Aimé DIUMI DIKOLO

Cours et exercices pour la préparation du

CONCOURS D'ADMISSION

EN MATH. STAT ET INFO

Groupe Les Erudits

6e Edition/ Octobre 2024

Aimé DIUMI DIKOLO

Cours et exercices pour la préparation du

CONCOURS D'ADMISSION EN MATH-STAT.-INFO

Format FULL

Groupe Les Erudits

Wissen corporation

6e édition/Octobre 2024

DEDICACE

A :

Maman Daudine DIONYO

André KONGA DIKOLO

Julie APAMI DIKOLO

Chadrack SHAKO DIKOLO

Pauline TSHULU DIKOLO

Joël YOMBOLA DIKOLO

Thérèse OTAKOTSHA DIKOLO

Jérémie OMELONGA DIKOLO

Moïse ALOMBA DIKOLO

Albertine MBOHELAKA DIKOLO

Mardochée MUKANGA DIKOLO

Junior OMELONGA ALOMBA

Joseph OSONGO OMELONGA

Bony WOLAWATO

REMERCIEMENTS

Sincères remerciements à

Tous les Erudits et alliés

Hermans IMBALEVA

Kevin MAYOMBO

Jonas KATEMBO KATEMBO

Issa BIKWELO KANZA

Marcus KABEYA MBIYE

Andy BINAKI KUETUENDA

Cephée MBAYA MUTOMBO

Moïse ILUNGA KAMUANGU

Adéo KWEKWE MABRUKI

Lauclass EKUMU NYANGANZE

Jossy ILANGA BOWAKA

Emmanuel DALO DONDO

Esther MBIYA MUADI

Jemima MATAYI SELESI

John HESHIMA BARAHA

Russell MPENEMOKE KANKU

Aaron MABELE DONGO

Jérémie OMELONGA DIKOLO

Moïse ALOMBA DIKOLO

AVANT PROPOS

Wissen Corporation

C'est une startup qui propose des solutions informatiques ainsi que des formations de qualité et approfondies en Informatique. Wissen corporation a changé de statut depuis le 26 Juillet 2023.

Nous agissons dans les domaines du développement informatique (création des sites et applications web, logiciels et applications mobiles), l'infographie (conception des banderoles, affiches, panneaux publicitaires, badges, …) et d'audit informatique. Nous sommes disposés à vous proposer des solutions informatiques selon vos besoins.

Nos formations sont organisées par session ou par demande. Elles peuvent être publiques et privées. Nos formations portent sur plusieurs domaines de l'informatique, notamment l'informatique de base (prise en main de l'ordinateur, installation des systèmes d'exploitation, partitionnement des disques, les astuces essentielles en informatique, etc.), la bureautique (Word, Excel, PowerPoint, etc.), programmation (web, mobile et desktop), infographie, base de données, etc. Nous sommes bien disposés à partager notre connaissance et savoir-faire avec vous.

Il y a une naissance en toute connaissance, Thucydide a dit : « Avoir des connaissances sans les partager, c'est se mettre au niveau de celui qui n'a pas d'idées ». **Wissen Corporation** est là pour assurer votre formation, votre encadrement suivant vos désirs.

INTRODUCTION

Le concours d'admission en L1 LMD Mathématiques, Statistique et Informatique de la faculté des Sciences et Technologies de l'université de Kinshasa concerne tout candidat quel que soit le pourcentage obtenu aux Examens d'Etat.

Le concours comprend huit cours : Analyse, Algèbre, géométrie, trigonométrie et calcul, français, Anglais, Physique – Mécanique et Physique Electricité. Il se déroule pendant deux jours, généralement samedi et dimanche.

Parfois, en arrivant pour la première fois à l'université, certains sont désorientés surtout quand ils tombent dans les mains des faibles ou des gens animés d'une mauvaise foi qui leur font croire qu'il faut des suivis et/ou recommandations pour réussir au concours.

Je serais un grand menteur si je vous disais qu'en MSI[1] (Mathématiques, Statistique et Informatique), il n'y a pas de recommandations, mais ce qui est vrai est que tout celui qui prépare sérieusement son concours réussit sans recommandation ni suivi.

C'est dans le but de vous aider à réussir au concours que j'ai rédigé ce livre. Vous y trouverez le résumé des matières concernées par le concours, 366 exercices résolus (ces exercices sont des questions des concours des années antérieures) ainsi que 180 exercices d'auto-évaluation pour votre entraînement et perfectionnement. Ne bloquez pas les résolutions mais comprenez la matière. Et surtout est ***strictement interdit d'utiliser ce livre pendant le concours***.

L'œuvre humaine n'est jamais parfaite, je compte sur vos remarques, critiques et suggestions pour améliorer les versions futures.

Bonne lecture.

Aimé DIUMI DIKOLO

+243 81 083 46 16

aimediumi2@gmail.com

www.wissen-corp.com

[1] Le département de Mathématiques et Informatique (Math-Info) s'appelle maintenant Mathématiques, Statistique et Informatique (MSI)

PREMIÈRE PARTIE : MATHS ANALYSE ET ALGÈBRE

I. LES EQUATIONS ET INEQUATIONS

I.1 Equation du premier degré à une inconnue

Une équation du premier degré a la forme $ax + b = 0$. Elle est appelée du premier degré parce que le degré supérieur de l'inconnue x est 1.

Exemple et contre-exemple :

$2x - 6 = 0$ *et* $2x + 3 = 2x - 4$ *sont des équations du premier degré*

$2x^2 - 6x + 7 = 0$ *n'est pas une équation du premier degré*

Marche à suive pour résoudre une équation du premier degré

Pour résoudre une équation du premier degré, on procède de la manière suivante :

- On fait disparaitre les dénominateurs et les parenthèses, puis on effectue les calculs indiqués.
- On transpose dans le premier membre les termes qui renferment l'inconnue et dans l'autre les termes connus (termes indépendants).
- On réduit les termes semblables et on met l'inconnue en facteur.
- On divise les deux termes par le coefficient de l'inconnue ; on trouve ainsi la solution cherchée.

Exemple

Résoudre les équations

1) $\frac{4x}{2} + 3 = 3x + \frac{2}{3}$

$\frac{4x}{2} + 3 = 3x + \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{4x+6}{2} = \frac{9x+2}{3}$

$\Leftrightarrow 2(9x + 2) = 3(4x + 6)$

$\Leftrightarrow 18x + 4 = 12x + 18$

$\Leftrightarrow 18x - 12x = 18 - 4$

$\Leftrightarrow 6x = 14$

$\Leftrightarrow x = {}^{14}/_{6}$

$\Leftrightarrow x = {}^{7}/_{3}$

$S = \{{}^{7}/_{3}\}$

2) $6(x+5) = 25 + 3x$

$$6(x+5) = 25 + 3x \Leftrightarrow \quad 6x + 30 = 25 + 3x$$
$$\Leftrightarrow 6x - 3x = 25 - 30$$
$$\Leftrightarrow 3x = -5$$
$$\Leftrightarrow x = {}^{-5}/_{3}$$
$$S = \left\{{}^{-5}/_{3}\right\}$$

3) $\frac{3x+3}{2} = \frac{x-2}{3} \Leftrightarrow 3(3x+3) = 2(x-2)$

$$\Leftrightarrow 9x + 9 = 2x - 4$$

$$\Leftrightarrow 9x - 2x = -4 - 9$$

$$\Leftrightarrow 7x = -13$$

$$\Leftrightarrow x = {}^{-13}/_{7}$$

$S = \{{}^{-13}/_{7}\}$

I.2 Equation réductible au premier degré

I.2.1 Equation produit $A.B.C = 0$

Soient A, B, C… les facteurs du premier degré, si nous développons le produit $A.B.C$ ... cela nous conduira à un cas supérieur à 1.

Pour éviter cela, nous pouvons recourir à la propriété suivante :

$A.B.C \ldots = 0 \quad \Leftrightarrow (A = 0)\ ou\ (B = 0)\ ou\ (C = 0)$

Exemples

1)$(3x+5)(2x-2)(4x+8) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 5 = 0 \quad ou\ 2x - 2 = 0 \quad ou\ 4x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow 3x = -5 \qquad ou\ 2x = 2 \qquad ou\ 4x = -8$

$\Leftrightarrow x = {}^{-5}/_{3} \qquad ou\ x = {}^{2}/_{2} \qquad ou\ x = {}^{-8}/_{4}$

$\Leftrightarrow x = {}^{-5}/_{3} \qquad ou\ x = 1 \qquad ou\ x = -2$

$S = \left\{-2\,;\ {}^{-5}/_{3}\ ;\ 1\right\}$

2) $(4x-8)(12x+48) = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 8 = 0 \quad ou\ 12x + 48 = 0$

$\Leftrightarrow 4x = 8 \quad ou\ 12x = -48$

$\Leftrightarrow x = {}^{8}/_{4} \quad ou\ x = {}^{-48}/_{12}$

$\Leftrightarrow x = 2 \quad ou\ x = -4$

$S = \{-4\,; 2\,\}$

3) $(x-2)(3x-12) = 0$

$(x-2)(3x-12) = 0 \Leftrightarrow \quad x - 2 = 0 \quad ou\ 3x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \quad ou\ 3x = 12$

$\Leftrightarrow x = 2 \quad ou\ x = {}^{12}/_{3}$

$\Leftrightarrow x = 2 \quad ou\ x = 4$

$S = \{2; 4\}$

I.2.2 Equations fractionnaires

Ce sont des équations dont un dénominateur au moins contient une inconnue.

Résolution :

- On pose la condition préalable sur les dénominateurs
- On résout l'équation.
- On retient les valeurs de l'inconnue qui vérifient la condition préalable posée.

Exemple

Résoudre l'équation :

$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x-5} = 0$

Conditions préalables : $x + 2 \neq 0 \quad et\ x - 5 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq \ -2 \quad et\ x \neq 5$

Cela signifie que parmi les solutions, on ne peut pas retenir 2 et 5. Si on les trouve parmi les solutions, on doit les rejeter.

$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x-5} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)+x+2}{(x+2)(x-5)} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x-15+x+2}{(x+2)(x-5)} = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 15 + x + 2 = (x+2)(x-5)0$

$\Leftrightarrow (3+1)x + (-15+2) = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 13 = 0$

$\Leftrightarrow 4x = 13$

$\Leftrightarrow x = {}^{13}/_{4}$

$S = \{{}^{13}/_{4}\}$

2) $\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-1} = 0$

Conditions préalables : $x + 2 \neq 0 \quad et\ x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -2 \quad et\ x \neq 1$

Cela signifie que la solution doit être différent de -2 et 1.

