}{17})$       2. (2; 39)      3. (4; 31)      4. (2; 31)      5.  $(4; -\frac{39}{22})$

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

#### Indication

$$S = \left\{4; \frac{-39}{22}\right\}$$

### EXERCICE 207

La longueur du 48<sup>e</sup> parallèle nord sur le globe terrestre (le rayon de la terre=6370 kms) vaut :

- a) 1005 kms    b) 3547 kms    c) 5207 kms    d) 4895 kms    e) 2500 kms

(Concours 2020-2021/Trigo et calcul)

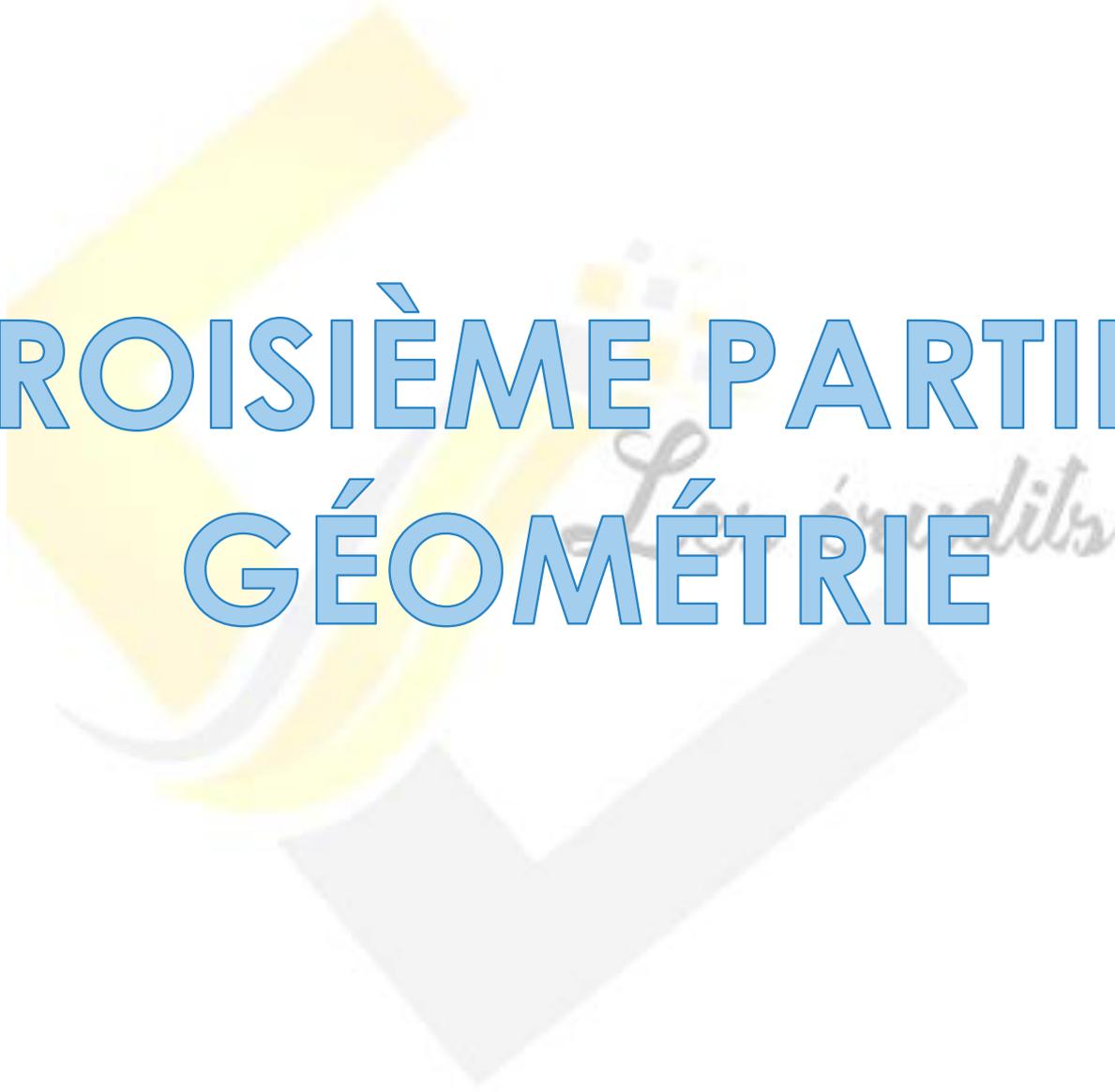
#### Indication

La circonférence (longueur) d'une latitude (parallèle) est donnée par la formule

$$L = 2 \pi (\cos \theta \times R)$$

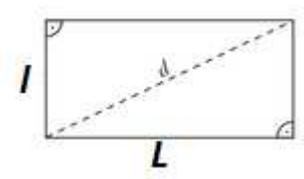
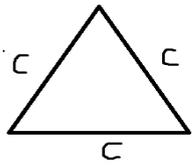
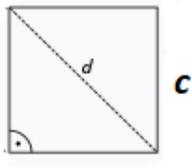
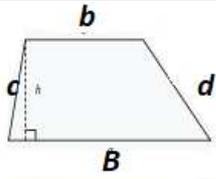
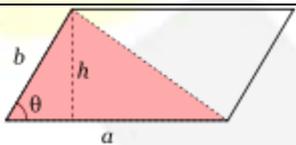
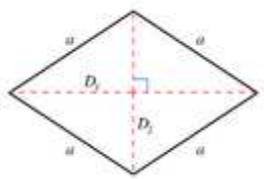
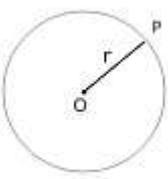
*R* : rayon de la terre

*θ* : le degré de la latitude

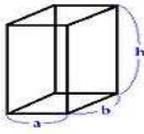
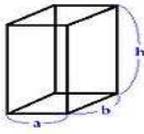
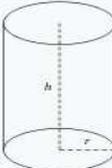
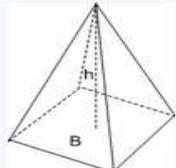
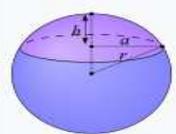


# TROISIÈME PARTIE : GÉOMÉTRIE

# I. FORMULES DES PERIMETRES ET AIRES DE QUELQUES FIGURES GEOMETRIQUES

Nom figure	Dessin	Périmètre	Surface (Aire)	Compléments
Rectangle		$2L + 2l$	$L \times l$	$d = \sqrt{L^2 + l^2}$
Triangle		$c + c + c$	$\frac{B \times h}{2}$	
Carré		$c \times 4$	$C \times C$	$d = \sqrt{C^2 + C^2}$ Ou $d = c\sqrt{2}$
Trapèze		$B + d + b + c$	$\frac{(B + b) \times h}{2}$	
Parallélogramme		$2(b + a)$	$a \times h$	
Losange		$4.a$	$\frac{D_1 \times D_2}{2}$	$a = \frac{1}{2}\sqrt{D_1^2 + D_2^2}$
Cercle		$2\pi r$	$\pi r^2$	$D = 2r$

## II. AIRES ET VOLUMES DE QUELQUES CORPS GEOMETRIQUES

Nom	Représentation	Aire de la surface	Volume intérieur	Relations supplémentaires
Cube		$6c^2$	$c^3$	$\mathcal{D} = c\sqrt{3}$
Pavé droit		$2(ab + ah + bh)$	$abh$	$\mathcal{D} = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$
Prisme droit		P base fois h	$\mathcal{B} \times h$	
Cylindre de révolution		extrémités : $2 \times \pi r^2$ surface latérale : $2\pi r h$	$\pi r^2 h$	
Pyramide			$\frac{1}{3} \mathcal{B} \times h$	
Tétraèdre régulier		$a^2 \sqrt{3}$	$\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$	$h = a \sqrt{\frac{2}{3}}$
Cône de révolution		base : $\pi r^2$ surface latérale : $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$	$\frac{1}{3} \pi r^2 h$	
Sphère		$4\pi r^2$	$\frac{4}{3} \pi r^3$	
Calotte sphérique		base : $\pi a^2$ surface courbe : $2\pi r h$	$\frac{1}{6} \pi h (3a^2 + h^2)$	$r = \frac{a^2 + h^2}{2h}$

### EXERCICE 208

Choisissez la bonne réponse. Un rectangle de longueur 5m et de largeur 3m a pour périmètre

- a) 8 m    b) 15 m    c) 16 m    d) 2 m    e) Aucune bonne réponse

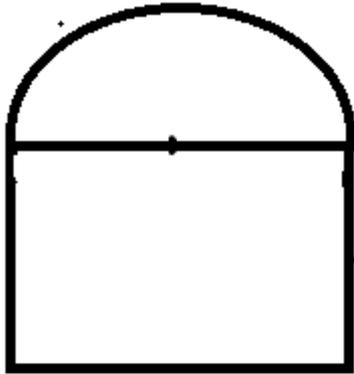
(Concours 2021-2022/Géométrie)

#### Indication

$$P = 2L + 2l$$

### EXERCICE 209

L'Unikin construit un terrain de basket formé par un rectangle de 3 m sur 4 m, surplombé d'un demi-cercle centré sur le côté supérieur du rectangle (de longueur 4m).



a) Calculer la surface du terrain

b) Si le panier se trouve au centre du cercle, quelle est la distance la plus courte que doit parcourir un joueur se trouvant au coin inférieur gauche (ou droit) pour atteindre le panier ?

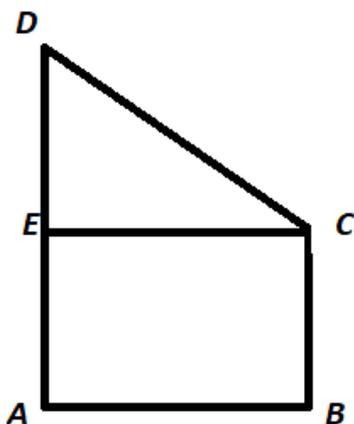
(Concours 2012-2013/Géométrie)

#### Indication

$$S = S_{rect} + \frac{1}{2}S_{cercle} \quad \text{La plus courte distance est : } \sqrt{13} \text{ m}$$

### EXERCICE 210

Monsieur Bukama achète un terrain découpé sur une surface de 6 m sur 4m de la forme suivante :



Le côté CD rejoint le sommet D au milieu C de l'autre côté parallèle à (AD).

- a) Calculer la surface du terrain
  - b) Calculer le périmètre du terrain
- (Concours 2012-2013/Géométrie)

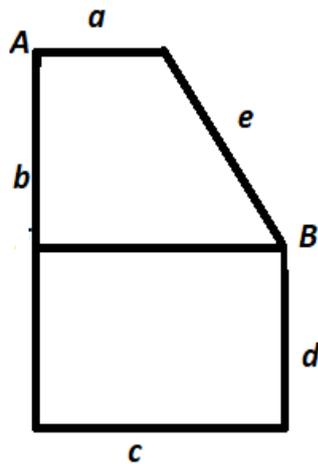
**Indication**

$$S = \frac{(B+b) \times h}{2} \quad P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}$$

**EXERCICE 211**

Monsieur X achète un terrain de forme trapézoïdale, découpé sur une surface de 6 km sur 4km.

Le 5<sup>e</sup> côté (qui est "e") formant le trapèze coupe deux côtés adjacents de la surface en leur milieu.



- a) Trouver la surface du terrain acheté
- b) Mr X a placé deux postes de surveillances aux coins A et B.

Trouver le plus court chemin qui mène de A à B.

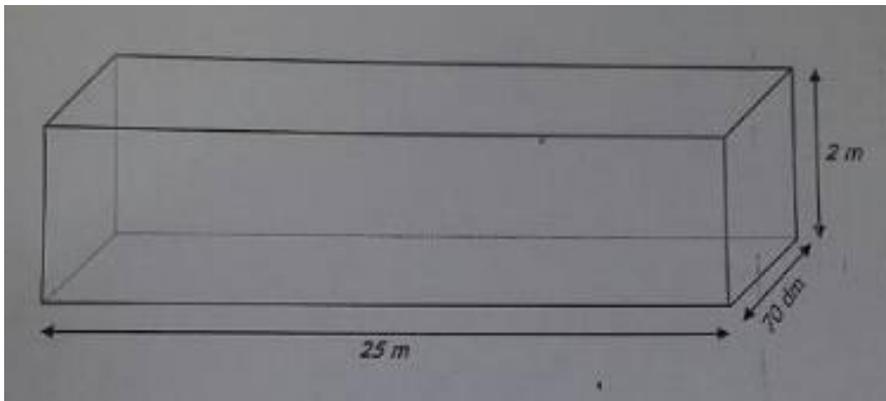
(Concours 2011-2012/Géométrie)

**Indication**

$$S = \frac{(B+b) \times h}{2}$$

## EXERCICE 212

Dans le hall d'un hôtel, on a disposé un aquarium géant de poissons qui a la forme suivante :



- Entourer la forme géométrique correspondante : cylindre, cube, parallélépipède, sphère.
- Calculer la quantité d'eau nécessaire pour remplir complètement cet aquarium.

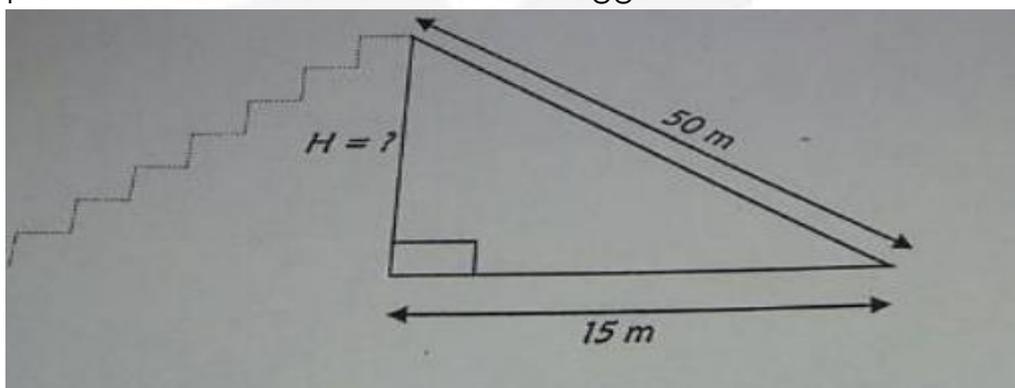
(Concours 2017-208/Géométrie)

### Indication

$$V = L \times l \times h$$

## EXERCICE 213

Si la longueur au sol est de 15 m et que la longueur de glisse du toboggan fait 50 m. A quelle hauteur se situe le haut du toboggan ?