Résolvons maintenant l'équation :

$\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-1)+3(x+2)}{(x+2)(x-1)} = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-1) + 3(x+2) = 0.(x+2)(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x - 2 + 3x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 3x = 2 - 6$

$\Leftrightarrow 5x = -4$

$\Leftrightarrow x = {}^{-4}/_{5}$

$S = \left\{{}^{-4}/_{5}\right\}$

I.2.3 Equations contenant des valeurs absolues

Dans ce cas, nous allons appliquer la définition de la valeur absolue :

$$|a| = \begin{cases} a \ \ si\ a \geq 0 \\ -a\ si\ a\ \leq 0 \end{cases}$$

Exemples

Résoudre les équations suivantes

1) $|3x - 6| - 2 = 1$

2) $|2x + 3| - |x - 2| = 2$

3) $|2x - 1| + |3x - 2| + |x - 1| = 2$

Solution

$1)|3x-6|-2=1$

$$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6 & si\ 3x-6 \geq 0 \\ -(3x-6) & si\ 3x-6 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x-6 & si\ 3x \geq 6 \\ -3x+6 & si\ 3x \leq 6 \end{cases} = \begin{cases} 3x-6 & si\ x \geq {}^{6}/_{3} \\ 6-3x \leq {}^{6}/_{3} \end{cases}$$

$$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6 & si\ x \geq 2 \\ 6-3x & si\ x \leq 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$\|3x-6\|$	$6-3x$		$3x-6$
$\|3x-6\|-2=1$	$6-3x-2=1$		$3x-6-2=1$

$Dans\ ]-\infty\,;2]$

$6-3x-2=1$

$\Leftrightarrow -3x = 1-6+2$

$\Leftrightarrow -3x = -3$

$\Leftrightarrow 3x = 3$

$\Leftrightarrow x = {}^{3}/_{3}$

$\Leftrightarrow x = 1$

$Dans\ [2\,;\ +\infty[$

$3x-6-2=1$

$\Leftrightarrow 3x = 1+6+2$

$\Leftrightarrow 3x = 9$

$\Leftrightarrow x = {}^{9}/_{3}$

$\Leftrightarrow x = 3$

$S = \{1\,;\ 3\}$

2) $|\,2x+3| - |\,x-2| = 2$

- $$|\,2x+3\,| = \begin{cases} 2x+3 & si\ 2x+3 \geq 0 \\ -(2x+3) & si\ 2x+3 \leq 0 \end{cases}$$

$$|2x+3| = \begin{cases} 2x+3 & si\ x \geq {}^{-3}/_{2} \\ -2x-3 & si\ x \leq {}^{-3}/_{2} \end{cases}$$

- $$|\,x-2\,| = \begin{cases} x-2 & si\ x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & si\ x-2 \leq 0 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & si\ x \geq 2 \\ 2-x & si\ x \leq 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	${}^{-3}/_{2}$	2	$+\infty$
$\|\,2x+3\,\|$	$-2x-3$		$2x+3$	
$\|\,x-2\,\|$		$2-x$		$x-2$
$\|\,2x+3\| - \|\,x-2\| = 2$	$-2x-3-(2-x)=2$	$2x+3-(2-x)=2$		$2x+3-(x-2)=2$

Dans $\left]-\infty, {}^{-3}/_{2}\right]$	Dans $\left[{}^{-3}/_{2}, 2\right]$	Dans $[2, +\infty[$
$-2x-3-(2-x)=2$	$2x+3-(2-x)=2$	$2x+3-(x-2)=2$
$\Leftrightarrow -2x-3-2+x=2$	$\Leftrightarrow 2x+3-2+x=2$	$\Leftrightarrow 2x+3-x+2=2$
$\Leftrightarrow -2x+x=2+3+2$	$\Leftrightarrow 2x+x=2-3+2$	$\Leftrightarrow 2x-x=2-3-2$
$\Leftrightarrow (-2+1)x=7$	$\Leftrightarrow (2+1)x=1$	$\Leftrightarrow (2-1)x=-3$
$\Leftrightarrow -x=7$	$\Leftrightarrow 3x=1$	$\Leftrightarrow x=-3$
$\Leftrightarrow x=-7$	$\Leftrightarrow x={}^{1}/_{3}$	
$S_1=\{-7\}$	$S_2=\{{}^{1}/_{3}\}$	$S_3=\{-3\}$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$S = \{-7;\ -3\ ;\ {}^{1}/_{3}\}$

3) $|2x-1|+|3x-2|+|x-1|=2$

$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & si\ 2x-1 \geq 0 \\ 1-2x & si\ 2x-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & si\ x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x & si\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & si\ 3x-2 \geq 0 \\ 2-3x & si\ 3x-2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow |3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & si\ x \geq \frac{2}{3} \\ 2-3x & si\ x \leq \frac{2}{3} \end{cases}$

$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si\ x-1 \geq 0 \\ 1-x & si\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow |x-1| = \begin{cases} x-1 & si\ x \geq 1 \\ 1-x & si\ x \leq 1 \end{cases}$

x	$-\infty$ ... ${}^{1}/_{2}$	${}^{1}/_{2}$ ... ${}^{2}/_{3}$	${}^{2}/_{3}$ ... 1	1 ... $+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$	$1-2x$	$2x-1$	$2x-1$	$2x-1$
$\lvert 3x-2\rvert$	$2-3x$	$2-3x$	$3x-2$	$3x-2$
$\lvert x-1\rvert$	$1-x$	$1-x$	$1-x$	$x-1$
$\lvert 2x-1\rvert+\lvert 3x-2\rvert+\lvert x-1\rvert=2$	E_1	E_2	E_3	E_4

Pour $x \in \left]-\infty\,; \frac{1}{2}\right]$ $E_1 \equiv 1-2x+2-3x+1-x=2 \Leftrightarrow (-2-3-1)=2-1-2-1$

$\Leftrightarrow -6x=-2$

$\Leftrightarrow 6x=2$

$\Leftrightarrow x={}^{2}/_{6}$

$$\Leftrightarrow x = {}^{1}/_{3}$$

$$S_1 = \{{}^{1}/_{3}\}$$

Pour $x \in \left[\frac{1}{2}\,;\frac{2}{3}\right]$ $E_2 \equiv 2x - 1 + 2 - 3x + 1 - x = 2 \;\Leftrightarrow 2x - 3x - x = 2 + 1 - 2 - 1$

$$\Leftrightarrow -2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{0}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$S_2 = \{0\}$$

Pour $x \in \left[\frac{2}{3}\;;1\right] : E_3 \equiv 2x - 1 + 3x - 2 + 1 - x = 2 \;\Leftrightarrow 2x + 3x - x = 2 + 1 + 2 - 1$

$$\Leftrightarrow 4x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = {}^{4}/_{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$S_3 = \{1\}$$

Pour $x \in [1;\, +\infty[\, : E_4 \equiv 2x - 1 + 3x - 2 + x - 1 = 2 \;\Leftrightarrow 2x + 3x + x = 2 + 1 + 2 + 1$

$$\Leftrightarrow 6x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = {}^{6}/_{6}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$S_4 = \{1\}$$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \{{}^{1}/_{3}\} \cup \{0\} \cup \{1\} \cup \{1\}$

$S = \{0;\, {}^{1}/_{3}\;; 1\}$

EXERCICE 1

Pour quelles valeurs de x, l'équation $|2x - 5| = |3x + 2|$ est satisfaite ?

$a)\ x = \frac{13}{5}$ $\quad b)\ x \in \left[\frac{13}{5}\,, +\infty\right[$ $\quad c) x \in \left\{\frac{13}{5}\,, \frac{5}{13}\right\}$ $\quad d)\ x \in \left]\frac{13}{5}, +\infty\right[$ $\quad e) ABR$

(Concours 2023-2024/Analyse)

Résolution

$|2x - 5| = |3x + 2|$

$$|2x-5| = \begin{cases} 2x-5 & si\ 2x-5 \geq 0 \\ -(2x-5) & si\ 2x-5 \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x-5 & si\ 2x \geq 5 \\ -2x+5 & si\ 2x \leq 5 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x-5 & si\ x \geq {}^{5}/_{2} \\ 5-2x & si\ x \leq {}^{5}/_{2} \end{cases}$$

$$|2x-5| = \begin{cases} 2x-5 & si\ x \geq {}^{5}/_{2} \\ 5-2x & si\ x \leq {}^{5}/_{2} \end{cases}$$

$$|3x+2| = \begin{cases} 3x+2 & si\ 3x+2 \geq 0 \\ -(3x+2) & si\ 3x+2 \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x+2 & si\ 3x \geq -2 \\ -3x-2 & si\ 3x \leq -2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x+2 & si\ x \geq {}^{-2}/_{3} \\ -3x-2 & si\ x \leq {}^{-2}/_{3} \end{cases}$$

$$|3x+2| = \begin{cases} 3x+2 & si\ x \geq {}^{-2}/_{3} \\ -3x-2 & si\ x \leq {}^{-2}/_{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$ $\qquad$ ${}^{-2}/_{3}$	${}^{5}/_{2}$	$+\infty$
$\lvert 2x-5\rvert$	$5-2x$	$5-2x$	$2x-5$
$\lvert 3x+2\rvert$	$-3x-2$	$3x+2$	$3x+2$
$\lvert 2x-5\rvert = \lvert 3x+2\rvert$	$5-2x=-3x-2$	$5-2x=3x+2$	$2x-5=3x+2$

Dans $\left]-\infty\,;\,{}^{-2}/_{3}\right]$: $5-2x=-3x-2 \Leftrightarrow -2x+3x=-2-5$

$$\Leftrightarrow x=-7$$

$$S_1=\{-7\}$$

Dans $\left[{}^{-2}/_{3}\,;\,{}^{5}/_{2}\right]$: $5-2x=3x+2 \Leftrightarrow -2x-3x=2-5$

$$\Leftrightarrow -5x=-3$$

$$\Leftrightarrow 5x=3$$

$$\Leftrightarrow x={}^{3}/_{5}$$

$$S_2=\left\{{}^{3}/_{5}\right\}$$

Dans $\left[{}^{5}/_{2}\,;\,+\infty\right[$: $2x-5=3x+2 \Leftrightarrow 2x-3x=2+5$

$$\Leftrightarrow -x=7$$

$$\Leftrightarrow x=-7$$

$$S_3=\{-7\}$$

$R)\ e$

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(3x+2)(2x-5)=0$.

$a)\ x=\frac{3}{2}\ et\ 1 \qquad b)\ \frac{-2}{3}\ \ et\ \frac{5}{2}\ \ c)-2\ et\ 5 \qquad d)\ \ 3\ \ et\ \ 2 \quad e)-0{,}6666\ldots et\ 2{,}5$

(Concours 2017-2018/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Analyse)

(Concours 2022-2023/Analyse)

Résolution

$(3x+2)(2x-5)=0$

$\Leftrightarrow 3x+2=0\ \ ou\ 2x-5=0$

$\Leftrightarrow 3x=-2\ \ \ ou\ \ \ 2x=5$

$\Leftrightarrow x={}^{-2}/_{3}\ \ \ ou\ x={}^{5}/_{2}$

$\Leftrightarrow x=-0{,}6666\ldots..ou\ x=2{,}5$

$S=\left\{{}^{-2}/_{3};{}^{5}/_{2}\right\}\qquad ou\ S=\{-0{,}6666\ldots;2;5\}$

R) [2] b et e

I.3 Inéquations du premier degré à une inconnue

I.3.1 Cas général

Formes générales :

$ax+b\geq 0;\quad ax+b\leq O;\ \ ax+b>0;\ \ ax+b<0$

Pour résoudre cette inéquation, il convient de

- Ramener l'inéquation sous forme d'une équation pour trouver la racine

$ax+b=0\quad \Leftrightarrow x={}^{-b}/_{a}$

- Faire l'étude de signe

x	$-\infty$	$^{-b}/_{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$Signe\ contraire\ de\ a$	0	$Signe\ de\ a$

[2] Dans les consignes, il a été demandé de choisir la (les) bonne(s) réponses, c'est-à-dire qu'une question peut avoir plusieurs bonnes réponses. C'est pourquoi nous avons choisi b et e

- Trouver l'ensemble solution qui confère à l'inéquation le signe exigé

Quand c'est$\geq 0\ ou > 0$, on prend la partie positive et quand c'est $\leq 0\ ou\ < 0$, on prend la partie négative.

Exemple

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $4x + 3 \geq\ 6x - 3$ 2) $3x + 6 < 0$

Solution

1) $4x + 3 - 6x + 3 \geq\ 0$

$-2x + 6 \geq 0$. Dans notre cas $a = -2$

Ramenons l'inéquation sous forme d'équation et résolvons cette dernière

$-2x + 6 =\ 0$

$\Leftrightarrow -2x = -6$

$\Leftrightarrow 2x = 6$

$\Leftrightarrow x = {}^{6}/_{2}$

$\Leftrightarrow x = 3$

L'étude de signe donne

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-2x+6$		$+$	0	$-$	

$S =\ ]-\infty, 3]$

2) $3x + 6 < 0$

Dans notre cas, $a = 3$

Ramenons l'inéquation sous forme d'équation et résolvons cette dernière

$3x + 6 = 0\ \Leftrightarrow 3x = -6$

$\Leftrightarrow x = {}^{-6}/_{3}$

$\Leftrightarrow x = -2$

L'étude de signe donne

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$3x+6$		$-$	0	$+$	

$S =]-\infty\,;\,-2[$

I.3.2 Inéquations contenant des valeurs absolues

Dans ce cas, on peut utiliser la définition de la valeur absolue ou les deux propriétés suivantes relatives à la valeur absolue :

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \qquad (a \geq 0)$

$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $|4x - 16| \geq 2$ 2) $|2x + 3| \leq 5$

3) $\frac{7x-3}{3-|x+2|} \geq -2$ 4) $\frac{|x-3|}{x-|2x+2|} \leq -\frac{1}{2}$

Solution

1) $|4x - 16| \geq 2$

$\Leftrightarrow 4x - 16 \leq -2 \quad ou \quad 4x - 16 \geq 2$

$4x - 16 \leq -2$

$4x - 16 + 2 \leq 0$

$4x - 14 \leq 0$

$4x - 14 = 0$

$4x = 14$

$x = {}^{14}/_{4}$

$x = {}^{7}/_{2}$

x	$-\infty$	${}^{7}/_{2}$	$+\infty$
$4x-14$	$-$	0	$+$

$S_1 =]-\infty\,;\,{}^{7}/_{2}]$

$4x - 16 \geq 2$

$4x - 16 - 2 \geq 0$

$4x - 18 \geq 0$

$4x - 18 = 0$

$4x = 18$

$x = {}^{18}/_{4}$

$x = {}^{9}/_{2}$

x	$-\infty$	${}^{9}/_{2}$	$+\infty$
$4x-14$	$-$	0	$+$

$S_2 = [{}^{9}/_{2}\,;\,+\infty[$

$S = S_1 \cup S_2$

$S =]-\infty\,; {}^{7}/_{2}] \cup [{}^{9}/_{2}\,;+\infty[$

2) $|2x+3| \leq 5$

$|2x+3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x+3 \leq 5$

$\Leftrightarrow -5-3 \leq 2x \leq 5-3$

$\Leftrightarrow \frac{-8}{2} \leq x \leq \frac{2}{2}$

$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1$

$S = [-4, 1]$

3) $\frac{7x-3}{3-|x+2|} \geq -2$

$|x+2| = \begin{cases} x+2 & si\ x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & si\ x+2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x+2| = \begin{cases} x+2 & si\ x \geq -2 \\ -x-2 & si\ x \leq -2 \end{cases}$

Pour $x \in [-2\,;+\infty[$: $\frac{7x-3}{3-|x+2|} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{7x-3}{3-(x+2)} \geq -2$

$\Leftrightarrow \frac{7x-3}{3-x-2} \geq -2$

$\Leftrightarrow \frac{7x-3}{-x+1} \geq -2$

$\Leftrightarrow \frac{7x-3}{-x+1} + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{7x-3+2(-x+1)}{-x+1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{7x-3-2x+2}{-x+1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{5x-1}{-x+1} \geq 0$

$5x-1=0 \Leftrightarrow 5x=1 \Leftrightarrow x = {}^{1}/_{5}$ $\qquad -x+1=0 \Leftrightarrow -x=-1 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		${}^{1}/_{5}$		1		$+\infty$
$5x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{5x-1}{-x+1}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

$S_1 = [-2\,;+\infty[\ \cap \left[{}^{1}/_{5}\,;1\right[= \left[{}^{1}/_{5}\,;1\right[$

Pour $x \in]-\infty\,;-2]$: $\frac{7x-3}{3-|x+2|} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{7x-3}{3-(-x-2)} \geq -2$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-3}{3+x+2} + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-3}{x+5} + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-3+2(x+5)}{x+5} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-3+2x+10}{x+5} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x+7}{x+5} \geq 0$$

$9x + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow 9x = -7 \ \Leftrightarrow x = {}^{-7}/_{9}$ $\qquad x + 5 = 0 \ \Leftrightarrow x = -5$

x	$-\infty$		-5		$-7/9$		$+\infty$
$9x+7$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{9x+7}{x+5}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$S_2 =]-\infty\,; -2] \cap \left( ]-\infty;\ -5[\ \cup \left[{}^{-7}/_{9};\ +\infty\right[\right) =]-\infty\,;\ -5[$

$S = S_1 \ \cup S_2 = \left[{}^{1}/_{5}\,; 1\right[\cup\,]-\infty\,;\ -5[$

$S =]-\infty\,;\ -5[\ \cup \left[{}^{1}/_{5}\ ; 1\right[$

4) $\frac{|x-3|}{x-|2x+2|} \leq -\frac{1}{2}$

$|x-3| = \begin{cases} x-3 & si\ x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & si\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x-3| = \begin{cases} x-3 & si\ x \geq 3 \\ 3-x & si\ x \leq 3 \end{cases}$

$|2x+2| = \begin{cases} 2x+2 & si\ 2x+2 \geq 0 \\ -2x-2 & si\ 2x+2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |2x+2| = \begin{cases} 2x+2 & si\ x \geq -1 \\ -2x-2 & si\ x \leq -1 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$\|x-3\|$		$3-x$		$3-x$		$x-3$	
$\|2x+2\|$		$-2x-2$		$2x+2$		$2x+2$	
$\frac{\|x-3\|}{x-\|2x+2\|} \leq -\frac{1}{2}$		$\frac{3-x}{x-(-2x-2)} \leq -\frac{1}{2}$		$\frac{3-x}{x-(2x+2)} \leq -\frac{1}{2}$		$\frac{x-3}{x-(2x+2)} \leq -\frac{1}{2}$	

Pour $x\ \in\ ]-\infty\,;\ -1]$: $\frac{|x-3|}{x-|2x+2|} \leq -\frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ \frac{3-x}{x-(-2x-2)} \leq -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x}{x+2x+2} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x}{3x+2} + \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(3-x)+3x+2}{2(3x+2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-2x+3x+2}{6x+4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+8}{6x+4} \leq 0$$

$x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -8$ $\qquad$ $6x + 4 = 0 \Leftrightarrow 6x = -4 \Leftrightarrow x = {}^{-4}/_{6} \Leftrightarrow x = {}^{-2}/_{3}$

x	$-\infty$		-8		${}^{-2}/_{3}$		$+\infty$
$x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$6x+4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+8}{6x+4}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$S_1 =]-\infty\,; -1] \cap [-8; {}^{-2}/_{3}[= [-8\,; -1]$

Pour $x \in [-1\,;3]$: $\frac{3-x}{x-(2x+2)} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-2x-2} + \frac{1}{2} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x}{-x-2} + \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(3-x)-x-2}{2(-x-2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-2x-x-2}{-2x-4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x+4}{-2x-4} \leq 0$$

$-3x + 4 = 0 \Leftrightarrow -3x = -4 \Leftrightarrow x = {}^{4}/_{3}$ $\qquad$ $-2x - 4 = 0 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$

x	$-\infty$		-2		${}^{4}/_{3}$		$+\infty$
$-3x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$-2x-4$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{-3x+4}{-2x-4}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$S_2 = [-1\,;3] \cap]-2\,; {}^{4}/_{3}] = [-1; {}^{4}/_{3}]$

Pour $x \in [3; +\infty[$: $\frac{x-3}{x-(2x+2)} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2x-2} + \frac{1}{2} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{-x-2} + \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-3)-x-2}{2(-x-2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-6-x-2}{-2x-4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-8}{-2x-4} \leq 0$$

$x - 8 = 0 \ \Leftrightarrow x = 8 \qquad -2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \ -2x = 4 \ \Leftrightarrow x = -2$

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x-4$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{x-8}{-2x-4}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

$S_3 = [3;\ +\infty[\ \cap\ (\,]-\infty;\ -2[\ \cup\ [8\,;+\infty[\,) = [8\,;+\infty[$

$S = [-8\,;\ -1]\ \cup\ \left[-1;\ {}^{4}/_{3}\right]\ \cup\ [8\,;+\infty[$

$S = \left[-8\,;\ {}^{4}/_{3}\right]\ \cup\ [8\,;+\infty[$

I.4 Inéquations réductibles au premier degré

I.4.1 Inéquations quotients $\frac{A}{B} \lesssim 0$

Etudier les zéros et les signes du quotient et écrire l'ensemble des solutions en se référant au signe de l'inéquation.