(Concours 2017-2018/Géométrie)

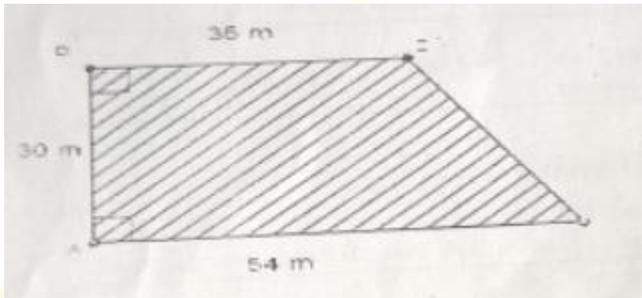
### Indication

Utiliser le théorème de Pythagore,

## EXERCICE 214

Un champ a la forme d'un trapèze rectangle comme le montre la figure ci-dessous. On demande de déterminer :

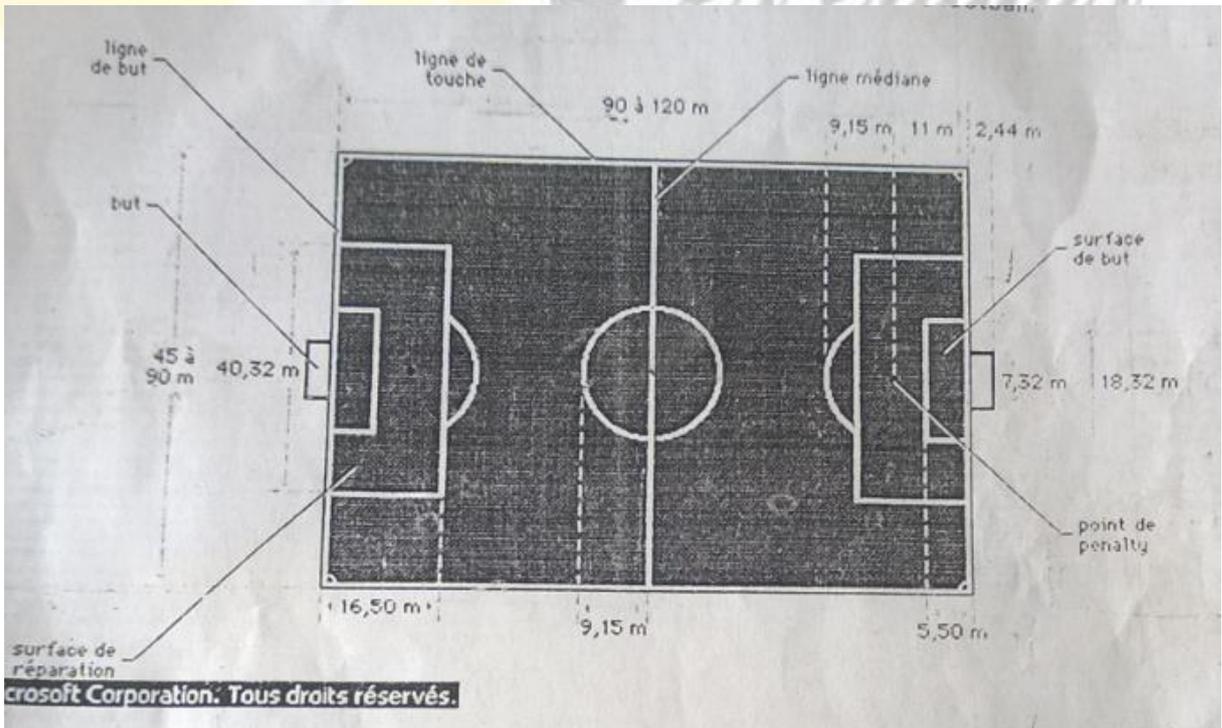
- L'aire de ce champ
- Son périmètre



(Concours /Géométrie)

## EXERCICE 215

On se propose de calculer les divers périmètres et aires d'un terrain de football.



1° calculer :

- Le périmètre minimum du terrain de football
- Le périmètre de la surface de réparation

c) Le périmètre du rond central

d) La distance entre le point de penalty et le centre du terrain

e) La distance entre le rond central et un arc de cercle de la surface de réparation.

2° calculer :

a) L'aire minimale du terrain du football

b) L'aire du rond central

c) L'aire de la surface de réparation

3° calculer le volume minimal de pelouse qu'il faudrait apporter pour recouvrir le terrain sachant qu'elle a une épaisseur de 8,5 cm.

(Concours 2016-2017/Géométrie)

### EXERCICE 216

La largeur et la longueur d'une parcelle rectangulaire de  $80 \text{ m}^2$  de surface et de 42 m de périmètre sont :

a) 12 m et 7 m   b) 15 m et 5 m   c) 16 m et 5 m   d) ABR

(Concours 2019-2020/Géométrie)

#### Indication

$$L = 16 \text{ m et } l = 5 \text{ m}$$

### EXERCICE 217

Le périmètre minimum d'un terrain de football de longueur 90 à 120 m et de largeur 45 à 90 m vaut :

a) 250 m   b) 260 m   c) 265) m   d) 270 m   e) ABR

(Concours 2019-2020/Géométrie)

#### Résolution

Le périmètre minimum vaut :

$$P = 270 \text{ m}$$

### EXERCICE 218

Le nombre d'arêtes d'un cube vaut :

- a) 10   b) 11   c) 12   d) 14   e) ABR

(Concours 2019-2020/Géométrie)

### EXERCICE 219

Le nombre des diagonales d'un hexagone vaut :

- a) 3   b) 5   c) 6   d) 8   e) 9   f) ABR

(Concours 2019-2020/Géométrie)

### EXERCICE 220

Choisissez la bonne réponse. Un triangle ayant deux côtés de même longueur est appelé :

- a) Triangle rectangle   b) Triangle équilatéral   c) Triangle isocèle

(Concours 2021-2022/Géométrie)

### EXERCICE 221

Énoncer le théorème de Pythagore

(Concours 2021-2022/Géométrie)

### EXERCICE 222

Choisissez la mauvaise réponse. Les éléments de base de la géométrie sont :

- a) *Le point*   b) *La droite*   c) *Le cercle*   d) *Le segment*

(Concours 2021-2022/Géométrie)

### EXERCICE 223

Choisissez la mauvaise réponse. La géométrie est :

- a) L'étude des formes et des grandeurs de figures

- b) Une science de l'espace

- c) Une mesure de la terre

(Concours 2021-2022/Géométrie)

### III. LA DROITE

---

#### III.1 composantes d'un vecteur de représentant (A, B)

Soient A et B deux points de coordonnées  $A(a_1, a_2)$  et  $B(b_1, b_2)$ .

Les composantes de  $\overline{AB}$  sont  $b_1 - a_1 ; b_2 - a_2$

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Exemple :

Soient  $A(-2, 4)$  et  $B(1, 3)$  deux points :

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 3 - 4 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

#### III.2 Equations d'une droite

##### III.2.1 Equation vectorielle d'une droite

Considérons la droite D, a et b deux de ses points.

$\overrightarrow{ap} = \lambda \overrightarrow{ab}$  est l'équation vectorielle de la droite D.

$\overrightarrow{ab} = \vec{u}$  est le vecteur directeur de la droite D.

*p est un point de la droite D*

##### III.2.2 Equations paramétriques d'une droite

Soit la droite D ayant un point  $a(x_0, y_0)$  et  $\vec{u} = \overrightarrow{ab}(\alpha, \beta)$  un vecteur directeur de D. Etant donné  $p(x, y)$  un autre point de la droite D.

Les équations paramétriques de la droite D sont :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \alpha \\ y = y_0 + \lambda \beta \end{cases}$$

*$\lambda$  est un paramètre*

##### III.2.3 Equations cartésiennes

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}$$

$$\text{Ou } \beta(x - x_0) = \alpha(y - y_0)$$

### III.2.4 Equation d'une droite passant par un point et de coefficient angulaire m donné

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

### III.2.5 Equation de la droite passant par deux points

L'équation de la droite passant par deux points  $A(x_1, y_1)$  et  $B(x_2, y_2)$ ..

Est :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

### III.2.6 Deux équations représentant la même droite

Soit la forme générale de l'équation cartésienne de la droite d :

$$d \equiv Ay + Bx + C = 0$$

Le coefficient de direction de est :  $-\frac{B}{A}$

Deux équations  $A_1y + B_1x + C_1 = 0$  et  $A_2y + B_2x + C_2 = 0$  représentent une même droite si et seulement si  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = t$

Ou  $A_1 = t A_2; B_1 = t B_2; C_1 = t C_2$

Exemple :

Les équations  $9x - 21y + 6 = 0$  et  $3x - 7y + 2 = 0$  représentent la même droite, car  $\frac{9}{3} = \frac{-21}{-7} = \frac{6}{2} = 3$

## III.3. La colinéarité de trois points

Trois points  $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$  et  $C(x_3, y_3)$  sont colinéaires si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemple

Les points  $A(1, 2); B(2, 4)$  et  $C(-1, -2)$  sont colinéaires car :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 - 1 & 4 - 2 \\ -1 - 1 & -2 - 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 1(-4) - (-2)2 \\ &= -4 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

### III.4. Intersection de deux droites

Soient deux droites  $d_1 \equiv A_1y + B_1x + C_1 = 0$  et  $d_2 \equiv A_2y + B_2x + C_2 = 0$  telles que leurs coefficients de direction sont différents.

Les coordonnées de leur point d'intersection sont obtenues en résolvant le système :

$$\begin{cases} A_1y + B_1x + C_1 = 0 \\ A_2y + B_2x + C_2 = 0 \end{cases}$$

Il faut que le déterminant principal soit non nul pour que les deux droites soient sécantes, c'est-à-dire  $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Exemple

Déterminer l'intersection des droites  $d_1 \equiv -5y + 4x + 9 = 0$  et  $d_2 \equiv y + x - 9 = 0$

Commençons par vérifier si les deux équations sont sécantes :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} &= (-5)(1) - 4(1) \\ &= -5 - 4 \\ &= -9 \neq 0 \end{aligned}$$

Donc les deux droites sont sécantes et l'intersection existe, il suffit de résoudre le système formé par les équations de deux droites pour trouver les coordonnées de l'intersection :

$$\begin{cases} -5y + 4x + 9 = 0 \\ y + x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y + 4x = -9 & (1) \\ y + x = 9 & (2) \end{cases}$$

Utilisons la méthode de substitution

De (2), tirons  $x$  :  $x = 9 - y$  (3)

(3) dans (1)  $\Rightarrow -5y + 4(9 - y) = -9$

$$\Leftrightarrow -5y + 36 - 4y = -9$$

$$\Leftrightarrow -9y = -9 - 36$$

$$\Leftrightarrow -9y = -45$$

$$\Leftrightarrow 9y = 45$$

$$\Leftrightarrow y = 45/9$$

$$\Leftrightarrow y = 5 \quad (4)$$

(4) dans (3)  $\Rightarrow x = 9 - 5$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

L'intersection de ces deux droites est le point  $P(4, 5)$

### III.5. Faisceau des droites

Soit  $d_1 \equiv A_1y + B_1x + C_1 = 0$  et  $d_2 \equiv A_2y + B_2x + C_2 = 0$  deux droites sécantes, c'est-à-dire  $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

L'équation générale des droites passant par le point d'intersection de  $d_1$  et  $d_2$  est

$$\lambda_1(A_1y + B_1x + C_1) + \lambda_2(A_2y + B_2x + C_2) = 0 \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$$

$$\lambda_1 A_1 y + \lambda_1 B_1 x + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 A_2 y + \lambda_2 B_2 x + \lambda_2 C_2 = 0$$

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)y + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)x + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$$

En divisant des deux membres par  $\lambda_1$ , on a :

$$\frac{(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)}{\lambda_1} y + \frac{(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)}{\lambda_1} x + \frac{\lambda_1 C_1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2 C_2}{\lambda_1} = 0$$

$$\left(A_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} A_2\right) y + \left(B_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} B_2\right) x + C_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} C_2 = 0 \quad \text{En posant } \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \lambda$$

$$(A_1 + \lambda A_2)y + (B_1 + \lambda B_2)x + C_1 + \lambda C_2 = 0$$

$$A_1 y + \lambda A_2 y + B_1 x + \lambda B_2 x + C_1 + \lambda C_2 = 0$$

$$A_1 y + B_1 x + C_1 + \lambda A_2 y + \lambda B_2 x + \lambda C_2 = 0$$

$$A_1 y + B_1 x + C_1 + \lambda(A_2 y + B_2 x + C_2) = 0$$

Trois droites  $d_1 \equiv A_1y + B_1x + C_1 = 0$ ;  $d_2 \equiv A_2y + B_2x + C_2 = 0$  et  $d_3 \equiv A_3y + B_3x + C_3 = 0$  se coupent en un point ou sont concurrentes si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Avec} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

### III.6. Equation globale de deux droites

Soient deux droites  $d_1 \equiv k_1y + p_1x + q_1 = 0$  et  $d_2 \equiv k_2y + p_2x + q_2 = 0$ , l'équation globale de  $d_1$  et  $d_2$  est donnée par :

$$(k_1y + p_1x + q_1)(k_2y + p_2x + q_2) = 0$$

$$k_1k_2y^2 + k_1p_2xy + k_1q_2y + p_1k_2xy + p_1p_2x^2 + p_1q_2x + q_1k_2y + q_1p_2x + q_1q_2 = 0$$

$$k_1k_2y^2 + (k_1p_2 + p_1k_2)xy + p_1p_2x^2 + (k_1q_2 + q_1k_2)y + (p_1q_2 + q_1p_2)x + q_1q_2 = 0$$

En posant  $A = k_1k_2$ ,  $2B = k_1p_2 + p_1k_2$ ,  $C = p_1p_2$ ,  $2D = k_1q_2 + q_1k_2$ ,  $2E = p_1q_2 + q_1p_2$ ,  $F = q_1q_2$ , l'équation globale devient :

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$$

Pour que ce trinôme représente deux droites, il faut que :

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0$$

Quand on dispose de l'équation globale de deux droites, pour trouver les équations de ces droites, on considère l'équation comme un trinôme du second degré en  $y$  (ou en  $x$ ) et on déduit les racines.

### EXERCICE 224

Soit la droite  $D$  dans la direction du vecteur  $\vec{v} = (3,5)$  et passant par le point  $a(2, -2)$ . Trouver les équations vectorielle, paramétriques et analytique de  $D$ .

(Concours 2008-2009/Géométrie)

### EXERCICE 225

Pour quelle valeur de  $\lambda$  l'équation suivante représente-t-elle deux droites ?

$$12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + \lambda = 0$$

a)  $-21$    b)  $1$    c)  $2$    d)  $21$    e)  $-5$

(Concours 2020-2021/Géométrie)

(Concours 2023-2024/Géométrie)

#### Indication

$$\lambda = 2$$

### EXERCICE 226

Pour que valeur de  $m$  la droite d'équation  $y = mx + 3$  passe-t-elle par le point d'intersection des droites  $y = x + 1$  et  $y = 2x + 2$ ?

a)  $1$    b)  $2$    c)  $3$    d)  $-1$    e)  $-2$

(Concours 2020-2021/Géométrie)

(Concours 2023-2024/Géométrie)

#### Indication

$$m = 3$$

### EXERCICE 227

Enoncer et illustrer graphiquement les trois cas d'égalités des triangles  
(Concours 2008-2009/Géométrie)

### EXERCICE 228

Soit le segment  $[a, b]$ :  $a(-1, 3)$  et  $b(2, -4)$ .