Exemple :

Résoudre dans ℝ l'inéquation $\frac{4x-3}{x+1} \leq 3$

Solution :

$$\frac{4x-3}{x+1} - 3 \leq 0$$

$$\frac{4x - 3 - 3(x+1)}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{4x - 3 - 3x - 3}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{x-6}{x+1} \leq 0$$

$Soit\ f(x) = \frac{x-6}{x+1}$

$$x - 6 = 0 \ \Leftrightarrow x = 6$$

$$x + 1 = 0 \ \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1		6			$+\infty$
$x-6$	-		-	0	+	+	
$x+1$	-	0	+	+	+		
$\frac{x-6}{x+1}$	+	||	-	0	+		

$S =]-1,\ 6]$

I.4.2 Inéquations produits $A.B \lesseqgtr 0$

Etudier les zéros et les signes du produit et écrire l'ensemble des solutions en se référant au signe de l'inéquation.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation les équations suivantes

1) $(2x-3)(1-3x) < 0$ 2) $\frac{(2x-4)(2x+1)}{(4x-16)} \geq 0$

Résolution

1)$(2x-3)(1-3x)$

$2x-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = {}^{3}/_{2}$

$1-3x=0 \Leftrightarrow x = {}^{1}/_{3}$

x	$-\infty$	${}^{1}/_{3}$		${}^{3}/_{2}$	$+\infty$
$2x-3$	-	-	-	0	+
$1-3x$	+	0	-		-
$(2x-3)(1-3x)$	-	0	+	0	-

$S = \left]-\infty,\ {}^{1}/_{3}\right[\ \cup \ \left]{}^{3}/_{2},\ +\infty\right[$

2) $\frac{(2x-4)(2x+1)}{(4x-16)} \geq 0$

$2x-4=0$	$2x+1=0$	$4x-16=0$
$\Leftrightarrow 2x=4$	$\Leftrightarrow 2x=-1$	$\Leftrightarrow 4x=16$
$\Leftrightarrow x = {}^{4}/_{2}$	$\Leftrightarrow x = {}^{-1}/_{2}$	$\Leftrightarrow x = {}^{16}/_{4}$
$\Leftrightarrow x = 2$		$\Leftrightarrow x = 4$

x	$-\infty$		$-1/2$		2		4		$+\infty$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(2x-4)(2x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$4x-16$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{(2x-4)(2x+1)}{(4x-16)}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$S = [^{-1}/_2\ ; 2] \cup\ ]4\ ; +\infty[$

I.5 Equation du second degré dans $\mathbb{R}$

Forme générale : $ax^2 + bx + c = 0$

Elle est appelée équation du second degré parce que le degré supérieur de la variable x est 2.

A noter que **a** représente le coefficient de x^2, $c'est$ à dire a est le nombre qui est devant x^2 $qu'il\ soit\ au\ milieu$, au début ou à la fin. Et **b** représente le coefficient de x (la valeur numérique qui est devant x) et c est le terme indépendant.

On calcule le discriminant ou réalisant

$\Delta = b^2 - 4ac$

Trois cas sont possible pour Δ

- Si $\Delta > 0$, alors on a deux racines réelles :

  $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

- Si $\Delta = 0$, alors on a une racine double donnée par $x = {}^{-b}/_{2a}$
- Si $\Delta < 0$, dans ce cas, il n'y a pas de racines réelles. $S = \emptyset$

Exemple :

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

1) $x^2 - 7x + 12 = 0$ 2) $x^2 - 2x + 1 = 0$ 3) $-x^2 - 2x - 9 = 0$

Solution

1)$x^2 - 7x + 12 = 0$

$a = 1 \quad b = -7 \quad c = 12$

$\Delta = b^2 - 4\,ac$

$= (-7)^2 - 4(1)(12)$

$= 49 - 48$

$\Delta = 1$

$$x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{1}}{2(1)}$$

$$= \frac{7-1}{2}$$

$$= \frac{6}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{1}}{2(1)}$$

$$= \frac{7+1}{2}$$

$$= \frac{8}{2}$$

$$x_2 = 4$$

$S = \{3; 4\}$

2) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4(1)(1)$

$= 4 - 4$

$\Delta = 0$

$x = \frac{-(-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$S = \{1\}$

3) $-x^2 - 2x - 9 = 0$

$a = -1 \quad b = -2 \quad c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4(-1)(-9)$

$= 4 - 36$

$\Delta = -32$

Pas de racines réelles

$S = \emptyset$

EXERCICE 3

On désigne par S_1 *et* S_2 *les racines de l'équation* du second degré

$s^2 - 11s + 30 = 0$. Les quantités $q = (s_1)^2 - (s_2)^2$ et p= $(s_1)^2 + (s_2)^2$ sont données respectivement par :

$a)\ -11$ *et* 41 $\quad b)\ 49$ *et* 39 $\quad c)\ 25$ *et* 36 $\quad d)\ -22$ *et* 36 $d)$ *Pas de bonne réponse.*

(Concours 2012-2013/ Algèbre)

(Concours 2022-2023/ Algèbre)

Résolution

Il faut d'abord résoudre l'équation pour trouver s_1 *et* s_2

$s^2 - 11s + 30 = 0$

$a = 1 \qquad b = -11 \qquad c = 30$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-11)^2 - 4 \times 1 \times 30$

$\Delta = 1$

$$\begin{cases} s_1 = \frac{11-\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{11-1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ s_2 = \frac{11+\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6 \end{cases}$$

s_1 *est* la plus petite racine

$q = (s_1)^2 - (s_2)^2 = (5)^2 - (6)^2 = -11$

$p = (s_1)^2 + (s_2)^2 = (5)^2 + (6)^2 = 36 + 25 = 61$

R) e

EXERCICE 4

On désigne par x_1 *et* x_2 *les racines de l'équation* du second degré $x^2 + 5x + 10 = 0$. Les quantités $q = (x_1)^2 + (x_2)^2$ et p=$(x_1)^3 + (x_2)^3$ sont données par :

$a)\ 0$ *et* -1 $\quad b. -11$ *et* 17 $\quad c. 5$ *et* 25 $\quad d.$ *pas de bonne réponse.*

(Concours 2014-2015/ Algèbre)

Résolution

Il faut d'abord résoudre l'équation pour trouver x_1 *et* x_2

$x^2 + 5x + 10 = 0$

$a = 1 \quad b = 5 \quad c = 10$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 5^2 - 4 \times 1 \times 10$

$= 25 - 40$

$\Delta = -15 < 0$

Pas de racines réelles. Donc x_1 *et* x_2 *n'existent pas* et donc pas moyen de calculer les quantités p et q.

R) d

EXERCICE 5

On désigne par x_1 *et* x_2 *les* racines de l'équation du second degré $x^2 - 2x + 3 = 0$.

La quantité $\frac{1}{(x_1)^2} + \frac{1}{(x_2)^2}$ est donnée par :

a) $\frac{10}{9}$ b) $\frac{-10}{9}$ c) $\frac{9}{10}$ d) $\frac{-9}{10}$ e) ABR

(Concours 2017-2018/ Algèbre)

Résolution

Résolvons d'abord l'équation pour trouver x_1 *et* x_2

$x^2 - 2x + 3 = 0$

$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3$

$= 4 - 12$

$\Delta = -8$

Pas de racines réelles. Donc x_1 *et* x_2 *n'existent pas* et donc pas moyen de calculer la quantité demandée.

R) e

EXERCICE 6

On considère l'équation du second degré $2x^2 + 4x + 9 = 0$. Et on note x_1 *et* x_2 les racines de cette équation. Les quantités $S = x_1 + x_2$ et $L = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ sont données par :

$a)\ \ -2\ et\ \ \frac{4}{9}$ $\quad b)\ 2\ et\ \ -\frac{4}{9}$ $\quad c) -\ 2\ et -\frac{4}{9}$ $\quad d)\ 2\ et\ \frac{4}{9}$ $\quad e)$*Pas de bonne réponse*

(Concours 2018-2019/Algèbre)

Résolution

$$2x^2 + 4x + 9 = 0$$

$a = 2 \qquad b = 4 \qquad c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 9$

$= 16 - 72$

$\Delta = -56$

Pas de racines réelles, donc x_1 *et* x_2 n'existent pas dans $\mathbb{R}$, pas moyen de calculer S et L

R) e

EXERCICE 7

On désigne par x_1 *et* x_2 les racines de l'équation du second degré $x^2 + x + 6 = 0$. Les quantités $q = (x_1)^2 + (x_2)^2$ et p= $(x_1)^3 + (x_2)^3$ sont données respectivement par :

$a)\ 0\ et\ \ -1 \quad b)\ -11\ et\ 17 \quad c)\ 10\ et\ \ -10 \quad d)$ *Pas de bonne réponse*

(Concours 2011-2012/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Algèbre)

Résolution

$$x^2 + x + 6 = 0$$

$a = 1 \qquad b = 1 \qquad c = 6$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 6$

$= 1 - 24$

$\Delta = -23$

Pas de racines réelles, c'est-à-dire x_1 et x_2 n'existent pas dans $\mathbb{R}$. Donc pas moyen de calculer q et p.

$\boldsymbol{R) \ d}$

EXERCICE 8

On désigne par X et Y les racines de l'équation $x^2 + 3x + 6 = 0$. Les quantités $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$ et $X^2 + Y^2$ valent respectivement :

$a)\ 12\ et\ 45$ $\quad b)\ 100\ et\ 49$ $\quad c)\ 81\ et\ 500$ $\quad d)\ \frac{-1}{2}\ et -3$

(Concours 2013-2014/Algèbre)

Résolution

$x^2 + 3x + 6 = 0$

$a = 1 \qquad b = 3 \qquad c = 6$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 6$

$= 9 - 24$

$\Delta = -15$

Pas de racines réelles, pas moyen de calculer les quantités demandées

$\boldsymbol{R) \ e}$

I.6 Inéquation du second degré

Formes générales

$ax^2 + bx + c$ ≥0, $ax^2 + bx + c$ ≤0, $ax^2 + bx + c$ et $ax^2 + bx + c$ <0

Procédure de la résolution

- Ramener l'inéquation sous forme d'une équation pour trouver les racines associées : $ax^2 + bx + c = 0$
- Faire l'étude de signe

Etant donné que Δ *est un réel*, il peut être soit nul, soit positif ou négatif.

Premier cas : Si $\Delta > 0$ (Positif)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		*Signe de a*	0	*Signe contraire de a*	0	*Signe de a*	

Deuxième cas : Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		*Signe de a*	0	*signe de a*	

Troisième cas : Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		*signe de a*	

- Trouver l'ensemble solution qui confère à l'inéquation le signe exigé

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ 2) $-\ x^2 - 6x - 9 \geq 0$ 3) $x^2 - 2x + 9 \geq 0$

Résolution

1)$x^2 - 5x + 6 \geq 0$

On ramène ça sous forme d'équation pour trouver les racines associées

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6$

$\Delta = b - 4ac$

$= (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$

$= 25 - 24$

$\Delta = 1$

$x_1 = \frac{5+\sqrt{1}}{2\times1} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ $\qquad$ $x_2 = \frac{5+\sqrt{1}}{2\times1} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty\,; 2] \cup [3\,; +\infty[$

2) $-\ x^2 - 6x - 9 \geq 0$

$a = -1$ $\qquad$ $b = -6$ $\qquad$ $c = -9$

Ramenons ça sous forme d'équation pour trouver les racines associées

$-x^2 - 6x - 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-6)^2 - 4(-1)(-9)$

$= 36 - 36$

$\Delta = 0$

$x = \frac{-(-6)}{2(-1)} = \frac{6}{-2} = -3$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$-x^2 - 6x - 9$		$-$	0	$-$	

$S = \{0\}$

3) $x^2 - 2x + 9 \geq 0$

$a = 1$ $\qquad$ $b = -2$ $\qquad$ $c = 9$

Ramenons ça sous forme d'équation pour trouver les racines associées

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4(1)(9)$

$= 4 - 36$

$\Delta = -32$

Pas de racines réelles

x	$-\infty$			$+\infty$
x^2-2x+9	$+$	$+$	$+$	

$S =]-\infty\,;\ +\infty[$

EXERCICE 9

L'inéquation $8x^2+10x-3>0$ $a\ pour\ solution$:

a) $\left]-\infty; \frac{3}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$ $b)$ $\left]-\infty; \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ $c)$ $\left]\frac{-3}{4}; \frac{1}{4}\right[$ $d)\ ABR$

(Concours 2017-2018/ Algèbre)

Résolution

$8x^2+10x-3>0$

$a=8$ $\quad b=10$ $\quad c=-3$

Ramenons ça sous forme d'équation pour trouver les racines associées

$8x^2+10x-3=0$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = 10^2-4\times 8\times(-3)$

$= 100+96$

$\Delta = 196$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-10-\sqrt{196}}{16} = \frac{-10-14}{16} = \frac{-24}{16} = \frac{-3}{2} \\ x_2 = \frac{-10+\sqrt{196}}{16} = \frac{-10+14}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$^{-3}/_{2}$		$^{1}/_{4}$		$+\infty$
$8x^2+10x-3$	$+$	0	-	0	$+$	

$S = \left]-\infty; \frac{-3}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$

R) d

I.7 Equations irrationnelles simples

Une équation irrationnelle simple est celle qui renferme l'inconnue sous un ou plusieurs radicaux d'indice deux.

Résolution :

- On élimine les signes radicaux par une ou plusieurs élévations au carré de deux membres de l'équation.
- On résout l'équation rationnelle obtenue.
- On rejette les solutions étrangères par l'une de deux méthodes suivantes :
  - Soit on porte dans l'équation donnée les valeurs trouvées et on élimine celles qui ne vérifient pas
  - Soit on pose les conditions que doit remplir l'inconnue à chaque étape transformation

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\sqrt{5x-25} - \sqrt{x+1} = 0$ 2) $\sqrt{x} + 6 = x$

Résolution

1) $\sqrt{5x-25} - \sqrt{x+1} = 0$

Si nous élevons directement au carré, après transformation on aura encore le signe radical, dans ce cas, pour éviter beaucoup de transformation, isolons chaque radical et élevons les deux membres au carré.

$$\left(\sqrt{5x-25}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 5x - 25 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow 5x - 25 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5-1)x = 1 + 25$$

$$\Leftrightarrow 4x = 26$$

$$\Leftrightarrow x = {}^{26}/_{4}$$

$$\Leftrightarrow x = {}^{13}/_{2}$$

Remplaçons la valeur ainsi trouvée dans l'équation pour voir si ça vérifie :

$$\sqrt{5x-25} - \sqrt{x+1} = 0$$

$$\sqrt{5\left(\frac{13}{2}\right)-25}-\sqrt{\frac{13}{2}+1}=0$$

$$\sqrt{\frac{65}{2}-25}-\sqrt{\frac{13+2}{2}}=0$$

$$\sqrt{\frac{65-50}{2}}-\sqrt{\frac{15}{2}}=0$$

$$\sqrt{\frac{15}{2}}-\sqrt{\frac{15}{2}}=0$$

$0=0 \qquad Vrai$

Donc $S=\{{}^{13}/_{2}\}$

2) $\sqrt{x}+6=x$

$C.P.: \ x \geq 0$

$\sqrt{x}+6=x \iff \sqrt{x}=x-6$

Elevons les deux membres au carré

$(\sqrt{x})^2=(x-6)^2$

$x=x^2-2\,(x)(6)+6^2 \qquad car\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$x=x^2-12x+36$

$x-x^2+12x-36=0$

$-x^2+13x-36=0$

$a=-1 \qquad b=13 \qquad c=-36$

$\Delta=b^2-4ac$

$=(13)^2-4(-1)(-36)$

$=169-144$

$\Delta=25$

$$\begin{cases} x_1=\frac{-13+\sqrt{25}}{2(-1)}=\frac{-13+5}{-2}=\frac{-8}{-2}=4 \\ x_2=\frac{-13-\sqrt{25}}{2(-1)}=\frac{-13-5}{-2}=\frac{-18}{-2}=9 \end{cases}$$

Remplaçons les valeurs trouvées dans l'équation pour voir si elles vérifient

$$\sqrt{x}-6=x$$

Pour $x = 4$	Pour $x = 9$
$\sqrt{4} + 6 = 4$	$\sqrt{9} + 6 = 9$
$2 + 6 = 4$	$3 + 6 = 9$
$8 = 4 \quad Faux$	$9 = 9 \quad Vrai$

Donc $S = \{9\}$

EXERCICE 10

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{4x+9} + \sqrt{3x-8}$

L'équation $f(x) = 0 \;\; a\ pour\ solution$

$a. 0 \qquad b. -3 \qquad c. \; -\frac{6}{7} \qquad d. Pas\ de\ bonne\ réponse$

(Concours 2014-2015/Algèbre)

Résolution

$f(x) = 0$

$\sqrt{2x+1} - \sqrt{4x+9} + \sqrt{3x-8} = 0$

$\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x-8} = \sqrt{4x+9}$

Conditions : $2x + 1 \geq 0\ et\ 4x + 9 \geq 0\ et\ 3x - 8 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2x \geq -1 \;\; et\ 4x \geq -9\ et\ 3x \geq 8$

$\Leftrightarrow x \geq {}^{-1}/_{2} \;\; et\ x \geq {}^{-9}/_{4} \;\; et\ x \geq {}^{8}/_{3}$

$\Leftrightarrow x \in [{}^{-1}/_{2}; +\infty[\;\cap\; [{}^{-9}/_{4}; +\infty[\;\cap\; [{}^{8}/_{3}; +\infty[$

$CP : x \in [{}^{8}/_{3}; +\infty[$

Résolvons maintenant l'équation.

$\sqrt{2x+1} - \sqrt{4x+9} + \sqrt{3x-8} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} + \sqrt{3x-8} = \sqrt{4x+9}$

Elevons les deux membres au carré

$\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x-8}\right)^2 = \left(\sqrt{4x+9}\right)^2$

$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 + 2 \times \sqrt{2x+1}\,\sqrt{3x-8} + \left(\sqrt{3x-8}\right)^2 = 4x+9 \qquad car\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\Leftrightarrow 2x + 1 + 2\sqrt{(2x+1)(3x-8)} + 3x - 8 = 4x + 9$ $\quad$ *Car* $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow 5x - 7 + 2\sqrt{(2x+1)(3x-8)} = 4x + 9$

$\Leftrightarrow 5x - 7 - 4x - 9 + 2\sqrt{(2x+1)(3x-8)} = 0$

$\Leftrightarrow x - 16 + 2\sqrt{(2x+1)(3x-8)} = 0$

Le signe radical persiste encore, élevons l'équation au carré tout en isolant le terme contenant le signe radical :

$\Leftrightarrow (x-16)^2 = \left(2\sqrt{(2x+1)(3x-8)}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 16 + 16^2 = 4(2x+1)(3x-8)$

$\Leftrightarrow x^2 - 32x + 256 = 4(6x^2 - 16x + 3x - 8)$

$\Leftrightarrow x^2 - 32x + 256 = 4(6x^2 - 13x - 8)$

$\Leftrightarrow x^2 - 32x + 256 = 24x^2 - 52x - 32$

$\Leftrightarrow x^2 - 32x + 256 - 24x^2 + 52x + 32 = 0$

$\Leftrightarrow -23x^2 + 20x + 288 = 0$

Maintenant, nous avons une équation du second degré, résolvons ça pour ne retenir que les solutions qui satisferont la condition préalable (C.P.)