Trouver la coordonnée des points  $p$  et  $q$ , tels que  $\overrightarrow{ap} = \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{qb}$

(Concours 2018-2019/Géométrie)

#### Indication

$p(0; 2/3)$  et  $q(1; -5/3)$

### EXERCICE 229

Trouver la coordonnée des extrémités du segment  $[a, b]$  que les points  $p(2,3)$  et  $q(-1,2)$  partagent de telle manière que  $\overrightarrow{ap} = \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{qb}$

(Concours 2018-2019/Géométrie)

#### Indication

$a(5; 4)$  et  $b(-4; 1)$

### EXERCICE 230

Si dans un triangle ABC l'égalité  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$  est vérifiée, alors ce triangle est rectangle en :

- a) B b) A c) C d) ABR

(Concours 2019-2020/Géométrie)

### EXERCICE 231

Un triangle isocèle est :

- a. un triangle qui a deux côtés de même longueur b. un triangle qui a deux angles de même mesure c. un triangle qui a un axe de symétrie d)ABR

(Concours 2019-2020/Géométrie)

## EXERCICE 232

Un triangle déséquilibré est un triangle dont :

a) les trois cotés sont des longueurs différentes b) les trois angles sont de mesures différentes c) l'axe de symétrie est inexistant d) ABR

(Concours 2019-2020/Géométrie)



## IV. LE CERCLE

Le cercle est l'ensemble des points du plan situés à égale distance d'un point fixe. La distance et le point fixe sont appelés respectivement rayon et centre du cercle.

L'équation du cercle de centre  $C(a, b)$  et de rayon  $R$  est donnée par :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b) \cos \theta = R^2$$

Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , alors l'équation devient :  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Si le centre est à l'origine des axes, alors les deux équations deviennent :

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta = R^2$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

L'équation générale  $Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$  représente un cercle si  $B = A \cos \theta$  et  $A = C$ . Dans ce cas, elle s'écrit :

$$Ay^2 + 2xy A \cos \theta + Ax^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$$

Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$  alors  $B = 0$  et  $A = C$ , l'équation s'écrit :  $Ay^2 + Ax^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$

L'équation normalisée du cercle est  $y^2 + 2xy \cos \theta + x^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , elle devient :  $y^2 + x^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

$$\text{Avec } \alpha = \frac{2E}{A} ; \beta = \frac{2D}{A} ; \gamma = \frac{F}{A}$$

Donc l'équation du cercle est normalisée lorsque les coefficients de  $x^2$  et  $y^2$  sont égaux à 1.

La coordonnée  $(a, b)$  du centre et le rayon  $R$  du cercle sont donnés par :

$$\begin{cases} a = -\frac{E}{A} \\ b = -\frac{D}{A} \\ a^2 + b^2 - R^2 = \frac{F}{A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = \alpha \\ -2b = \beta \\ a^2 + b^2 - R^2 = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{\alpha}{2} \\ b = -\frac{\beta}{2} \\ R^2 = a^2 + b^2 - \gamma \end{cases}$$

### EXERCICE 233

Quel est le centre du cercle de l'équation  $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 3$  ?

- a) (3,1)    b) (5,1)    c) (1, -5)    d) (-1,5)    e) (1,3)

(Concours 2020-2021/Géométrie)

(Concours 2023-2024/Géométrie)

#### Indication

(1, -5)

### EXERCICE 234

Quel est le rayon du cercle d'équation  $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$

- a) - 4    b) 4    c) 3    d) 2    e) - 2

(Concours 2020-2021/Géométrie)

(Concours 2023-2024/Géométrie)

#### Indication

$R = 3$

### EXERCICE 235

Quel est dans  $\mathbb{R}_+$ , le point d'intersection de la droite  $y = 3x + 1$  et du cercle  $x^2 + y^2 - 50 = 0$

- a) (2,5 ; 6,6)    b) (1,1 ; 2,2)    c) (7,5 ; 0,6)    d) (1,9 ; 6,8)    e) (3;)

(Concours 2020-2021/Géométrie)

(Concours 2023-2024/Géométrie)

#### Indication

(1,9 ; 6,8)

## V. MEDIATRICE D'UN SEGMENT

La médiatrice d'un segment est une droite qui coupe ce segment perpendiculairement à son milieu.

### Procédure pour trouver l'équation de la médiatrice

Soit un segment  $[ab]$  tel que  $a(a_1, b_1)$  et  $b(a_2, b_2)$ .

1. Trouver le milieu du segment de droite

Les coordonnées du milieu du segment sont données par la formule :

$$\left( \frac{a_1 + a_2}{2}; \frac{b_1 + b_2}{2} \right)$$

Exemple : Soit un segment  $[ab]$  tel que  $a(2, 1)$  et  $b(-3, 3)$ .

Le milieu du segment est donné par

$$\left( \frac{2 - 3}{2}; \frac{1 + 3}{2} \right)$$

Les coordonnées du milieu du segment  $[ab]$  sont  $\left( \frac{-1}{2}; 2 \right)$

2. Trouver la pente des deux points

On trouve cette pente par la formule :

$$\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$$

Exemple :

Pour notre exemple, on aura :

$$\frac{3 - 1}{-3 - 2}$$

la pente est de  $\frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$

3. Calculer ensuite l'inverse opposé de la pente

Dans notre cas, c'est  $\frac{5}{2}$

4. Déterminer l'équation de la médiatrice sous sa forme affine :

$$y = mx + b$$

Ensuite, remplacer "m" de la fonction affine par l'inverse opposé de la pente.

Dans notre cas, on aura :  $y = \frac{5}{2}x + b$

5. Remplacer "x" et "y" de la fonction affine par les coordonnées d'un point se trouvant sur la médiatrice. On peut prendre les coordonnées du point milieu calculées plus haut car ce point appartient aussi à la médiatrice.

Pour notre exemple, on avait trouvé :  $\left(\frac{-1}{2}; 2\right)$

$$y = \frac{5}{2}x + b \Leftrightarrow 2 = \frac{5}{2} \times \frac{-1}{2} + b$$

$$\Leftrightarrow b = 2 + \frac{5}{4}$$

$$b = \frac{13}{4}$$

D'où la médiatrice du segment  $[AB]$  a pour équation  $y = \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}$

### EXERCICE 236

Rechercher la médiatrice du segment  $[AB]$ , lorsque  $a(2p, 2q)$  et  $b(2r, 2s)$

(Concours 2018-2019/Géométrie)

#### Indication

L'équation de la médiatrice est :  $y = -\frac{r-p}{s-q}x + \frac{s^2+r^2-q^2-p^2}{s-q}$

### EXERCICE 237

Deux angles dont la somme de leurs mesures vaut  $90^\circ$  sont dits :

- a) supplémentaires   b) anti-supplémentaires   c) complémentaires   d) anti-complémentaires   e) ABR

(Concours 2019-2020/Géométrie)



QUATRIÈME  
PARTIE :  
LA PHYSIQUE

# I. MECANIQUE

## I.1 Multiples et sous multiples des unités des mesures

Le tableau donne la correspondance de chaque multiple ou sous multiple à l'unité

les multiples ( $10^{+n}$ )			et leurs abréviations			les sous multiples ( $10^{-n}$ )			et leurs abréviations		
$10^{+1}$	déca		da			$10^{-1}$	déci		d		
$10^{+2}$	hecto		h			$10^{-2}$	centi		c		
$10^{+3}$	kilo		k			$10^{-3}$	milli		m		
$10^{+6}$	méga		M			$10^{-6}$	micro		$\mu$		
$10^{+9}$	giga		G			$10^{-9}$	nano		n		
$10^{+12}$	tera		T			$10^{-12}$	pico		p		
$10^{+15}$	peta		P			$10^{-15}$	femto		f		
$10^{+18}$	exa		E			$10^{-18}$	atto		a		
$10^{+21}$	zetta		Z			$10^{-21}$	zepto		z		
$10^{+24}$	yotta		Y								

Le tableau de la relation entre les mesures de capacité, volume et du poids :

$m^3$			$dm^3$			$cm^3$			$mm^3$		
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U
			hl	dal	l	dl	cl	ml			
			Q		kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

### EXERCICE 238

Un mètre cube d'eau correspond à une masse de 1000 kg. Trouver la masse qui correspond à un décimètre cube d'eau ?

(Concours 2023-2024/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 239

Trois ouvriers creusent un trou en 12 jours. Combien de temps mettront 6 ouvriers pour creuser un trou de même profondeur ?

(Concours 2023-2024/Physique-Mécanique)

### Indication

Utiliser la règle de trois simples

### EXERCICE 240

Une nanoseconde correspond à :

- a)  $1/10^9$  s    b) a) et c) sont correctes    c)  $10^{-9}$ s    d)  $10^9$ s    e) ABR

(Concours 2015-2016/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 241

Laquelle des longueurs suivantes est la plus grande ?

- a)  $10^5$  cm    b)  $10^5$  mm    c)  $10^7$   $\mu$ m    d)  $10^{10}$  nm    e) ABR

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

(Concours 2015-2016/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

(Concours 2022-2023/Physique-Mécanique)

### Indication

Pour une comparaison aisée, ramener toutes ces valeurs dans une même unité, le m par exemple :

### EXERCICE 242

Une femto seconde correspond à :

- a)  $1/10^{-12}$  s    b)  $-12$  s    c)  $10^{-15}$ s    d)  $10^{15}$ s    e) ABR

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 243

Laquelle de ces masses est la plus petite

- a)  $10^2$   $\mu$ g    b)  $10^3$  g    c) 1 kg    d)  $10^3$  mg    e) aucune de ces réponses

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

## Indication

Convertir toutes ces masses en g pour la bonne comparaison

## I.2 CINEMATIQUE

### I.2.1 Mouvement rectiligne uniforme

$$x = x_0 + v \cdot t$$

$$\text{si } x_0 = 0 \Rightarrow x = v \cdot t$$

$x$ : l'espace en m

$v$ : la vitesse en m/s

$t$ : le temps en s

### I.2.2 Mouvement rectiligne uniformément varié

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\text{si } x_0 = v_0 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_0 + at$$

$$\text{si } v_0 = 0 \Rightarrow v = at$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

$$\text{si } x_0 = v_0 = 0 \Rightarrow v^2 = 2ax$$

Espace parcouru pendant la  $n^{\text{ième}}$  seconde :

$$x = a(n - 1/2)$$

$x$ : l'espace en m

$v$ : la vitesse en m/s

$t$ : le temps en s

$a$ : accélération en  $m/s^2$

### I.2.3 chute libre

$$h = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\text{si } x_0 = v_0 = 0 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = v_0 + gt$$

$$\text{si } v_0 = 0 \Rightarrow v = gt$$

$$v^2 - v_0^2 = 2g(h - h_0)$$

$$\text{si } h_0 = v_0 = 0 \Rightarrow v^2 = 2gh$$

Chute libre de bas vers le haut :

$$h = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

### I.2.4 Mouvement rectiligne sinusoïdal

$$x = a \sin(\omega t + \phi)$$

$$\omega = 2\pi N$$

$$N = \frac{1}{T}$$

$$v = a\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$\gamma = -\omega^2 \cdot x$$

$x$ : elongation en m

$\omega$ : la pulsation en rad/s

$t$ : temps en s

$N$ : la fréquence en Hertz(hz)

$T$  = la période en s

$a$ : amplitude

### I.2.5 Mouvements circulaires

#### Mouvement circulaire uniforme

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

$$S = S_0 + vt$$

$$S = R \cdot \theta$$

$$v = R \cdot \omega$$

$$\gamma_N = R \cdot \omega^2$$

$S$ : abscisse curviligne en m

$\theta$ : abscisse angulaire en rad

$R$ : rayon de la trajectoire en m

### EXERCICE 244

Un cycliste quitte la gare centrale de la ville de Kinshasa à 3 heures se dirigeant dans une certaine direction et roule à 20 km par heure. Tandis qu'un motocycliste quitte la même gare centrale à 4 heures, se dirigeant dans la même direction avec une vitesse de 45 km à l'heure. A quelle heure le motocycliste rejoint-il le cycliste ? ..... Et à quelle distance à partir de la centrale ?.....

(Concours 2023-2024/Physique-Mécanique)

### Indication

Heure = 4 h 48'

Le lieu = 36 kms

### EXERCICE 245

Une voiture soumise à une accélération horizontale (plan cartésien accélération-temps) a une vitesse qui augmente linéairement avec :

a) le temps b) la distance c) le temps au carré d) la distance au carré e) ABR

(Concours 2015-2016/Physique Mécanique)

(Concours 2011-2012/Physique Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique Mécanique)

(Concours 2021-2022/Physique Mécanique)

(Concours 2022-2023/Physique Mécanique)

### EXERCICE 246

L'expression  $y = y_0 + v_0t + 0,5at^2$  (où  $y, y_0, t$  et  $a$  représentent respectivement la distance à l'instant  $t$ , la distance initiale, la vitesse initiale, le temps et l'accélération) est valable lorsque :

a)  $y$  est constant b)  $v$  est constant c)  $a$  est constant d) toujours e) jamais

(Concours 2021-2022/Physique Mécanique)

### EXERCICE 247

Si le déplacement d'un corps est une fonction quadratique du temps, le corps se déplace avec

a) Une accélération constante b) une accélération variable c) une vitesse scalaire constante d) aucune de ces réponses

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 248

Un cycliste quitte une ville A à 3h se dirigeant dans une certaine direction où il roule à 20 km par heure. Un motocycliste quitte A à 4 heures, se dirigeant dans la même direction avec une vitesse de 45 km à l'heure. Le motocycliste rejoint le cycliste à :

a) 4h 20 min    b) 4h 15 min    c) 4h 48 min    d) 4h 30 min    e) ABR

(Concours 2015-2016/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

(Concours 2022-2023/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 249

Un corps se déplace en ligne droite avec une accélération constante. Le graphique de l'accélération (ordonnée verticale) en fonction du temps (abscisse horizontale) est :

a) une droite verticale    b) une droite horizontale    c) une droite inclinée de  $45^\circ$   
d) une parabole    e) ABR

(Concours 2015-2016/Physique-Mécanique)

(Concours 2011-2012/Physique Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique Mécanique)

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 250

Lorsqu'on lâche un objet d'une hauteur  $h_1$  il frappe le sol avec une vitesse  $v$ . Lorsqu'on le lâche d'une hauteur  $h_2$ , il frappe le sol avec une vitesse  $2v$ . Alors, on a :

a)  $h_2 = h_1/2$     b)  $h_2 = 2h_1$     c)  $h_2 = 4h_1$     d)  $h_2 = 8h_1$     e) ABR

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

#### Indication

On sait que  $v^2 - v_0^2 = 2g(h - h_0)$

si  $h_0 = v_0 = 0 \Rightarrow v^2 = 2gh$

$$\Rightarrow h = \frac{v^2}{2g}$$

Etablir le rapport entre les deux hauteurs.