$-23x^2 + 20x + 288 = 0$

$a = -23 \qquad b = 20 \qquad c = 288$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (20)^2 - 4 \times (-23) \times 288$

$= 400 + 26\,496$

$\Delta = 26896$

$x_1 = \frac{-20+\sqrt{26896}}{2\times(-23)}$

$x_2 = \frac{-20-\sqrt{26896}}{2\times(-23)}$

$x_1 = \frac{-20+164}{-46} = \frac{144}{-46} = -3{,}1304 \ldots\ldots (\text{à } rejeter)$

$x_2 = \frac{-20-164}{-46} = \frac{-184}{-46} = 4$

$S = \{4\}$

***R*) *d*.**

EXERCICE 11

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-16}{x^2}}$

L'équation $f(x) = 0 \;\; a \; pour \; solutions$:

$a) \; 1 \; et - 1 \quad b) - 4 \; et \; 2 \quad c) - 4 \;\; et \; 4 \;\; d) \; Pas \; de \; bonne \; réponse$

(Concours 2012-2013/Algèbre)

Résolution

$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-16}{x^2}}$

$\sqrt{\frac{x^2-16}{x^2}} = 0$

Trouvons d'abord la condition préalable :

$\frac{x^2-16}{x^2} \geq 0$

$x^2 - 16 = 0 \iff x_1 = -4 \;\; et \; x_2 = 4$

$x^2 = 0 \iff x_1 = x_2 = 0$

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$x^2 - 16$		+	0	-		-	0	+	
x^2		+		+	0	+		+	
$\frac{x^2-16}{x^2}$		+	0	-	||	-	0	+	

$C.P. \; x \in \;]-\infty; \, -4] \, \cup \, [4; \, +\infty[$

Résolvons maintenant l'équation

$\sqrt{\frac{x^2-16}{x^2}} = 0$

Élevons les deux membres au carré :

$\left(\sqrt{\frac{x^2-16}{x^2}}\right)^2 = 0^2$

$\frac{x^2-16}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 16 = x^2.0$

$\Leftrightarrow x^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 16$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16}$

$x = \pm 4$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 12

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{2x+3} - \sqrt{4x+4} + \sqrt{3x-8}$

L'équation $f(x) = 0$ $a\ pour\ solution$

$a. 0$ $\quad b. -3$ $\quad c.\ -\frac{6}{7}$ $\quad d. Pas\ de\ bonne\ réponse$

(Concours 2014-2015/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Algèbre)

Résolution

$f(x) = 0$

$\sqrt{2x+3} - \sqrt{4x+4} + \sqrt{3x-8} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+3} + \sqrt{3x-8} = \sqrt{4x+4}$

Conditions : $2x + 3 \geq 0\ et\ 4x + 4 \geq 0\ et\ 3x - 8 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2x \geq -3\ \ et\ 4x \geq -4\ et\ 3x \geq 8$

$\Leftrightarrow x \geq {}^{-3}/_{2}\ \ et\ x \geq {}^{-4}/_{4}\ \ et\ x \geq {}^{8}/_{3}$

$\Leftrightarrow x \in [{}^{-3}/_{2} ; +\infty[\ \cap\ [-1 ; +\infty[\ \cap\ [{}^{8}/_{3} ; +\infty[$

$CP : x \in [{}^{8}/_{3} ; +\infty[$

Résolvons maintenant l'équation.

Elevons les deux membres au carré

$\left(\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x-8}\right)^2 = \left(\sqrt{4x+4}\right)^2$

$\left(\sqrt{2x+3}\right)^2 + 2 \times \sqrt{2x+3}\ \sqrt{3x-8} + \left(\sqrt{3x-8}\right)^2 = 4x + 4$

$\Leftrightarrow 2x + 3 + 2\sqrt{2x+3}\ \sqrt{3x-8} + 3x - 8 = 4x + 4$

$\Leftrightarrow 5x - 5 + 2\sqrt{2x+3}\ \sqrt{3x-8} = 4x + 4$

$\Leftrightarrow 5x - 5 - 4x - 4 + 2\sqrt{2x+3}\,\sqrt{3x-8} = 0$

$\Leftrightarrow x - 9 + 2\sqrt{2x+3}\,\sqrt{3x-8} = 0$

Le signe radical persiste encore, élevons l'équation au carré tout en isolant le terme contenant le signe radical :

$\Leftrightarrow (x-9)^2 = \left(-2\sqrt{2x+3}\,\sqrt{3x-8}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 9 + 9^2 = 4(2x+3)(3x-8)$

$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 81 = 4(6x^2 - 16x + 9x - 24)$

$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 81 = 4(6x^2 - 7x - 24)$

$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 81 = 24x^2 - 28x - 96$

$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 81 - 24x^2 + 28x + 96 = 0$

$\Leftrightarrow -23x^2 + 10x + 177 = 0$

Maintenant, nous avons une équation du second degré, résolvons ça pour ne retenir que les solutions qui satisferont à la condition préalable (C.P.)

$-23x^2 + 10x + 177 = 0$

$a = -23 \qquad b = 10 \qquad c = 177$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (10)^2 - 4 \times (-23) \times 177$

$= 100 + 16\,284$

$\Delta = 16384$

$x_1 = \frac{-10+\sqrt{16384}}{2\times(-23)} = \frac{-10+128}{-46} = = \frac{118}{-46}$ à $rejeter$

$x_2 = \frac{-10-128}{-46} = \frac{-138}{-46} = 3$

$S = \{3\}$

$\boldsymbol{R)\ d.}$

EXERCICE 13

Soit la fonction $f(x) = -2\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-8} + \sqrt{3+2x}$

L'équation $f(x) = 0$ *a pour solution*

a. 0 b. 2 c. $\frac{6}{7}$ d. 3 e. Pas de bonne réponse

(Concours 2013-2014/Algèbre)

Résolution

$f(x) = 0$

$-2\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-8} + \sqrt{3+2x} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3+2x} + \sqrt{3x-8} = 2\sqrt{x+1}$

Conditions : $3 + 2x \geq 0$ *et* $x + 1 \geq 0$ *et* $3x - 8 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2x \geq -3$ *et* $x \geq -1$ *et* $3x \geq 8$

$\Leftrightarrow x \geq {}^{-3}/_2$ *et* $x \geq -1$ *et* $x \geq {}^{8}/_3$

$\Leftrightarrow x \in [{}^{-3}/_2 ; +\infty[\cap [-1 ; +\infty[\cap [{}^{8}/_3 ; +\infty[$

$CP : x \in [{}^{8}/_3 ; +\infty[$

Résolvons maintenant l'équation.

Elevons les deux membres au carré

$\left(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3x-8}\right)^2 = \left(2\sqrt{x+1}\right)^2$

$\left(\sqrt{3+2x}\right)^2 + 2 \times \sqrt{3+2x}\,\sqrt{3x-8} + \left(\sqrt{3x-8}\right)^2 = 4(x+1)$

$\Leftrightarrow 3 + 2x + 2\sqrt{3+2x}\,\sqrt{3x-8} + 3x - 8 = 4x + 4$

$\Leftrightarrow 5x - 5 + 2\sqrt{3+2x}\,\sqrt{3x-8} = 4x + 4$

$\Leftrightarrow 5x - 5 - 4x - 4 + 2\sqrt{3+2x}\,\sqrt{3x-8} = 0$

$\Leftrightarrow x - 9 + 2\sqrt{3+2x}\,\sqrt{3x-8} = 0$

Le signe radical persiste encore, élevons l'équation au carré tout en isolant le terme contenant le signe radical :

$\Leftrightarrow (x-9)^2 = \left(-2\sqrt{3+2x}\,\sqrt{3x-8}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 9 + 9^2 = 4(3+2x)(3x-8)$

$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 81 = 4(9x - 24 + 6x^2 - 16x)$

$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 81 = 4(6x^2 - 7x - 24)$

$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 81 = 24x^2 - 28x - 96$

$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 81 - 24x^2 + 28x + 96 = 0$

$\Leftrightarrow -23x^2 + 10x + 177 = 0$

Maintenant, nous avons une équation du second degré, résolvons ça pour ne retenir que les solutions qui satisferont à la condition préalable (C.P.)

$-23x^2 + 10x + 177 = 0$

$a = -23 \qquad b = 10 \qquad c = 177$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (10)^2 - 4 \times (-23) \times 177$

$= 100 + 16\,284$

$\Delta = 16384$

$x_1 = \frac{-10+\sqrt{16384}}{2\times(-23)} = \frac{-10+128}{-46} = = \frac{118}{-46} \quad à\ rejeter$

$x_2 = \frac{-10-128}{-46} = \frac{-138}{-46} = 3$

$S = \{3\}$

R) d.

EXERCICE 14

L'équation $\sqrt{-8+3x} - 2\sqrt{1+x} + \sqrt{2x+3} = 0$ a pour solution :

$a) - 3 \;\; b) - 5 \;\; c)\ 5 \;\; d)\ 3 \;\; e)\ pas\ de\ donne\ réponse$

(Concours 2020-2021/Algèbre)

Résolution

Trouvons d'abord la condition préalable :

$CP_1 :\ -8 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq \frac{8}{3} \Rightarrow CP_1 = \left[\frac{8}{3}\ ;\ +\infty\right[$

$CP_2 : 1 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \Rightarrow CP_2 = [-1\ ;\ +\infty[$

$CP_3 : 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -3 \Rightarrow CP_3 = \left[-\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$

$CP = CP_1 \cap CP_2 \ \cap CP_3 = \left[\frac{8}{3}\ ;\ +\infty\right[$

Résolvons maintenant l'équation :

$\sqrt{-8+3x} - 2\sqrt{1+x} + \sqrt{2x+3} = 0$

$\sqrt{-8+3x} + \sqrt{2x+3} = 2\sqrt{1+x}$

$\left(\sqrt{-8+3x} + \sqrt{2x+3}\right)^2 = \left(2\sqrt{1+x}\right)^2$

$\left(\sqrt{-8+3x}\right)^2 + 2\sqrt{-8+3x}\ \sqrt{2x+3} + \left(\sqrt{2x+3}\right)^2 = 4(1+x)$

$-8 + 3x + 2\sqrt{(-8+3x)(2x+3)} + 2x + 3 = 4 + 4x$

$5x - 5 + 2\sqrt{(-8+3x)(2x+3)} = 4 + 4x$

$5x - 5 + 2\sqrt{(-8+3x)(2x+3)} - 4 - 4x = 0$

$x - 9 + 2\sqrt{(-8+3x)(2x+3)} = 0$

$x - 9 = -2\sqrt{(-8+3x)(2x+3)}$

$(x-9)^2 = \left(-2\sqrt{(-8+3x)(2x+3)}\right)^2$

$x^2 - 18x + 81 = 4(-8+3x)(2x+3)$

$x^2 - 18x + 81 = 4(-16x - 24 + 6x^2 + 9x)$

$x^2 - 18x + 81 = 4(-7x - 24 + 6x^2)$

$x^2 - 18x + 81 = -28x - 96 + 24x^2$

$x^2 - 18x + 81 + 28x + 96 - 24x^2 = 0$

$-23x^2 + 10x + 177 = 0$

$a = -23 \qquad b = 10 \qquad c = 177$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (10)^2 - 4 \times (-23) \times 177$

$= 100 - 16\,284$

$\Delta = 16384$

$x_1 = \frac{-10+\sqrt{16384}}{2\times(-23)} = \frac{-10+128}{-46} = = \frac{118}{-46} \qquad \text{à}\ rejeter$

$x_2 = \frac{-10-128}{-46} = \frac{-138}{-46} = 3$

$S = \{3\}$

$\boldsymbol{R}$) $\boldsymbol{d}$

I.8 Système de deux équations du premier degré a deux inconnues

Forme générale :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Il existe généralement quatre méthodes pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

Pour illustrer ces quatre méthodes, prenons l'exemple suivant :

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

I.8.1 Méthode de substitution

$$\begin{cases} x + y = 6 & (1) \\ x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

Tirer la valeur de l'une des inconnues (x ou y) dans l'une de deux équations.