### EXERCICE 251

La vitesse d'un véhicule passe de 5 km/h à 18km/h au cours d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération  $2 \text{ m/s}^2$ . Quelle a été la durée de l'accélération et quelle est la distance parcourue ?

- a)  $t=5 \text{ s}$  ;  $d=50 \text{ m}$       b)  $t=6 \text{ s}$  ;  $d=60 \text{ m}$       c)  $t=4 \text{ s}$  ;  $d=40 \text{ m}$   
a)  $t=3 \text{ s}$  ;  $d=30 \text{ m}$       e)  $t=10 \text{ s}$  ;  $d=100 \text{ m}$

(Concours 2010-2011/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 252

La vitesse scalaire d'un corps en mouvement sur une ligne droite avec une accélération positive constante augmente linéairement avec :

- a) La distance    b) le temps    c) le déplacement    d) la distance au carré    e) ABR

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2018-2019/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 253

Un objet, lancé verticalement vers le haut, retombe sous l'effet de la pesanteur. Au sommet de sa trajectoire :

- a) l'accélération est nulle    b) la vitesse est nulle    c) l'accélération est positive  
d) la vitesse est supérieure à zéro    e) ABR

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 254

Un corps se déplace le long d'une ligne droite en mouvement uniformément accéléré. À tout moment, la pente de la courbe représentant sa vitesse en fonction du temps est :

- a) son déplacement    b) la distance parcourue    c) la vitesse    d) le temps    e)  
aucune de ces réponses

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 255

Un corps se déplace le long d'une ligne droite avec une vitesse constante. À tout moment, la courbe représentant sa vitesse en fonction du temps est :

- a) son déplacement b) la distance parcourue c) la vitesse d) une droite horizontale e) aucune de ces réponses

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 256

L'accélération de la pesanteur est toujours orientée :

- a) de bas vers le haut b) de haut vers le bas c) verticalement de haut vers le bas d) de manière quelconque e) ABR

(Concours 2015-2016/Physique-Mécanique)

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

(Concours 2022-2023/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 257

L'expression  $x = v_0t + \frac{1}{2} \gamma t^2$  ( $x$  : espace à l'instant  $t$ ,  $v_0$  : vitesse à l'instant  $t=0$ ,  $\gamma$  : accélération) est applicable seulement si :

- a. La vitesse  $v$  est constante b.  $t$  est constant c. l'accélération  $\gamma$  est constante d.  $x$  est constant e. aucune de ces réponses

(Concours 2019-2020/ Physique Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 258

L'expression  $x = vt$  ( $x$  : espace à l'instant  $t$ ,  $v$  : vitesse) est applicable quand :

- a. La vitesse scalaire est constante b. l'accélération est constante et différente de zéro c. la distance est constante d. l'accélération dépend linéairement du temps e. aucune de ces réponses

(Concours 2019-2020/ Physique Mécanique)

### EXERCICE 259

L'expression  $\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$  (où  $x$ ,  $v_0$ ,  $t$  et  $a$  représentent respectivement la distance, la vitesse initiale, le temps et l'accélération) est valable lorsque :

a.  $x$  est constant   b.  $v$  est constant   c.  $a$  est constant   d. toujours   e. aucune de ces réponses

(Concours 2019-2020/ Physique Mécanique)



### I.3 LES MOUVEMENTS PENDULAIRES

La période du pendule pesant  $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$

$m$ : la masse

$J$ : moment d'inertie

$a$ : la distance par rapport au centre de gravité du corps

Le pendule simple est considéré comme un pendule pesant idéal.

La période du pendule simple est donnée par :  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

La période d'oscillation est donnée par :  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

#### EXERCICE 260

Une balançoire (assimilée à un pendule simple) sur laquelle est assise une personne de 60 kg a une période d'oscillation  $T$ . Si cette personne prend sur ses genoux un enfant de 30 kg, la période d'oscillation vaudra :

- a)  $T$    b)  $T/2$    c)  $2T/3$    d)  $3T/3$    e)  $ABR$

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

(Concours 2015-2016/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

#### Indication

$$T_2 = T \sqrt{\frac{3}{2}}$$

#### EXERCICE 261

La longueur d'un pendule simple dont la demi-période vaut 1s est égale à :

- a)  $\frac{1}{4}m$    b)  $\frac{1}{2}m$    c)  $1m$    d)  $2m$    e)  $4m$

Prendre  $g=10 \text{ m/s}^2$  et  $\pi^2 = 10$

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

#### Indication

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

### EXERCICE 262

La période d'une masse de 0,75 kg au bout d'un ressort de 1,5 s. Alors la constante de raideur de ce ressort est égale à

a)  $13,2 \text{ kg/s}^2$     b)  $13,2 \text{ m/N}$     c)  $13,2 \text{ kg/m}$     d)  $13,2 \text{ N/m}$

e) Les réponses a) et d) sont correctes

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 263

Une masse attachée à un ressort effectuant un mouvement harmonique d'amplitude  $Z$  parcourt en un cycle une distance égale à :

a.  $Z$     b.  $2Z$     c.  $4Z$     d.  $8Z$     e. aucune de ces réponses

(Concours 2019-2020 /Physique-Mécanique)

### EXERCICE 264

Une masse attachée à un ressort effectuant un mouvement harmonique d'amplitude  $A$  parcourt durant une demi-période une distance égale à :

a)  $A$     b)  $2A$     c)  $4A$     d)  $8A$     e) aucune de ces réponses

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

## I.4 DYNAMIQUE

$$F = m \cdot a$$

Le poids d'un corps :  $P = m \cdot g$  (en N)

Le travail  $W = F \cdot l$  (en joule)

Le travail de la pesanteur  $W = F \cdot h$

La puissance  $P = \frac{W}{t}$  (en Watt)

### EXERCICE 265

Calculer la puissance de l'eau d'une pompe d'eau qui pèse 2000 kg à une distance verticale de 2 m en 4 secondes ( $g=10 \text{ m/s}^2$ )

- a) 2 KW    b) 1,5 KW    c) 1 KW    d) 0,5 KW    e) 3 KW

(Concours 2010-2011/Physique-Mécanique)

#### Indication

$$P = 10 \text{ kw}$$

### EXERCICE 266

On exerce une force sur une masse de 5 kg pour réduire sa vitesse de 7 m/s à 3 m/s en 2 s. Trouver la force en newtons :

- a) 10N    b) 20 N    c) -10 N    d) 15 N    e) ABR

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

#### Indication

$$F = 10 \text{ N}$$

### EXERCICE 267

Un corps de masse  $m$  est au repos sur le plan horizontal. Selon la troisième loi de Newton, la réaction à son poids ( $mg$ ) est :

a) La force normale  $N$  du plan sur le corps b) la force  $-mg$  appliquée au centre de gravité du corps c) la force de frottement qui empêche le corps de glisser d) la force de contact exercée par le corps sur le plan.

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

## EXERCICE 268

Si en l'absence de frottement une force  $F$  produit une accélération  $\theta$  lorsqu'elle agit sur une masse  $m$ , alors si l'on triple la masse et si l'on multiplie la force par 6, l'accélération qui en résulte est de :

- a)  $\theta$     b)  $\theta/2$     c)  $2\theta$     d)  $\theta/6$     e) *ABR*

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2018-2019/Physique-Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

### Indication

$$a_2 = 2\theta$$



## I.5 DILATATION DES GAZ

La pression est donnée par :  $P = \frac{F}{S}$       Unité : Pascal ou  $N/m^2$

F : la force    et S : la surface

Il y a trois lois dans l'étude de la dilatation des gaz

**Lois de Gay Lussac** : La variation de volume sous la pression constante (Transformation isobare)

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

**Loi de Charles** : dilatation à volume constant (Transformation isochore)

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

Loi de Boyle Mariotte : Transformation à température constante (Transformation isotherme).     $P_1V_1 = P_2V_2$

### EXERCICE 269

Une masse d'air occupe  $1000 \text{ m}^3$  si sa pression est réduite au  $\frac{1}{4}$  de sa valeur initiale, la température étant maintenue constante. Quelle est la valeur du volume initial?

a)  $50 \text{ cm}^3$     b)  $1000 \text{ cm}^3$     c)  $2000 \text{ cm}^3$     d)  $4000 \text{ cm}^3$     e)  $1600 \text{ cm}^3$

(Concours 2010-2011/Physique-Mécanique)

#### Indication

Comme la température est constante, utiliser la loi de Boyle-Mariotte.

$$V_1 = 250 \text{ cm}^3$$

## I.6 EQUATIONS AUX DIMENSIONS

La dimension d'une grandeur est la manière dont elle se compose à partir de sept grandeurs fondamentales. Pour trouver l'équation aux dimensions d'une grandeur, on peut utiliser sa formule et son unité.

GRANDEUR	EQUATIONS AUX DIMENSIONS	UNITES (S.I)
Longueur	L	Mètre (m)
Masse	M	Kilogramme (kg)
Temps	T	Seconde (s)
Intensité de courant électrique	$I_0$	Ampère (A)
Température thermodynamique	$\theta$	Kelvin (K)
Quantité de matière	$\mu$	Mole (mol)
Intensité lumineuse	$I_1$	Candela (cd)
Superficie	$L^2$	Mètre carré (m <sup>2</sup> )
Volume	$L^3$	Mètre cube (m <sup>3</sup> )
Vitesse	$L.T^{-1}$	Mètre par seconde (m/s)
Accélération	$L.T^{-2}$	Mètre par seconde carrée (m/s <sup>2</sup> )
Nombre d'onde	$L^{-1}$	1 par mètre (m <sup>-1</sup> )
Masse volumique	$L^{-3}.M$	Kilogramme par mètre cube (Kg/m <sup>3</sup> )
Densité de courant	$L^{-2}.I_0$	Ampère par mètre carré (A/m <sup>2</sup> )
Champ magnétique	$L^{-1}.I_0$	Ampère par mètre (A/m)
Concentration (de quantité de matière)	$L^{-3}.\mu$	Mole par mètre cube (mol/m <sup>3</sup> )
Volume massique	$M^{-1}.L^3$	Mètre cube par kilogramme (m <sup>3</sup> /kg)

Charge (électrique) volumique	$L^{-3}.T.I_0$	Coulomb par mètre cube (C/m <sup>3</sup> )
Déplacement électrique	$L^{-2}.T.I_0$	Coulomb par mètre carré (C/m <sup>2</sup> )
Permittivité	$L^{-3}.M^{-1}.T^4.I_0^2$	Farad par mètre (F/m)
Perméabilité	$L.M.T^{-2}.I_0^{-2}$	Henry par mètre (H/m)
Energie molaire	$L^2.M.T^{-2}.\mu^{-1}$	Joule par mole (J/mol)
Entropie molaire, capacité thermique molaire	$L^2.M.T^{-2}.\theta^{-1}.\mu^{-1}$	Joule par mole Kelvin (J/mol.K)
Exposition (rayons X et $\gamma$ )	$M^{-1}.T.I_0$	Coulomb par kilogramme (C/kg)
Débit de dose absorbée	$L^2.T^{-3}$	Gray par seconde (Gy/s)

Luminance lumineuse	$L^{-2} \cdot I_1$	Candela par mètre carré (cd/m <sup>2</sup> )
Fréquence	$T^{-1}$	Hertz (Hz)
Force	$L.M.T^{-2}$	Newton (N)
Pression, contrainte	$L^{-1}.M.T^{-2}$	Pascal (Pa)
Energie, travail, quantité de chaleur	$L^2.M.T^{-2}$	Joule (J)
Puissance, flux énergétique	$L^2.M.T^{-3}$	Watt (W)
Quantité d'électricité, charge électrique	$I_0.T$	Coulomb (C)
Potential électrique, tension électrique, force électromotrice	$L^2.M.T^{-3}.I_0^{-1}$	Volt (V)
Capacité électrique	$L^{-2}.M^{-1}.T^4.I_0^2$	Farad (F)
Résistance électrique	$L^2.M.T^{-3}.I_0^{-2}$	Ohm ( $\Omega$ )
Conductance	$L^{-2}.M^{-1}.T^3.I_0^2$	Siemens (S)
Flux d'induction magnétique	$L^2.M.T^{-2}.I_0^{-1}$	Weber (Wb)

Induction magnétique	$M.T^{-2}.I_0^{-1}$	Tesla (T)
Inductance	$L^2.M.T^{-2}.I_0^{-2}$	Henry (H)
Température Celsius	$\theta$	Degré Celsius ( $^{\circ}C$ )
Flux lumineux	$I_1$	Lumen (lm)
Eclairage lumineux	$L^{-2}.I_1$	Lux (lx)
Activité (rayonnements ionisants)	$T^{-1}$	Becquerel (Bq)
Dose absorbée, énergie communiquée massique	$L^2.T^{-2}$	Gray (Gy)
Viscosité dynamique	$L^{-1}.M.T^{-1}$	Pascal-seconde (Pa.s)
Moment d'une force	$L^2.M.T^{-2}$	Mètre-newton (N.m)
Tension superficielle	$M.T^{-2}$	Newton par mètre (N/m)
Densité de flux thermique, éclairage énergétique	$M.T^{-3}$	Watt par mètre carré (W/m <sup>2</sup> )
Capacité thermique, entropie	$L^2.M.T^{-2}.\theta^{-1}$	Joule par Kelvin (J/K)
Chaleur massique	$L^2.T^{-2}.\theta^{-1}$	Joule par kilogramme Kelvin (J/kg.K)
Energie massique	$L^2.T^{-2}$	Joule par kilogramme (J/kg)
Conductivité thermique	$L.M.T^{-3}.\theta^{-1}$	Watt par mètre Kelvin (W/m.K)
Coefficient de convection	$M.T^{-3}.\theta^{-1}$	Watt par mètre carré Kelvin (W/m <sup>2</sup> .K)
Energie volumique	$L^{-1}.M.T^{-2}$	Joule par mètre cube (J/m <sup>3</sup> )
Champ électrique	$L.M.T^{-3}.I_0^{-1}$	Volt par mètre (V/m)

### EXERCICE 270

Si [L] représente la dimension de la longueur et [T] celle du temps, alors les équations aux dimensions de l'accélération sont :

a)  $[L + T^2]$  b)  $[L/T]$  c)  $[L^2/T]$  d)  $[L/T^2]$  e) ABR

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2018-2019/Physique-Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

#### Indication

On sait que  $a$  s'exprime en  $m/s^2$

### EXERCICE 271

Laquelle des unités suivantes est différente des autres ?

a) newton-mètre par seconde b) Kilogramme-mètre<sup>2</sup> par seconde<sup>3</sup>

c) joule par seconde d) watt e) aucune de ces réponses

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2018-2019/Physique-Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

#### Indication

Procéder par l'analyse dimensionnelle

### EXERCICE 272

Si nous représentons les dimensions de masse, de longueur et de temps par M, L et T respectivement, alors les dimensions de l'impulsion sont :

a)  $[MLT^{-1}]$  b)  $[ML^2T^{-2}]$  c)  $[MLT^{-2}]$  d)  $[LTM^{-1}]$  e) ABR

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2018-2019/Physique-Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

#### Indication

La formule de l'impulsion est :  $Impulsion = F \cdot t$

### EXERCICE 273

Si L représente une longueur, T un temps et M une masse, les dimensions d'une force sont :

a)  $[ML^2]$    b)  $[MLT^{-1}]$    c)  $[MLT^{-2}]$    d)  $[LTM^{-1}]$    e)  $ABR$

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

#### Indication

$$F = m \cdot a$$

### EXERCICE 274

Les dimensions (L : longueur ; M : masse ; T : temps) de la contrainte sont :

a)  $[LM^{-1}]$    b)  $[L^3TM^{-1}]$    c)  $[M^3TL^{-1}]$    d)  $[MT^{-2}L^{-1}]$    e)  $[MT^{-3}L^{-1}]$

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

#### Indication

La contrainte est donnée par la formule :

$$\text{contrainte} = \frac{F}{A}$$

*Les érudits*

## I.7 COMPLEMENTS

### EXERCICE 275

L'aptitude que possède un corps à produire du travail à cause de sa vitesse est donnée par son.....