Dans notre cas, tirons x dans la deuxième équation, on aura :

$$x = 2 + y \qquad (3)$$

Remplacer la valeur de l'inconnue tirée dans l'autre équation. Dans notre cas, remplaçons $x = 2 + y \;\; dans\ (1)$.

On a : $2 + y + y = 6$

$$\Leftrightarrow 2 + 2y = 6$$

$$\Leftrightarrow 2y = 6 - 2$$

$$\Leftrightarrow 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow y = {}^{4}/_{2}$$

$$y = 2 \qquad (4)$$

Remplacer la valeur trouvée dans (4) dans (3)

$$x = 2 + 2$$

$$x = 4$$

$$S = (4, 2)$$

I.8.2 Méthode de comparaison

$$\begin{cases} x + y = 6 & (1) \\ x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

Tirer une de deux inconnues dans les deux équations. Dans notre cas, tirons x dans les deux équations :

$De\ (1) : x = 6 - y \quad (3)$

$De\ (2) : x = 2 + y \quad (4)$

Ensuite, comparer ou égaler (3) et (4) car les deux représentent la valeur de la même variable (x dans notre cas) :

$(4) = (3)$

$2 + y = 6 - y$

$\Leftrightarrow y + y = 6 - 2$

$\Leftrightarrow 2y = 4$

$\Leftrightarrow y = {}^{4}/_{2}$

$\Leftrightarrow y = 2 \quad (5)$

Remplacer la valeur trouvée dans (3) ou (4) pour trouver la valeur de l'autre inconnue

$(5)\ \ dans\ (3)$

$x = 6 - 2$

$x = 4$

$S = (4, 2)$

I.8.3 Méthode d'addition

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

On choisit l'inconnue à éliminer, dans notre cas, éliminons x

Ensuite, on permute les coefficients de l'inconnue à éliminer : le coefficient de la première équation sera le multiplicateur de la deuxième équation et vice-versa.

Dans notre cas, les coefficients de x dans les deux équations sont tous 1 :

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

Si les deux coefficients sont de même signe, les multiplicateurs doivent être de signes contraires et s'ils sont des signes contraires, les multiplicateurs doivent être de même signe.

Dans notre cas, les deux coefficients sont de même signe, donc les multiplicateurs doivent être de signes contraires : on est libre d'attribuer le signe moins ou plus à n'importe quel multiplicateur :

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \left|\begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array}\right.$$

Tous les termes de la première équation seront multipliés par 1 et ceux de la deuxième équation par -1 :

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \left|\begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} x + y = 6 \\ -x + y = -2 \end{array}$$

On additionne membre à membre les deux équations obtenues :

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \left|\begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} \cancel{x} + y = 6 \\ -\cancel{x} + y = -2 \end{array}$$

$$x - x + y + y = 6 - 2$$

$0x + 2y = 4$

$\Leftrightarrow 2y = 4$

$\Leftrightarrow y = {}^{4}/_{2}$

$y = 2$ (3)

Remplacer la valeur trouvée dans l'une des équations :

(3) dans (1)

$x + 2 = 6$

$x = 6 - 2$

$x = 4$

$S = (4, 2)$

Remarque

En utilisant l'une de trois méthodes, on peut tomber sur le cas suivant :

$0x = 0 \quad ou\ 0y = 0$: Le système est indéterminé

$0x = b \quad ou\ 0y = b \quad avec\ b\ un\ réel\ non\ nul$: Le système est impossible

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases}$

Solution

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 & (1) \\ 4x + 6y = 8 & (2) \end{cases}$

Utilisons la méthode de substitution :

$De\ (1)$, tirons y : $3y = 4 - 2x \Leftrightarrow y = \frac{4-2x}{3} \quad (3)$

$(3)\ dans\ (2) \Rightarrow 4x + 6\left(\frac{4-2x}{3}\right) = 8 \Leftrightarrow 4x + 2(4 - 2x) = 8$

$\Leftrightarrow 4x + 8 - 4x = 8$

$\Leftrightarrow 4x - 4x = 8 - 8$

$\Leftrightarrow 0x = 0$

Le système est indéterminé

2) $\begin{cases} x - 2y = 5 & (1) \\ 3x - 6y = 3 & (2) \end{cases}$

Utilisons la méthode de substitution :

De (1), tirons x : $x = 5 + 2y \ (3)$

$(3)\ dans\ (2) \Rightarrow 3(5 + 2y) - 6y = 3 \Leftrightarrow 15 + 6y - 6y = 3$

$\Leftrightarrow 6y - 6y = 3 - 15$

$\Leftrightarrow 0y = -12$

Le système est impossible

I.8.4 Méthode de Cramer

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Comme nous avons un système de deux équations à deux inconnues, on doit calculer trois déterminants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a \times b' - a' \times b$$

Le déterminant ci haut appelé déterminant principal qui est formé par les coefficients de deux inconnus. La première colonne représente les coefficients de la première inconnue et la deuxième ceux de la deuxième inconnue.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = c \times b' - c' \times b$$

Le déterminant de x est obtenu en remplaçant la colonne de x par les termes indépendants.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = a \times c' - a' \times c$$

De même, le déterminant de y est obtenu en remplaçant la colonne de y par les termes indépendants.

Trois cas sont possibles :

Si $\Delta \neq 0$, *le système est dit de cramer* et admet une solution unique donnée par (x, y)

Avec $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ et $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$

Si $\Delta = 0$ *et* $\Delta x \neq 0$ *et* $\Delta y \neq 0$: le système est impossible

Si $\Delta = 0$ *et* $\Delta x = 0$ *ou* $\Delta y = 0$: le système est indéterminé

Résolvons notre exemple :

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 1 \times 1$$

$$\Delta = -2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \times (-1) - 2 \times 1$$

$$\Delta x = -8$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times 6$$

$$\Delta y = -4$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$S = (4, 2)$$

EXERCICE 15

Le système d'équations linéaires à deux inconnues $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -10x - 15y = -20 \end{cases}$ a pour solution :

$a)\ (8\,;0)$ $b)\ (2\,;\,-2)$ $c)\ (8\,;\,-\infty)$ $d)$*le système est impossible* $e)$*Pas de bonne réponse*

(Concours 2018-2019/ Algèbre)

Résolution

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -10x - 15y = -20 \end{cases}$$

Utilisons la méthode d'Addition :

$$\begin{array}{ll} 2x + 3y = 2 & | \times 5 \\ -10x - 15y = -20 & | \times 1 \end{array}$$

$$10x + 15y = 10$$

$$-10x - 15y = -20$$

$$0x + 0y = -10$$

R) d

EXERCICE 16

Le système $\begin{cases} 4x - 5y = -9 \\ x + y = 9 \end{cases}$ a pour solution (a, b). Les quantités a-b et ab valent respectivement :

$a)\ 5\ et\ 12$ $b)\ -1\ et\ 20$ $c)\ 10\ et\ 100$ $d)\ 2\ et\ 18$

(Concours 2013-2014/Algèbre)

Résolution

$$\begin{cases} 4x - 5y = -9 & (1) \\ x + y = 9 & (2) \end{cases}$$

Utilisons la méthode de substitution

$De\ (2)\ tirons\ x$:

$x = 9 - y\ (3)$

(3) dans (1)

$4(9 - y) - 5y = -9$

$\Leftrightarrow 36 - 4y - 5y = -9$

$-9y = -9 - 36$

$-9y = -45$

$-y = {}^{-45}/_{9}$

$y = 5 \quad (4)$

(4) dans (3)

$x = 9 - 5$

$x = 4$

$(a\ ;\ b)\ = (4\ ;\ 5)$

$a - b = 4 - 5 = -1$

$ab = 4 \times 5 = 20$

R) b

EXERCICE 17

Le système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = -4 \end{cases}$ a pour solution le couple :

$a)\ (-5; 2) \quad b)(-5;\ -2) \quad c)\ (5;\ -2) \quad d)\ (5; 2) \quad e)pas\ de\ bonne\ réponse$

(Concours 2020-2021/Algèbre)

Résolution

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 & (1) \\ -4x + 6y = -4 & (2) \end{cases}$$

Utilisons la méthode de substitution

De (1), tirons $x : 2x = 1 + 3y$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+3y}{2} \quad (3)$$

$(3)\ dans\ (2) : -4\left(\frac{1+3y}{2}\right) + 6y = -4$

$$\Leftrightarrow -2(1 + 3y) + 6y = -4$$

$$\Leftrightarrow -2 - 6y + 6y = -4$$

$$\Leftrightarrow 0y = -4 + 2$$

$$\Leftrightarrow 0\,y = -2$$

Le système est impossible : $S = \emptyset$

R) e

EXERCICE 18

Le système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 9x - 3y = -3 \end{cases}$ a pour solution le couple :

$a)\ (-9\,;2)$ $b)\ (-9\,;\ -2)$ $c)\ (5\,;\ -7)$ $d)\ (5\,;7)$ $e)\ pas\ de\ bonne\ réponse$

(Concours 2021-2022/Algèbre)

Résolution

$$\begin{cases} -3x + y = 2 & (1) \\ 9x - 3y = -3 & (2) \end{cases}$$

De (1), tirons $y : y = 2 + 3x \quad (3)$

$(3)\ dans\ (2) \Rightarrow 9x - 3(2 + 3x) = -3$

$$\Leftrightarrow 9x - 6 - 9x = -3$$

$$\Leftrightarrow 0x = -3 + 6$$

$$\Leftrightarrow 0x = 3$$

Le système est impossible

R) e

I.9 Equations logarithmiques

I.9.1 Rappel

Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus\{1\}$, b ∈ $\mathbb{R}_+^*$ et n ∈ $\mathbb{R}$.

$(\log_a b = n) \Leftrightarrow (a^n = b)$

Le logarithme de b dans la base a égal n signifie que n est la puissance à laquelle il faut élever a pour trouver b.

Exemple

$\log_2 8 = 3 \quad car\ 2^3 = 8$

Propriétés

- ✓ $\log_a b.c = \log_a b + \log_a c$
- ✓ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- ✓ $\log_a b^n = n \log_a b$
- ✓ $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$
- ✓ $\log_a a = 1$
- ✓ **Formule de changement de base**

Connaissant $\log_b x$, comment trouver $\log_a x$ connaissant également $\log_b a$:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

I.9.2 Définition et Résolution

Une équation logarithmique est une équation dans laquelle l'inconnue intervient dans l'expression du logarithmique.