(Concours 2023-2024/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 276

Une femme de 50 kg escalade une montagne haute de 3000 m. Quel travail effectue-t-elle en joules pour vaincre la pesanteur ?

(Accélération de la pesanteur  $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

(Concours 2023-2024/Physique-Mécanique)

#### Résolution

$$W = m \cdot g \cdot h$$

### EXERCICE 277

Le travail s'exprime dans le système MKSA en :

- a)  $N/s$       b)  $N$       c)  $Nm$       d)  $Nm/s^2$       e)  $ABR$

(Concours 2015-2016/Physique-Mécanique)

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

(Concours 2022-2023/Physique-Mécanique)

#### Indication

$$W = F \cdot d$$

### EXERCICE 278

Une particule de masse  $m$  en rotation avec une vitesse angulaire  $\omega$  sur une orbite circulaire de rayon  $R$ , le rapport  $L/P$  ( $L$ =moment cinétique de la particule et  $P$  sa quantité de mouvement) est égal à

- a)  $m$       b)  $mR^2$       c)  $R$       d)  $\omega$       e)  $ABR$

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

### Indication

$$L = mR^2 \quad \text{et} \quad P = mv$$

$$\text{Or } v = R\omega \Rightarrow P = mR\omega$$

### EXERCICE 279

Faites correspondre les grandeurs fondamentales du système MKSA à leurs unités  
(Concours 2010-2011/Physique-Mécanique)

### EXERCICE 280

De quelle hauteur au-dessus de la surface de la terre doit on soulever une masse de 1 kg pour qu'elle ait une énergie potentielle gravitationnelle de 1 J par rapport à cette surface ?

- a) 9,8 m      b) 1 m      c) 0,10 m      d) 0,01 m      e) 320 m

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

### Indication

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

### EXERCICE 281

Pour qu'une masse de 1 kg ait une énergie cinétique de 1 J, sa vitesse doit être :

- a) 1 m/s      b) 9,8 m/s      c) 1,414 m/s      d) 10 m/s      e) ABR

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2018-2019/Physique-Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

### Indication

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

### EXERCICE 282

Prenant l'énergie potentielle gravitationnelle nulle à l'infini, pour augmenter l'énergie potentielle gravitationnelle d'un corps de 1 N de 1 J, il faut le soulever du sol d'une hauteur de :

- a) Infini      b) 10 m      c) 1 m      d) -1 m      e) ABR

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

**Indication**

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

**EXERCICE 283**

Une fusée voyageant dans l'espace à une certaine vitesse  $v$ , met à feu ses moteurs dans le but de doubler sa vitesse et largue, en même temps, une certaine cargaison, réduisant ainsi sa masse à la moitié de sa valeur. Alors son énergie cinétique est :

- a) Doublée b) triplée c) quadruplée d) est conservée e) ABR

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

**Indication**

$$E_{c1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Etablir le rapport entre les deux énergies cinétiques

$$E_{c2} = 2 \cdot E_{c1}$$

**EXERCICE 284**

De quelle hauteur au-dessus de la surface de la terre doit on soulever une masse de 1 kg pour qu'elle ait une énergie potentielle gravitationnelle de 1 J par rapport à cette surface ? (Accélération de la pesanteur  $g=10m/s^2$ )

- a) 9,8 m b) 1 m c) 0,10 m d) 0,01 m e) 320 m

(Concours 2018-2019/Physique-Mécanique)

**Indication**

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

**EXERCICE 285**

Un câble de 130 cm de long et de 2 mm de diamètre est soumis à une force de traction de 600 N. Sa longueur finale est de 130, 26 cm. Quel est le module de Young du matériau qui constitue ce câble ?

- a)  $95,5 \times 10^9 N/m^2$  b)  $10 N/m^2$  c)  $24 \times 10^9 N/m^2$

d)  $1,91 \times 10^8 \text{ N/m}^2$  e) ABR

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

### Indication

Le module de Young est donné par la formule :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Avec  $\sigma$  (La contrainte) donnée par :  $\sigma = \frac{F}{A}$

$\epsilon$  (la déformation) donnée par :  $\epsilon = \frac{L' - L}{L}$

F : la force

A : la surface

L' : longueur finale

L : longueur initiale

### EXERCICE 286

Un Newton est la force :

a. Nécessaire pour faire déplacer une masse de 1 kg à 1 m/s b. nécessaire pour accélérer une masse de 1 kg à  $1 \text{ m/s}^2$  c. nécessaire pour accélérer une masse de 1g à  $1 \text{ cm/s}^2$  d. égale au poids sur terre d'une masse de 1kg e. aucune de ces réponses

(Concours 2019-2020/ Physique Mécanique)

### EXERCICE 287

Si une force non nulle horizontale et constante agit sur un corps posé au repos sur une table sans frottement, le corps :

a. parfois accélère b. se meut toujours à vitesse constante c. acquiert toujours la même accélération d. accélère si la force dépasse son poids e. aucune de ces réponses.

(Concours 2019-2020/ Physique Mécanique)

### EXERCICE 288

Soit un pendule simple de masse  $M$  et de longueur  $L$ . La longueur d'un pendule simple de masse  $2M$  ayant une période double vaut :

- a)  $L/4$    b)  $L/2$    c)  $2L$    d)  $4L$    e) aucune de ces réponses

(Concours 2019-2020/ Physique Mécanique)

#### Indication

La période d'oscillation d'un pendule simple ne dépend pas de la masse accrochée au fil.

On sait que  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$   $\Leftrightarrow T^2 = \left(2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\right)^2$

$l_2 = 4L$

Les érudits

## II. ELECTRICITE

---

### II. 1 ELECTROSTATIQUE

#### II.1.1 Force coulombienne

$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{q \cdot q'}{r^2}$$

$$|e| = 1,6 \times 10^{-19} C$$

Densité électrique :  $\delta = \frac{q}{s}$  (s : la surface)

F : la force en N, q : la charge en C

#### II.1.2 Champ électrique

$$E = 9 \cdot 10^9 \frac{q}{r^2} \quad (\text{En N/C})$$

$$F = q \cdot E$$

Les lignes de champs créées par une charge négative s'orientent vers elle, tandis que celles créées par une charge positive s'éloignent d'elle.

#### II.1.3 Le potentiel électrique

$$V = 9 \cdot 10^9 \frac{q}{r} \quad (\text{en Volts})$$

Travail d'une force électrique :  $W = q \cdot E \cdot d = q(V_A - V_B)$

$$E = \frac{V}{r}$$

#### II.1.4 Les condensateurs

Capacité d'un condensateur sphérique :

$$C = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{R \cdot r}{R - r}$$

*R: rayon de la sphère extérieure*

*r: rayon de la sphère intérieure*

Capacité du condensateur plan

$$C = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{S}{4\pi d} \quad S : \text{la surface}$$

Energie d'un condensateur  $E = \frac{1}{2} C \cdot V^2$

Association des condensateurs :

En parallèle :

$$V_1 = V_2 = V_e \text{ et } Q_e = Q_1 + Q_2$$

$$C_e = C_1 + C_2$$

En série :

$$Q_1 = Q_2 = Q_e \text{ et } V_e = V_1 + V_2$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

### EXERCICE 289

La neutralité électrique de l'atome à l'état libre est due :

1. Au nombre d'électrons
2. Au nombre de protons
3. Au volume de l'atome
4. A l'égalité du nombre d'électrons et de protons
5. A la charge de neutrons

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

### EXERCICE 290

Le dispositif qui emmagasine l'énergie électrique sous forme d'un champ est appelé :

1. Générateur
2. Condensateur
3. Ampèremètre
4. Voltmètre
5. Résistance morte

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique- Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

### EXERCICE 291

Lorsque les condensateurs sont branchés en parallèle

1. Tous les condensateurs se trouvent à la même différence de potentiel
2. Le courant électrique est nul
3. La capacité équivalente est nul
4. L'énergie stockée diminué
5. Les charges s'égalisent.

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

### EXERCICE 292

Le champ électrique créé par une charge au point situé à une distance de  $4\text{ m}$  est de  $2 \cdot 10^{-3}\text{ N/C}$ . Le potentiel électrique est :

- 1)  $5 \cdot 10^{-3}\text{ V}$    2)  $8 \cdot 10^{-3}\text{ V}$    3)  $2 \cdot 10^{-3}\text{ V}$    4)  $9 \cdot 10^{-3}\text{ V}$    5)  $12 \cdot 10^{-3}\text{ V}$

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

#### Indication

$$E = \frac{V}{r} \Rightarrow V = E \cdot r$$

### EXERCICE 293

Elle représente l'énergie qu'il faut pour déplacer une charge électrique d'un point en un autre et peut s'exprimer en  $\text{Nm/C}$ . Cette grandeur s'appelle :

1. Capacité électrique   2. Champ électrique   3. Potentiel électrique   4. Force de Coulomb   5. Flux d'induction magnétique

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

### EXERCICE 294

Une des affirmations suivantes est fausse :

- a) Il y a deux types d'électricité : l'électricité positive et l'électricité négative  
b) L'unité de la charge électrique est le Newton  
c) Deux charges électriques de même type se repoussent tandis que deux charges de type contraires s'attirent.  
d) L'état électrique d'un corps se détecte à l'aide d'un pendule électrique.

(Concours /Physique-Electricité)

### EXERCICE 295

L'équation  $V = 9 \cdot 10^9 \frac{Q}{r}$  exprime :

Où  $k$ =constante ;  $Q$ = la charge électrique et  $r$ =distance

- a) La force Coulomb
- b) Le champ électrique
- c) Le potentiel électrique
- d) Aucune bonne réponse

(Concours /Physique-Electricité)

### EXERCICE 296

Deux sphères de charge électrique identique sont à 10 dm l'une de l'autre. Elles se repoussent avec une force de 9N. Quelle est leur charge électrique respective ?

(Concours 2009/Physique-Electricité)

#### Indication

$$Q^2 = 10^{-9} \Rightarrow Q = Q' = \sqrt{10^{-9}}C$$

### EXERCICE 297

Deux charges ponctuelles de  $+5\mu C$  et  $+8\mu C$  sont placées dans l'air, à une distance de 40 cm l'une de l'autre. Quel est, au centième près et en newton, l'intensité de la force de répulsion que ces charges exercent l'une sur l'autre ?

On donne :  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$  unité du système internationale

- a)  $2,25 \cdot 10^{-6}N$  b)  $0,9 \cdot 10^{-6}N$  c)  $0,25 \cdot 10^{-6}N$  d)  $1 N$  e)  $7,31 \cdot 10^{-6}N$

(Concours 2017-2018/Physique-Electricité)

#### Indication

$$F = 2,25 N$$

### EXERCICE 298

Deux charges ponctuelles de  $+5\mu C$  et  $+8\mu C$  sont placées dans l'air, à une distance de 20 cm l'une de l'autre. Quel est, au centième près et en newton, l'intensité de la force de répulsion que ces charges exercent l'une sur l'autre ?  
On donne :  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$  unité du système internationale

- a)  $2,25 \cdot 10^{-6} N$  b)  $3,60 \cdot 10^{-6} N$  c)  $0,25 \cdot 10^{-6} N$  d)  $10^{-6} N$  e)  $9,00 \cdot 10^{-6} N$

(Concours 2017-2018/Physique-Electricité)

#### Indication

$$F = 9 N$$

### EXERCICE 299

Deux charges ponctuelles  $q_1 = +10\mu C$  et  $q_2 = +20\mu C$  sont placées aux points A(-20 cm) et B(40 cm) de l'axe OX.

Le champ électrique résultant créé par la distribution de deux charges au point C(50 cm) de l'axe OX, exprimé en N/C et au centième près vaut :

- a)  $17,62 \cdot 10^6$  b)  $18,00 \cdot 10^6$  c)  $0,18 \cdot 10^6$  d)  $18,18 \cdot 10^6$  e)  $1,08 \cdot 10^6$

(Concours 2018-2019/Physique-Electricité)

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

#### Indication

$$E_1 = \frac{9}{49} \cdot 10^6 N/C$$

$$E_2 = 18 \cdot 10^6 N/C$$

$$E = 18,18367347 \cdot 10^6 N/C$$

### EXERCICE 300

Deux charges ponctuelles  $q_1 = +10\mu C$  et  $q_2 = +20\mu C$  sont placées aux points A(-20 cm) et B(40 cm) de l'axe OX.

Le potentiel électrique créé par la distribution de deux charges au point C(50 cm) exprimé en Volt et au dixième près vaut :

- a)  $1,3 \cdot 10^5$  b)  $19,3 \cdot 10^5$  c)  $18,0 \cdot 10^5$  d)  $16,7 \cdot 10^5$  e)  $5,4 \cdot 10^5$

(Concours 2018-2019/Physique-Electricité)

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

#### Indication

$$V_1 = \frac{9}{7} \cdot 10^5 \text{ volts}$$

$$V_2 = 18 \cdot 10^5 \text{ volts}$$

$$V = 19,28571429 \text{ volts}$$

### EXERCICE 301

Deux charges ponctuelles  $q_1 = +10\mu\text{C}$  et  $q_2 = +20\mu\text{C}$  sont placées aux points A(-20 cm) et B(40 cm) de l'axe OX.

L'intensité de la force électrostatique que la distribution exerce sur une charge de  $+5\mu\text{C}$  placée au point C(50 cm), exprimée en Newton, au centième près, vaut :

- a) 89,10    b) 90,00    c) 90,90    d) 0,90    e) 5,40

(Concours 2018-2019/Physique-Electricité)

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

#### Indication

$$F_{31} = \frac{45}{49} \text{ N}$$

$$F_{32} = 90 \text{ N}$$

$$F = 90,91836735 \text{ N}$$

### EXERCICE 302

Deux charges ponctuelles  $q_1 = +10\mu\text{C}$  et  $q_2 = +20\mu\text{C}$  sont placées aux points A(-20 cm) et B(40 cm) de l'axe OX.

Le travail accompli par les forces extérieures pour déplacer une charge de  $+5\mu\text{C}$  du point C(50cm) au point D(30cm) de l'axe OX, exprimé en Joules, au dixième près vaut :

- a)  $-2,6 \cdot 10^{-1}$     b) - 9,2    c) - 0,9    d) - 1,6    e) - 7,2

(Concours 2018-2019/Physique-Electricité)

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

#### Indication

$$W = q \cdot E \cdot d$$

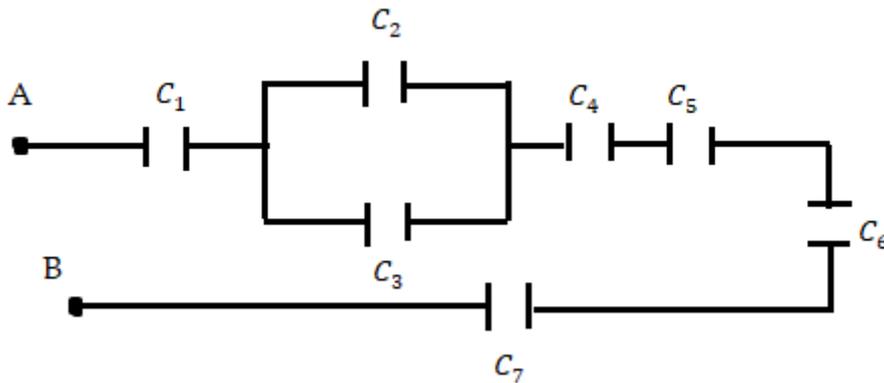
$$W = 112,5 \cdot 10^{-2} \text{ joules}$$

### EXERCICE 303

On donne le montage de la figure suivante, pour lequel :

$$C_1 = 3\mu F, C_2 = 2\mu F, C_3 = 5\mu F, C_4 = 5\mu F, C_5 = 5\mu F, C_6 = 3\mu F, C_7 = 3\mu F$$

$$\text{Et } V_A - V_B = 24V.$$



1. La capacité équivalente du montage vue des bornes A et B, exprimée en  $\mu F$ , au centième près vaut :

- a) 0,05    b) 1,43    c) 0,48    d) 21,00    e) 0,65

2. La charge totale condensée sur le condensateur équivalent vaut :

- a)  $1,2\mu C$     b)  $49,68\mu C$     c)  $15,56\mu C$     d)  $120\mu C$     e)  $34,32\mu C$

3. La charge condensée sur les armatures du condensateur  $C_2$  vaut, au centième près :

- a)  $11\mu C$     b)  $15,56\mu C$     c)  $4,44\mu C$     d)  $20,00\mu C$     e)  $34,32\mu C$

4. La tension aux bornes du condensateur  $C_3$  vaut, au centième près :

- a)  $24,00V$     b)  $2,20V$     c)  $0,24V$     d)  $9,9V$     e)  $8,06V$

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

#### Indication

$$C_e = 0,648148148\mu F$$

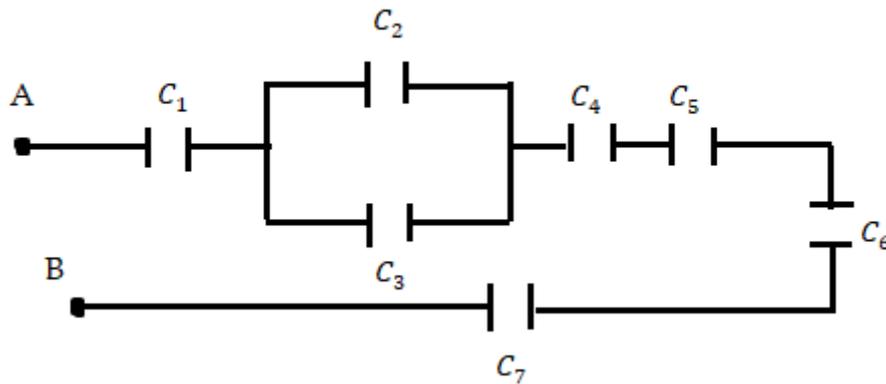
$$Q_e = C_e \times V_{AB}$$

### EXERCICE 304

On donne le montage de la figure suivante, pour lequel :

$$C_1 = 4\mu F, C_2 = 6\mu F, C_3 = 3\mu F, C_4 = 2\mu F, C_5 = 2\mu F, C_6 = 8\mu F, C_7 = 8\mu F$$

$$\text{Et } V_A - V_B = 48V.$$



1) La capacité équivalente du montage vue des bornes A et B, exprimée en  $\mu F$ , au dixième près vaut :

- a) 2,0   b) 1,5   c) 0,5   d) 0,6   e) 0,3

2) La charge totale condensée sur le condensateur équivalent vaut, au dixième près :

- a) 24,0  $\mu C$    b) 28,5  $\mu C$    c) 72,0  $\mu C$    d) 14,4  $\mu C$    e) 15,8  $\mu C$

3) La charge condensée sur les armatures du condensateur  $C_2$  vaut :

- a) 36  $\mu C$    b) 17,11  $\mu C$    c) 24  $\mu C$    d) 11,40  $\mu C$    e) 48  $\mu C$

4) La tension aux bornes du condensateur  $C_3$  vaut, au centième près :

- a) 6 V   b) 24 V   c) 12 V   d) 36 V   e) 3 V

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

### EXERCICE 305

Deux charges ponctuelles  $q_1 = +20\mu C$  et  $q_2 = +10\mu C$  sont placées aux points A(-20 cm) et B(40 cm) de l'axe OX.

1) Le champ électrique résultant créé par la distribution de deux charges au point C(25 cm) de l'axe OX, exprimé en N/C et au centième près vaut :

- a)  $8,89 \cdot 10^5$    b)  $40,00 \cdot 10^5$    c)  $31,11 \cdot 10^5$    d)  $48,89 \cdot 10^5$    e)  $80,00 \cdot 10^5$

2) Le potentiel électrique créé par la distribution de deux charges au point C exprimé en Volt et au dixième près vaut :

- a)  $0,4 * 10^6$     b)  $0,6 * 10^6$     c)  $0,2 * 10^6$     d)  $- 0,6 * 10^6$     e)  $1,0 * 10^6$

3) L'intensité de la force électrostatique que la distribution exerce sur une charge de  $+5 \mu C$  placée au point C(25 cm), exprimée en Newton, au centième près, vaut :

- a) 15,55    b) 20,00    c) 4,45    d) 40,00    e) 5,00

4) Le travail accompli par les forces extérieures pour déplacer une charge de  $+5 \mu C$  du point C(25cm) au point D(35cm) de l'axe OX, exprimé en Joules, au dixième près vaut :

- a) 5,6    b)  $- 1,3$     c) 4,4    d) 5,0    e) 8,8

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)



## II.2 ELECTRODYNAMIQUE

L'intensité du courant :  $I = \frac{V}{R}$

$$W = V.I.t$$

$$P = \frac{W}{t} = V.I = R.I^2$$

$$W = R.I^2.t$$

$$1 \text{ kWh} = 36.10^5 \text{ J}$$

La quantité de chaleur dégagée dans un conducteur :

$$Q = 0,24.10^{-3}R.I^2.t \quad (\text{En Kcal})$$

Loi de Pouillet :  $R = \rho \frac{l}{S}$

R : résistance en  $\Omega$

l : la longueur en m

$\rho$  : résistivité en  $\Omega m$

S : section en  $m^2$

Association des résistances :

En série :

$$R = R_1 + R_2$$

$$\text{En parallèle : } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

### EXERCICE 306

Quatre résistances suivantes :  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 2 \Omega$  et  $R_4 = 40 \Omega$  sont branchées en parallèle. Ces quatre résistances sont connectées en série avec deux résistances en série  $R_5 = 1 \Omega$  et  $R_6 = 4 \Omega$ . La résistance équivalente de l'ensemble est :

- 1) 6,48  $\Omega$     2) 6,47  $\Omega$     3) 6,49  $\Omega$     4) 6,45  $\Omega$     5) 6,44  $\Omega$

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

#### Indication

$$\frac{1}{R_{e1}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$R_e = 6,481481 \dots \Omega$$

### EXERCICE 307

Un courant se bifurque entre trois points d'un circuit électrique. Les résistances des trois dérivations sont respectivement de  $5\Omega$ ,  $3\Omega$  et  $15\Omega$ . L'ensemble est branché en série avec une résistance de  $13\Omega$ . La différence de potentiel aux bornes du groupement est de  $220\text{ V}$ . L'intensité du courant principal est égale à :

- 1)  $15\text{ A}$    2)  $16\text{ A}$    3)  $14\text{ A}$    4)  $13\text{ A}$    5)  $17\text{ A}$

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

#### Indication

Les trois premières résistances sont en parallèle

L'ensemble est branché en série avec une résistance de  $13\Omega$

$$R_e = \frac{44}{3} \Omega$$

$$I = 15\text{ A}$$

### EXERCICE 308

Le dégagement de la chaleur qui accompagne le passage du courant électrique dans un conducteur est appelé :

1. Effet joule   2. Champ électrique   3. Potentiel électrique   4. Force de Coulomb  
5. Attraction électrostatique

(Concours 2022-2023/Physique – Electricité)

### EXERCICE 309

La tension  $U$  aux bornes d'un générateur électrique est la différence de potentiel lorsque le circuit est :

1. Fermé   2. Ouvert   3. Composé des résistances en parallèle   4. Composé des résistances en série   5. Composé des condensateurs.

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

### EXERCICE 310

La pile d'un téléphone est :

1. Un générateur électrique
2. Un condensateur
3. Un ampèremètre
4. Une résistance
5. Un voltmètre

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

### EXERCICE 311

Calculez la résistance d'un fil de fer de 60 m de longueur. Le diamètre du fil est de 2 mm et la résistivité du fer est égale à  $389.10^{-6} \Omega m$ .

- 1)  $2.10^6 \Omega$    2)  $2.10^4 \Omega$    3)  $2.10^2 \Omega$    4)  $2.10^5 \Omega$    5)  $2.10^3 \Omega$

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

#### Indication

$$R = 7,433. 10^3 \Omega$$

### EXERCICE 312

Lorsque les résistances sont branchées en série :

1. Toutes les résistances sont traversées par le même courant
2. Chaque résistance est traversée par son propre courant
3. La résistance équivalente est nulle
4. La résistance équivalente est égale à la somme des résistances
5. Chaque résistance a sa différence de potentiel.

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

### EXERCICE 313

Il transforme l'énergie électrique sous une autre forme d'énergie, il s'agit de :

1. Récepteur électrique
2. Générateur électrique
3. Ampèremètre
4. Voltmètre
5. Résistance électrique.

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

### EXERCICE 314

Le courant électrique est :

- a) Un mouvement des électrons d'un point où ils sont en excès vers un point où ils sont en petit nombre.
- b) La quantité des charges (nombre d'électron) qui traversent un conducteur en un temps donné.
- c) La différence de concentration entre deux points permettant ainsi le passage des charges permanent.

(Concours/Physique-Electricité)

### EXERCICE 315

Qu'entendez-vous par « effet joule »

- a) Le passage du courant dans un liquide
- b) L'échauffement consécutif au passage du courant
- c) La décomposition d'une solution suite au passage du courant
- d) Aucune bonne réponse

(Concours/Physique-Electricité)

### EXERCICE 316

Un courant de 20A traverse une solution de sulfate de cuivre pendant deux heures. Quelle est la masse de cuivre déposée à la cathode sachant que la masse atomique du cuivre vaut 63,5 gr ?

(Concours 2009/Physique-Electricité)

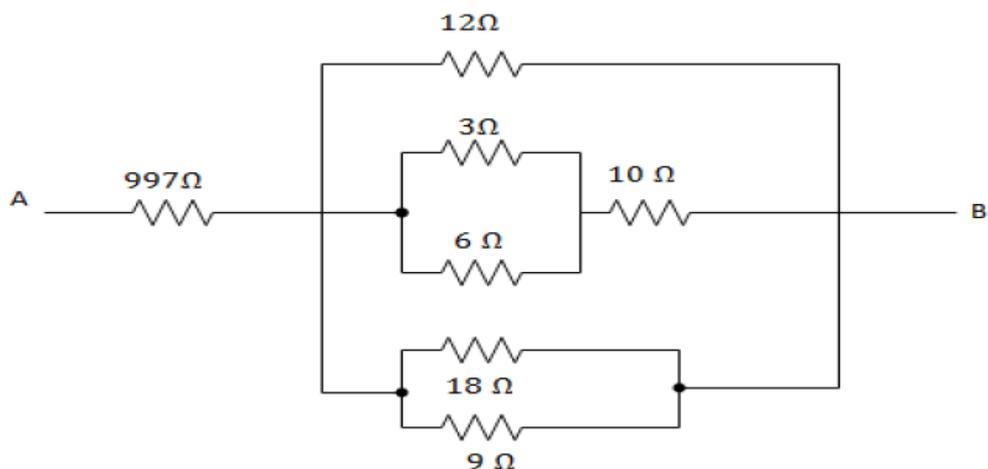
#### Indication

$$m = \frac{1}{96500} \cdot \frac{A}{n} \cdot I \cdot t$$

$$m = 47,37823834 \text{ gr.}$$

### EXERCICE 317

Un récepteur électrique représenté par le circuit suivant absorbe une intensité de courant I ampères sous la tension de 220 volts. Quelle est la valeur de cette intensité de courant et quelle en est la puissance ? Quel est le cout horaire de son fonctionnement sachant que le kWh se paie 1000 FC.



### Indication

$$R = 997 + 3 = 1000\Omega$$

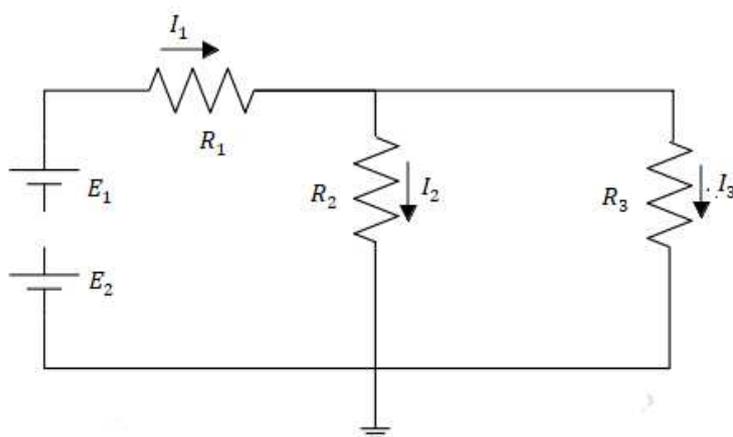
$$I = 0,22 A$$

$$P = 48,4 \text{ watts}$$

$$W = 48,4 \cdot 10^{-3} \text{Kwh}$$

### EXERCICE 318

Considérons trois résistances  $R_1, R_2, R_3$ , et deux sources continues de tension de force électromotrice  $E_1, E_2$ .



$$E_1 = 16 V; \quad E_2 = 3 V; \quad R_1 = R_2 = R_3 = 4 K\Omega$$

1. L'intensité du courant  $I_1$ , à un centième près et en mA ( c'est-à-dire arrondi à deux chiffres après la virgule) vaut :

a) 4,75 mA    b) 4,00 mA    c) 1,58 mA    d) 3,25 mA    e) 3,17 mA

2. L'intensité du courant  $I_2$ , à un centième près et en mA (c'est-à-dire arrondi à deux chiffres après la virgule) vaut :

- a) 0,75 mA    b) 1,58 mA    c) 4,75 mA    d) 4,00 mA    e) 3,25 mA

(Concours 2017-2018/Physique-Electricité)

### Indication

$$R = 4 + 2 = 6 \text{ K}\Omega$$

$$I_1 = 3,1666666667 \text{ mA}$$

Utiliser la loi de diviseurs de courant :

### EXERCICE 319

Trois résistances  $R_1 = 4 \Omega$ ,  $R_2 = 6 \Omega$  et  $R_3 = 12 \Omega$  sont montés en parallèle. La résistance de  $4 \Omega$  est parcouru par un courant de 3A.

1 . La résistance équivalente du montage vaut :

- a) 0,5  $\Omega$     b) 13,09  $\Omega$     c) 2  $\Omega$     d) 0,80  $\Omega$     e) 22  $\Omega$

2 . La tension aux bornes du montage vaut :

- a) 66V    b) 1,50V    c) 6V    d) 12V    e) 39,27V

(Concours 2017-2018/Physique-Electricité)

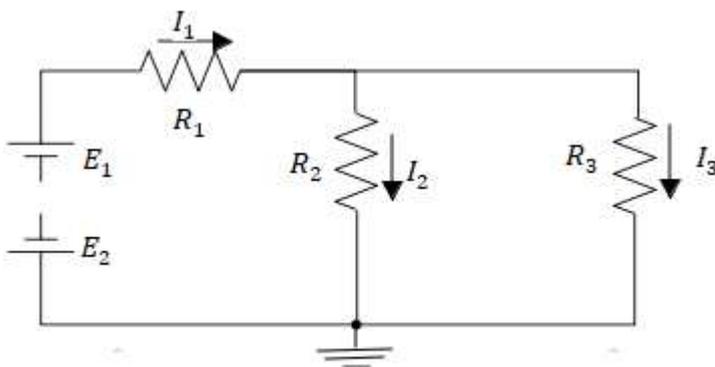
### Indication

$$R = 2 \Omega$$

$$V_1 = V_2 = V_3 = 12 \text{ V}$$

### EXERCICE 320

Considérons trois résistances  $R_1, R_2, R_3$ , et deux sources continues de tension de force électromotrice  $E_1, E_2$ .



$$E_1 = 16 \text{ V}; \quad E_2 = 3 \text{ V}; \quad R_1 = R_2 = R_3 = 4 \text{ K}\Omega$$

1) L'intensité du courant  $I_1$ , à un centième près et en mA ( c'est-à-dire arrondi à deux chiffres après la virgule) vaut :

- a) 3,17 mA    b) 4,00 mA    c) 2,17 mA    d) 3,25 mA    e) 4,75 mA

2) L'intensité du courant  $I_2$ , à un centième près et en mA ( c'est-à-dire arrondi à deux chiffres après la virgule) vaut :

- a) 1,08 mA    b) 1,58 mA    c) 4,00 mA    d) 4,00 mA    e) 3,25 mA

(Concours 2017-2018/Physique-Electricité)

### EXERCICE 321

Trois résistances  $R_1 = 8 \Omega$ ,  $R_2 = 12 \Omega$  et  $R_3 = 24 \Omega$  sont montés en parallèle. La résistance de  $8 \Omega$  est parcouru par un courant de 3A.

1. La résistance équivalente du montage vaut :

- a) 0,54  $\Omega$     b) 4  $\Omega$     c) 2  $\Omega$     d) 52,36  $\Omega$     e) 0,20  $\Omega$

2. La tension aux bornes du montage vaut :

- a) 12V    b) 66V    c) 72V    d) 24V    e) 36 V

(Concours 2017-2018/Physique-Electricité)

#### Indication

$$R = 4 \Omega$$

$$V_1 = V_2 = V_3 = 24 V$$

### EXERCICE 322

On met à votre disposition une source de tension de force électromotrice 17V et deux résistances,  $R_1 = 2,75 K\Omega$  et  $R_2 = 1,5 K\Omega$ , monter ces trois éléments de circuit dans une combinaison de circuit série et calculer :

a) Le courant fourni par cette source de tension

b) Les courants  $I_{R_1}$ ,  $I_{R_2}$  qui traversent respectivement les résistances  $R_1$  et  $R_2$ .

c) Les différences de potentiel respectives  $V_{R_1}$ ,  $V_{R_2}$  aux bornes des résistances  $R_1$  et  $R_2$ .

d) La puissance  $P_S$  fourni par cette source de tension

e) Les puissances respectives  $P_{R_1}$ ,  $P_{R_2}$  dissipées dans les résistances  $R_1$  et  $R_2$ .

(Concours/Physique-Electricité)

#### Indication

$$R_e = 4,25 \text{ K}\Omega = 4250 \text{ }\Omega$$
$$I = 0,004 \text{ A} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$
$$I_{R1} = I_{R2} = I = 4 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

### EXERCICE 323

Une résistance R est parcourue par un courant I.  $R = 5\Omega$  et  $I = 10 \text{ A}$ .

1. La tension aux bornes de cette résistance vaut :

a. 2V    b. 50 V    c. 0,5 V    d. 15 V    e. 500 V

2. La puissance dégagée par effet joule, vaut :

a. 2 W    b. 250 W    c. 50W    d. 500 W    e. 15W

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

#### Indication

$$V = 50 \text{ Volts}$$

$$P = 500 \text{ W}$$

### EXERCICE 324

Une résistance R est parcourue par un courant I.  $R = 2\Omega$  et  $I = 15 \text{ A}$ .

1. La tension aux bornes de cette résistance vaut :

a. 30V    b. 7,5 V    c. 0,13 V    d. 450 V    e. 60 V

2. La puissance dégagée par effet joule, vaut :

a. 60 W    b. 30 W    c. 450W    d. 7,5 W    e. 30W

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

#### Indication

$$V = 30 \text{ Volts}$$

$$P = 450 \text{ W}$$

## II.3. LE MAGNETISME

### EXERCICE 325

Le flux d'induction magnétique  $\Phi$  est exprimé en :

1) *Joule* 2) *Ampère* 3) *Volt* 4) *Tesla* 5) *Weber*

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

### EXERCICE 326

L'induction magnétique B est exprimée en :

1. Joule 2. Ampère 3. Volt 4. Tesla 5. Weber

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

*Les érudits*

# CINQUIÈME PARTIE : FRANÇAIS ET ANGLAIS

# I. FRANÇAIS

---

## EXERCICE 327

Texte

Malgré les bons résultats obtenus par quelques gouvernements, le planning familial n'a pas beaucoup de succès en Afrique. Cet état de chose peut s'expliquer par la force des traditions. En Afrique, on s'unit pour avoir des enfants : il est immoral d'avoir des relations sexuelles si on ne veut pas avoir d'enfants. La contraception qui permet cela est donc mal vue.

D'autre part, dans les sociétés traditionnelles Africaines, avoir un enfant ou ne pas en avoir, dépend uniquement de la femme. En cherchant à associer l'homme à cette décision, le planning familial ne tient pas assez compte de cette mentalité ? En Sierra-Leone, par exemple, certaines sociétés secrètes de femmes luttent contre cette manière de voir du planning familial. Certaines méthodes de planification familiale ne tiennent pas compte non plus de la façon dont les couples vivent réellement ; l'homme et la femme, même s'ils sont mariés, parlent rarement ensemble de leur sexualité et tout ce que s'y rapporte. De plus, la femme n'a pas l'habitude de s'auto observer de la manière dont le recommande la méthode d'auto-observation.

La condition de la femme explique aussi en grande partie l'échec des politiques d'espacement ou de limitation des naissances. En effet, la femme est valorisée par le nombre d'enfants qu'elle a. Une femme inféconde est considérée comme un être inutile et souvent, elle est la risée de ses beaux-parents et de ses co-épouses.

QUESTIONS SUR LE TEXTE (Encerclez les bonnes réponses)

A. Pour l'auteur, la planification familiale en Afrique est aujourd'hui une notion :

1. Indéniable 2. Taboue 3. Abstraite 4. Archaïque 5. Certaine

B. L'auteur de ce texte est sans doute est :

1. Planificateur 2. Infirmier 3. Environnementaliste 4. Médecin 5. Biologiste

C. Quel est le facteur le plus important de l'échec du planning familial dans ce texte ?

1. La condition de la femme 2. L'immoralité des relations sexuelles 3. La force des traditions 4. Le fait de ne pas associer la femme aux décisions 5. La contraception.

### EXERCICE 328

A. Que signifie le préfixe **anté** dans les mots antécédents, antérieure ?

1. Après 2. Devant 3. Ancien 4. Avant 5. Présent

B. Que signifie le préfixe **co** dans l'expression co-épouses ?

1. Autres 2. Bel sœur 3. Second 4. Maître

C. Ecrivez correctement la phrase ci-dessous :

La est par a femme le nombre valorisée d'enfants qu'elle.

.....

D. Complétez les pointillés par ver, vert, verre, vers dans la phrase suivante :

J'ai vu un .....vert dans un verre.....la maison.

E. Faire le parallélisme entre la science et sa définition

(Encerclez la bonne réponse ici)

- |                 |                                  |                           |
|-----------------|----------------------------------|---------------------------|
| A. Phonétique   | a. Etude de fonction des sons    | 1. Aa – Bb – Cc – Dd – Ee |
| B. Phonologie   | b. Etude des noms de lieu        | 2. Ab – Ba – Cd – Dc – Ee |
| C. Hydronyme    | c. Etude des noms de personnes   | 3. Ac – Bb – Ce – Dc – Ed |
| D. Anthroponyme | d. Etude descriptive des sons    | 4. Ad – Ba – Ce – Dc – Eb |
| E. Toponymie    | e. Etude des noms de cours d'eau | 5. Aa – Bb – Ce – Dc – Eb |

F. Dans la phrase « Congo a un avenir sombre » l'adjectif sombre a pour antonyme :

1. Nouveau 2. Définitif 3. Radieux 4. Indulgent 5. Sablonneux

### EXERCICE 329

**Mettez le verbe principal à l'imparfait et les verbes soulignés au temps qui convient selon la concordance appliquée dans la langue écrite et soignée**

- 1) Je veux qu'il m'avertisse ;
- 2) Nous ne croyons pas que cela puisse arriver ;
- 3) Il entre sans qu'on s'en aperçoive
- 4) Cette chèvre ne cesse de bêler jusqu'à ce qu'elle mette bas

- 5) La modestie de ce savant n'empêche pas qu'il se sente son mérite
- 6) Il est généreux quoiqu'il soit économe
- 7) Bien qu'on l'ait averti du danger, il veut tenter l'escalade

(Concours 2019-2020/ Français)

### EXERCICE 330

**Insérer chacun des mots suivants dans la phrase qui lui convient : chair—cher-  
chère-chaire**

- 1) Même si je ne me trompe à la couleur du mets, je dois faire aujourd'hui  
.....ou jamais.
- 2) La ..... est cendre, l'âme est flamme.
- 3) Le vrai bonheur coûte peu : s'il est ..... il n'est pas d'une bonne  
espèce
- 4) Les ..... de professeurs à l'université sont convoitées.

(Concours 2019-2020/ Français)

### EXERCICE 331

Donnez un titre au texte ci-dessous après l'avoir lu et relu :

A son souper un gloton commande que l'on apprête pour lui un esturgeon. Sans en laisser que la tête, il soupe ; il crève. On y court : on lui donne maints clystères. On lui dit, pour faire court, qu'il mette ordre à ces affaires. Mes amis, dit le goulu, m'y voilà tout de façons qu'on m'apporte tout à l'heure le reste de mon poisson.

Titre :

*Jean de la Fontaine*

(Concours 2019-2020/ Français)

### EXERCICE 332

1. Qu'est-ce que la dissertation ?
2. Illustrez votre réponse en développant au choix, un des sujets repris ci-dessous :
  - a. Peut-on parler de sociétés en avance et de sociétés en retard

b. Les politiciens africains sont d'une générosité gamine, ils dépensent plus que les industriels américains

c. L'homme est-il par nature un animal politique ?

d. La vérité mathématique peut-elle servir de modèle à toute vérité ?

(Concours 2015-2016 /Français)

### EXERCICE 333

Ah ! Cruel Est-il temps de me le déclarer ?

Qu'avez-vous fait ? Hélas je me suis crue aimée.

Au plaisir de VOUS voir mon âme accoutumée

Ne vit plus pour VOUS. Ignorez-vous vos lois,

Quand je vous l'avouai pour la première fois ?

A quel excès d'amour m'avez-vous amenée !

Que ne nie disiez- vous Princesse infortunée,

Où vas-tu t'engager. Et quel est ton espoir ?

Ne donne point un cœur qu'on ne peut recevoir »

Ne l'avez-vous reçu. Crue que pour le rendre,

Quand de vos seules mains ce cœur voudrait dépendre ?

Tout l'Empire a vingt fois conspiré contre nous.

Il était temps encore que ne me quittiez-vous ?

Mille raisons alors consolait ma misère

Je pouvais de ma mort accuser votre père,

Le peuple, le sénat, tout l'Empire romain,

Tout l'univers, plutôt qu'une si chère main

Leur haine, dès longtemps contre moi déclarée

M'avait à mon malheur dès longtemps préparée.

Je n'aurais pas, Seigneur, reçu ce coup cruel

Dans le temps que j'espère un bonheur immortel.

Quand votre heureux amour peut tout ce qu'il désire,

Lorsque Rome se tait, quand votre père expire.

Lorsque tout l'univers fléchit à vos genoux.

Enfin quand je n'ai plus à redouter que vous.

#### COMPREHENSION DU TEXTE ET GRAMMAIRE

1. Donnez un titre qui convient à ce texte
2. Quel est le signe de ponctuation le moins utilisé dans ce texte ?
3. Distinguez les phrases simples et les phrases complexes ? Les quelles dominent ?
4. Relever un exemple pour chaque modalité de la phrase que vous reconnaissez dans ce texte et précisez-la

(Concours/Français)

#### EXERCICE 334

Que pensez-vous des assertions reprises ci-après. Traitez un sujet au choix :

« Les politiciens africains sont d'une générosité gamine, ils dépensent plus que les industriels américains »

« Les Noirs ne lisent pas. Si vous voulez cacher quelque chose, mettez-le dans un livre »

« L'affaire de la comédie est de représenter en général, tous les défauts des hommes »

(Concours/Français)

## II. ANGLAIS

---

### EXERCICE 335

Choose the correct answer

1. My sister .....born on the 1<sup>st</sup> of April 1995.

a) *is*    b) *was*    c) *had*    d) *has been*

2. .... you talk to him last week?

a) *do*    b) *does*    c) *did*    d) *have*

3. If I had known, I.....you!

a) *tell*    b) *would tell*    c) *would have told*    d) *told*

4. I am temped, but I feel it mat be inappropriate to.....

a) *do so*    b) *to be doing*    c) *do such*    d) *do this so*

5. I was born on.....1990

a) *the first of December*    b) *the one December*    c) *the first December*    d) *one of December*

(Concours 2023-2024/Anglais)

### EXERCICE 336

Fill each blank with the appropriate possessif pronom from the given list :

***mine, yours, his, hers, its, ours, yours, theirs***

1. This book belongs to my brother-It's.....

2. The phone belongs to me- It's.....

3) The plane belongs to me and my father -It's.....

4) This box belongs to my mother – It's.....

5. Those cookies belong to my sister's friends. Those cookies are.....

(Concours 2023-2024/Anglais)

### EXERCICE 337

Where is the preposition

1. Despite his young age, he did a very good job. **The preposition is :.....**
2. A boy came running toward me. **The preposition is :.....**
3. I baked a cake for your birthday. **The preposition is :.....**
4. The paper is on my desk. **The preposition is: .....**
5. I come from Brazil. **The preposition is : .....**

(Concours 2023-2024/Anglais)

### EXERCICE 338

Complete the sentences with the following prepositions:

**After | around | before | between | by | during | for | since | until | within | from | ago**

1. Don't eat.....meals.
2. I will be there ..... your birthday.
3. She's always up.....dawn.
4. They went on a trip a few days.....
5. The museum is open.....9.30am to 6.00pm.

(Concours 2023-2024/Anglais)

### EXERCICE 339

Choose between **who, whose, which, where** :

1. This is Paul, .....brother went to school with me.
2. The girl.....is in my car is my girlfriend.
3. Give me the pen..... is on the table.
4. Tupelo is the place.....Elvis Presley was born
5. Kevin is the guy.....lent me his car

(Concours 2023-2024/Anglais)

### EXERCICE 340

Put a circle around the correct answer

1. Jane is playing .....a. car b. cards c. yard
2. Albert is in the library. He's.....a. cooking b. dancing c. reading
3. Miss Jackson is drinking .....a. Dining room b. cafeteria c. coffee
4. Walter is eating.....a. restaurant b. coffee c. breakfast
5. The monkey is in the.....a. bank b. Post office c. zoo

(Concours 2022-2023/Anglais)

### EXERCICE 341

Fill each blank with the appropriate verb from the given list to complete each sentence below:

Advice – avoid – encourage – permit – try – allow – discourage – forbid – tend – want.

1. Young people..... to be more concerned about clothes than older people.
2. Schools sometimes don't.....male students to wear earrings
3. Schools sometimes..... students to wear jeans to class
4. Parents often.....their daughters from wearing makeup and jewelry

(Concours 2022-2023/Anglais)

### EXERCICE 342

Choose what word doesn't belong

1. a. cloudy b. short c. raining d. cool
2. a. breakfast b. newspaper c. lunch d. dinner
3. a. guitar b. baseball c. park d. lake
4. a. evening b. before c. weekend d. week

(Concours 2022-2023/Anglais)

### EXERCICE 343

Put a circle around the correct answer

1. The children are noisy. They're.....a. reading b. singing c. sleeping
2. My mother's mother is my..... a. aunt b. sister c. grandmother
3. Betty is sitting on the..... a. sofa b. TV c. apartment
4. Rita is swimming at the..... a. beach b. beach c. bed
5. Peter is doing his..... a. sink b. room c. homework

(Concours 2022-2023/Anglais)

### EXERCICE 344

Choose what word doesn't belong

1. a. East b. North c. Coast d. South
2. a. biology b. player c. analysis d. anatomy
3. a. tea b. birds c. champagne d. coffee
4. a. daughter b. mother c. Neighbor d. son
5. a. Living room b. bedroom c. kitchen d. Classroom

(Concours 2022-2023/Anglais)

### EXERCICE 345

Complete the sentences to have the past perfect tense

1. George was upset. By the time he got to the train, it.....already.....(**to leave**)
2. I had dinner with some Mexican friends last night. I enjoyed myself because I..... (**to speak**) Spanish in a long time.
3. By the time Anita got to church, the wedding.....already (**to start**)
4. Peter didn't give blood last January because he..... blood the month before (**to give**)
5. I ate a piece of chocolate cake last night and felt terrible about it. I..... a rich dessert since started my diet (**to eat**)

(Concours 2022-2023/Anglais)

### EXERCICE 346

Fill each blank with the appropriate verb from the given list to complete each sentence below:

Advice – avoid – encourage – permit – try – allow – discourage – forbid – tend – want.

1. Some companies ..... employees to wear casual clothes to work on Fridays.
2. People sometimes..... to shock others with their clothes
3. Experts..... people against wearing loud colors to job interviews.
4. On an airplane you should.....wearing clothes that are too tight.

(Concours 2022-2023/Anglais)

### EXERCICE 347

Unscramble the sentences

1. piano how since we've young to the know play very were we  
.....
2. since Paul been they and college Sara engaged have finished  
.....
3. last had Helen a night headache has since  
.....
4. he little the since played a boy he's viola was  
.....
5. history I've in I Greek interested since Athens been visited  
.....

(Concours 2022-2023/Anglais)

### EXERCICE 348

Fill in the blanks with the appropriate word selected from the given list : every – hot – reads – songs – speaks – teacher – plays – sad – ugly – play – can

Bob doesn't like sports. He can't ..... Tennis or golf, but he..... ski. When he isn't busy, he usually ..... the newspaper or ..... chess. He..... Play

very well. Sally and Bod both love music. Sally sings popular..... and ..... they..... the piano. Bob can't play the piano, but he..... Sing and he can..... The violin.

(Concours 2022-2023/Anglais)

### EXERCICE 349

Choose: **reopened- attended – destroyed-installed-grades-bonus**

1. The telephone was .....in my new apartment this afternoon.
2. Our anniversary party was .....by all of our friends.
3. Jennifer is very smart. She gets good.....in all her subjects.
4. The compagny couldn't increase my salary this year, but they gave me a very nice .....
5. The shoe factory downtown was.....by the fire.

(Concours 2019-2020/Anglais)

### EXERCICE 350

Choose **what word doesn't belong**

1. a. upset b. nervous c. tired d. crowded
2. a. brother b. plumber c. teacher d. dentist
3. a. movies b. candy c. ice cream d. popcorn
4. a. end b. finish c. close d. start
5. a. windy b. cold c. cloudy d. dark

(Concours 2019-2020/Anglais)

### EXERCICE 351

Compete the sentences with the past continuous tense.

1. Max and his brother .....already.....to the beach **(to go)**
2. Diane.....her piano lesson yet **(to take)**
3. I.....to my parents yet **(to write)**
4. My wife and I.....already .....dinner **(to eat)**
5. You ..... your electric bill yet **(to pay)**

(Concours 2019-2020/Anglais)

(Concours 2020-2021/Anglais)

## EXERCICE 352

**Fill each blank with the appropriate word selected from the given list : them-her-their-my-it-its-myself-ours-ourselves-our-themselves**

1. Charlie tried to fix..... car by .....
2. Mark and Nancy's mechanic charged.....a lot and still didn't fix.....car.
3. Betty can't find anybody to help.....fix.....car.
4. I'm having trouble with.....car, too, .....starts in the morning, but the windows are broken. The windows don't go up and down. I tried to fix.....by ....., but I couldn't

(Concours 2019-2020/Anglais)

(Concours 2020-2021/Anglais)

## EXERCICE 353

Fill in the blanks with the appropriate word selected from the given list :

Every-Plays-speak-speaks-teacher-is-sad-ugly-themselves-theirs

Sally Nelson.....an actress. She's young and pretty, but when she acts, she can look young or old, beautiful or ..... , Happy or ..... Her husband, Bob ..... an English ..... He teaches students from cities around the world. His students speak Spanish, French, Russian and Arabic. Bob sometimes ..... Spanish and French with them, but he can't .....Russian or Arabic. Sally is a good athlete. She ..... tennis and golf well. When it's cold she skis, and when it's .....she swims.....day.

(Concours 2019-2020/Anglais)

(Concours 2020-2021/Anglais)

(Concours 2022-2023/Anglais)

## EXERCICE 354

Choose what word doesn't belong

1. a. Grandmother b. Boyfriend c. Girlfriend d. Daughter
2. a. Sweater b. Necktie c. Belt d. Doll
3. a. East b. North c. Coast d. South
4. a. Morning b. Night c. Weekend d. Afternoon

5. a. Biology b. prayer c. analysis d. anatomy

(Concours 2020-2021/Anglais)

### EXERCICE 355

#### What's the word?

1. She spilled the..... a. Juice b. Children c. Dog
2. I lost my..... a. Park b. Accident c. Purse
3. He poked himself in the..... a. Gray hair b. Eye c. Glasses
4. They tripped and..... a. Dropped b. Fell c. Shaved
5. I was slicing a..... a. Flat tire b. Cut c. Banana

(Concours 2020-2021/Anglais)

### EXERCICE 356

Match each word from the list A with the corresponding word or phrase from the list B which has the same meaning

#### List A : word

1. demolish
2. eliminate
3. precision
4. search
5. remote
6. leak
7. smash
8. emit
9. collapse
10. hurl

#### List B : same meaning

- a. Throw violently
- b. Shift
- c. fall down
- d. tear down
- e. Quit
- f. Send out
- g. Break
- h. Far away
- i. escape accidentally
- j. seek
- k. Get rid of
- l. accuracy

(Concours/Anglais)

### EXERCICE 357

Match each word from the list C with the corresponding word or phrase from the list D which has the opposite meaning

#### List C : word

1. disconnect
2. light
3. onset
4. huge
5. hot
6. sharp
7. bend
8. stare
9. hard
10. strength

#### List D : opposite

- a. look away
- b. end
- c. dull
- d. cold
- e. easy
- f. weakness
- g. tiny
- h. tear down
- i. link
- j. break
- k. heavy
- l. straighten

(Concours/Anglais)

### EXERCICE 358

Fill each the appropriate word selected from given list:

On-under-his-down-from-in-into-over-distracted-away-at-around-her

1. Looking.....the microscope she saw the two cells separate and move slowly..... From each other.
2. Errors in the use of computers often occur because humans grow tired and can be.....
3. Charles took two books.....the self, he put one of them.....the table and the other one.....his briefcase.
4. Please sit.....
5. Peter kissed.....girlfriend and put his arm.....neck

(Concours/Anglais)

### EXERCICE 359

Translate into French

1. How old are you?
2. Tired
3. Against
4. The tire
5. Wise
6. Wide
7. Again
8. To travel
9. The library
10. The bookstore

(Concours/Anglais)

### EXERCICE 360

Choose what word doesn't belong

1. a. river b. ocean c. park d. lake
2. a. evening b. before c. weekend d. week
3. a. movies b. candy c. ice cream d. popcorn
4. a. end b. finish c. close d. start
5. a. resume b. invitation c. interview d. script

(Concours 2019-2020/Anglais)

### EXERCICE 361

Choose: bonus – success – economy – grades – received – increase

1. We hope our landlord doesn't .....out rent.
2. Have you.....today's mail yet?
3. Jennifer is very smart. She gets good ..... in all her subjects

4. The company couldn't increase my salary this year, but they give me a very nice.....

5. Arthur hopes his new Broadway play is a big.....

(Concours 2019-2020/Anglais)

### EXERCICE 362

Match each word from the list A with the corresponding word or phrase from the list B which has the same meaning

List A : word	List B : same meaning
1. emit	a. Far away
2. collapse	b. timid
3. eliminate	c. seek
4. search	d. tear down
5. demolish	e. throw violently
6. remote	f. send out
7. hurl	g. clean
8. shy	h. quit
9. neat	i. drift
10. precision	j. fall down
	k. get rid of
	l. accuracy

### EXERCICE 363

Match each word from the list C with the corresponding word or phrase from the list D which has the opposite meaning

List C : word	List D : opposite meaning
1. stare	a. tear down
2. hard	b. far away
3. light	c. dull

4. huge	d. big
5. near	e. soft
6. small	f. weakness
7. strength	g. tiny
8. sharp	h. heavy
9. bend	i. end
10. onset	j. break
	k. look away
	l. straighten

**(Concours /Anglais)**

**EXERCICE 364**

Translate into French

1. To burn
2. To waste
3. Forbidden
4. The library
5. Tired
6. Wide
7. Again
8. Against
9. The tire
10. To weight

(Concours/Anglais)

*Les érudits*

### EXERCICE 365

Fill each blank with the appropriate word selected from the given list:

On-under-his-down-from-in-into-over-at-around-her-out-up-throw-not-of-more-they

1. Dorothy could ..... Believe it : she shook ..... head..... disbelief and said just get..... Here! I do.....want to see you.....
2. Paul was glad to meet ..... girlfriend again: they kissed. He put ..... arm ..... waist and ..... both laughed happily
3. Lisa took two books.....the self : she put one of them ..... The table and the other one.....briefcase

(Concours/Anglais)

### EXERCICE 366

Write each verb in the past tense

1. He (stand) .....up and (run).....away
2. He (eat).....bread and (drink).....coffee
3. He (shake) .....his head in disbelief and (say).....nothing
4. He (throw) ..... up his arms and (talk).....very fast
5. He (go).....in through the backdoor
6. He (sing)..... Like a professional

(Concours/Anglais)

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- **KAYEMBE J.B.** et Cie, Maitriser les Maths 3, Editions Loyola, Kinshasa 2004.
- **BABETTY L.** et Cie, Maitriser les Maths 4, Editions Loyola, Kinshasa 2004
- **BABETTY L.** et Cie, Maitriser les Maths 5, Editions Loyola, Kinshasa 2001
- **BOPI LI MBOTIA Richard**, Introduction à la physique, Editions Feu Torrent, Kinshasa 2015
- **ZUKA MANIANIA Baudoin**, Notes du cours de Physique générale II, UNIKIN, 2020.
- **Aimé DIUMI DIKOLO**, cours et exercices pour le concours d'admission en médecine, Wissen corporation, Edition 2021.
- [www.Wikipedia.org](http://www.Wikipedia.org)
- [www.mathematiquesFaciles.com](http://www.mathematiquesFaciles.com)
- [www.wikiHow.com](http://www.wikiHow.com)
- [www.Lyc\\_valdedurance.ac\\_aix\\_marseille.com](http://www.Lyc_valdedurance.ac_aix_marseille.com)
- [www.studyLibFr.com](http://www.studyLibFr.com)
- [www.wissen-corp.com](http://www.wissen-corp.com)



**Aimé DIUMI DIKOLO** Fondateur  
et Coordonateur du groupe les  
Erudits et alliés.

Assistant à la faculté des Sciences et  
Technologies

 +243 810834616

Il y a une vie pendant la fac et une vie après la fac. Ne  
gâchez jamais la vie après la fac à cause de la vie  
pendant la fac.

Un jour tout ceci deviendra un souvenir, tant que cela  
depend de vous, faites en sorte que ça soit un bon  
souvenir.

**Erudits et Alliés**