Pour résoudre une équation logarithmique, on procède comme suit :

- Poser les conditions d'existence des solutions de l'équation.
- Ramener éventuellement les logarithmes à la même base.
- Utiliser les propriétés pour obtenir :

$$\log_a u(x) = \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$$

- Retenir les valeurs de l'inconnue vérifiant les conditions posées au début.

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$\log_2(x + 14) - \log_2(x - 7) = 3$

Résolution

Condition préalable : $x + 14 > 0 \quad et \quad x - 7 > 0$

$$\Leftrightarrow x > -14 \;\; et \;\; x > 7$$

$$\Leftrightarrow x \in \left]-14;\ +\infty\right[\quad et\, x \in \left]7;\ +\infty\right[$$

$$x \in \left]7;\ +\infty\right[$$

Résolvons maintenant l'équation :

$\log_2(x + 14) - \log_2(x - 7) = 3$

$\Leftrightarrow \log_2(x + 14) - \log_2(x - 7) = 3\log_2 2 \qquad car\;\; \log_2 2 = 1$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{(x+14)}{(x-7)} = \log_2 2^3$

$\Leftrightarrow \frac{x+14}{x-7} = 2^3$

$\Leftrightarrow x + 14 = 8(x - 7)$

$\Leftrightarrow x + 14 = 8x - 56$

$\Leftrightarrow x - 8x = -56 - 14$

$\Leftrightarrow -7x = -70$

$\Leftrightarrow x = {}^{70}/_{7}$

$x = 10$

$S = \{10\}$

EXERCICE 19

La solution de l'équation :

$\log\left(3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}\right) + \log\left(3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}}\right) = 2\log x - \log 33 - \log(6 + \sqrt{3})$ est :

$a)\ x = -33 \quad b)\ x = \sqrt{3} \qquad c)\ x = 33 \qquad d)\ x = 3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}} \qquad e)\ x = 3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}$

(Concours 2022-2023/Algèbre)

Résolution

Condition préalable : $x > 0$

$\log\left(3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}\right) + \log\left(3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}}\right) = 2\log x - \log 33 - \log(6 + \sqrt{3})$

$$\Leftrightarrow \log\left(3+\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)\left(3-\sqrt{3+\sqrt{3}}\right) = 2\log x - \log 33 - \log\left(6+\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log\left[(3)^2 - \left(\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)^2\right] = 2\log x - \log 33 - \log\left(6+\sqrt{3}\right) \qquad car\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\Leftrightarrow \log\left[9 - \left(3+\sqrt{3}\right)\right] = 2\log x - \log 33 - \log\left(6+\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log\left(9 - 3 - \sqrt{3}\right) = 2\log x - \log 33 - \log\left(6+\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log\left(6-\sqrt{3}\right) = 2\log x - \log 33 - \log\left(6+\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log\left(6-\sqrt{3}\right) + \log\left(6+\sqrt{3}\right) = 2\log x - \log 33$$

$$\Leftrightarrow \log\left(6-\sqrt{3}\right)\left(6+\sqrt{3}\right) = 2\log x - \log 33$$

$$\Leftrightarrow \log\left[(6)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2\right] = 2\log x - \log 33$$

$$\Leftrightarrow \log(36-3) = 2\log x - \log 33$$

$$\Leftrightarrow \log 33 = 2\log x - \log 33$$

$$\Leftrightarrow \log 33 + \log 33 = 2\log x$$

$$\Leftrightarrow \log(33)(33) = \log x^2$$

$$\Leftrightarrow \log 33^2 = \log x^2$$

$$\Leftrightarrow 33^2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 33^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -33 \quad A\ rejeter \\ \quad x = 33 \end{cases}$$

$S = \{33\}$

R) c

EXERCICE 20

L'ensemble de solution de l'équation $\log_a x = \log_x a$ dans $\mathbb{R}$, avec $a > 0$ est donnée par $s = \{x_1, x_2\}$. Les quantités $x_1 - x_2\ et - x_1x_2$ sont respectivement :

$a)\frac{a}{2}\ et\ 2a\ \ b) - \frac{1-a}{a}\ \ et - 1\ \ c)\ \frac{a-1}{a}\ \ et - 1\ \ d)\frac{a-1}{a}\ et\ 1\ \ e)\ pas\ de\ bonne\ réponse$

(Concours 2020-2021/Algèbre)

Résolution

$\log_a x = \log_x a$

$C.P : x > 0$

$\log_a x = \log_x a$

$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

$(\log_a x)^2 = 1$

Posons $\log_a x = t$

$t^2 = 1 \ \Leftrightarrow t = \pm 1$

Pour $t = 1 :\ \log_a x = 1$

$\Leftrightarrow \log_a x = \log_a a$

$\Leftrightarrow x = a$

Pour $t = -1 :\ \log_a x = -1$

$\Leftrightarrow \log_a x = \log_a a^{-1}$

$\Leftrightarrow x = a^{-1}$

$S = \left\{\frac{1}{a}\ ; a\right\}$

$x_1 - x_2 = \frac{1}{a} - a = \frac{1-a^2}{a}$

$-x_1 x_2 = -\frac{1}{a} \times a = -1$

R) e

EXERCICE 21

La solution de l'équation :

$2\log x - \log 33 - \log(6+\sqrt{3}) = \log\left(3+\sqrt{3+\sqrt{3}}\right) + \log\left(3-\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)$ est :

a) $x = 33$ $\quad b)\ x = \sqrt{3}$ $\quad c)\ x = 3+\sqrt{3+\sqrt{3}}$ $\qquad d) x = -33$

(Concours 2012-2013/Algèbre)

(Concours 2023-2024)

Résolution

$2\log x - \log 33 - \log(6+\sqrt{3}) = \log\left(3+\sqrt{3+\sqrt{3}}\right) + \log\left(3-\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)$

Condition préalable : $x > 0 \ \Leftrightarrow x \in\ ]0;\ +\infty[$

Résolvons maintenant l'équation

$$2\log x-\log 33-\log(6+\sqrt{3})=\log\left(3+\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)+\log\left(3-\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)$$

$\Leftrightarrow \log x^2-\log 33-\log(6+\sqrt{3})=\log\left(3+\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)\left(3-\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)$

$\Leftrightarrow \log x^2-\log 33-\log(6+\sqrt{3})=\log\left(9-3\sqrt{3+\sqrt{3}}+3\sqrt{3+\sqrt{3}}-\left(\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)^2\right)$

$\Leftrightarrow \log x^2\text{-}\log 33-\log(6+\sqrt{3})=\log\left(9-(3+\sqrt{3})\right)$

$\Leftrightarrow \log x^2\text{-}\log 33-\log(6+\sqrt{3})=\log(9-3-\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \log x^2-\log 33-\log(6+\sqrt{3})=\log(6-\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \log x^2-\log 33=\log(6+\sqrt{3})+\ \log(6-\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \log x^2-\log 33=\log(6+\sqrt{3})\,(6-\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \log x^2-\log 33=\log(36-6\sqrt{3}+6\sqrt{3}-3)$

$\Leftrightarrow \log x^2-\log 33=\log(33)$

$\Leftrightarrow \log x^2=\log 33+\log 33$

$\Leftrightarrow \log x^2=\log 33\times 33$

$\Leftrightarrow \log x^2=\log 33^2$

$\Leftrightarrow x^2=33^2$

$x_1=33\quad et\ \ x_2=-33$

Seul $x_1=33$ qui vérifie la condition préalable.

$S=\{33\}$

R) a

EXERCICE 22

La solution de l'équation :

$\log x^2-\log(3+\sqrt{3})=\log 33+\log\left(3+\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)+\log\left(3-\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)$ est :

a) $x=33$ $\quad b)\ x=\sqrt{3}$ $\quad c)\ x=3+\sqrt{3+\sqrt{3}}$ $\qquad d) x=-33$

(Concours 2014-2015/Algèbre)

Résolution

$\log x^2 - \log(3+\sqrt{3}) = \log 33 + \log\left(3+\sqrt{3+\sqrt{3}}\right) + \log\left(3-\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)$

Condition préalable : $x^2 > 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		+	0	+	

$C.P. x \in]-\infty\,;\,+\infty[$

Résolvons maintenant l'équation

$$\log x^2 - \log(3+\sqrt{3}) = \log 33 + \log\left(3+\sqrt{3+\sqrt{3}}\right) + \log\left(3-\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)$$

$\Leftrightarrow \log x^2 - \log(3+\sqrt{3}) = \log 33 + \log\left(3+\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)\left(3-\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)$

$\Leftrightarrow \log x^2 - \log(3+\sqrt{3}) = \log 33 + \log(9 - 3\sqrt{3+\sqrt{3}}+3\sqrt{3+\sqrt{3}} - \left(\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)^2)$

$\Leftrightarrow \log x^2 - \log(3+\sqrt{3}) = \log 33 + \log\left(9-\left(3+\sqrt{3}\right)\right)$

$\Leftrightarrow \log x^2 - \log(3+\sqrt{3}) = \log 33 + \log(6-\sqrt{3}\ )$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33 + \log(6-\sqrt{3}\,) + \log(3+\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33 + \log(6-\sqrt{3}\,)(3+\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33 + \log(18 + 6\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3)$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33 + \log(15 + 3\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33\,(15 + 3\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log(495 + 99\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow x^2 = 495 + 99\sqrt{3}$

$x_1 = \sqrt{495+99\sqrt{3}}$ et $x_1 = -\sqrt{495+99\sqrt{3}}$

$S = \left\{-\sqrt{495+99\sqrt{3}};\ \sqrt{495+99\sqrt{3}}\right\}$

R*) *e

EXERCICE 23

La solution de l'équation :

$2\log x = \log 33 + \log(6+\sqrt{3}) + \log\left(3+\sqrt{3+\sqrt{3}}\right) + \log\left(3-\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)$ est :

a) $x = 33$ $\quad b)\ x = \sqrt{3}$ $\quad c)\ x = 3+\sqrt{3+\sqrt{3}}$ $\qquad d) x = -33$

(Concours 2019-2020/Algèbre)

Résolution

C.P. $x > 0$

$2\log x = \log 33 + \log(6+\sqrt{3}) + \log\left(3+\sqrt{3+\sqrt{3}}\right) + \log\left(3-\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33 + \log(6+\sqrt{3}) + \log\left(3+\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)\left(3-\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33 + \log(6+\sqrt{3}) + \log\left(9 - 3\sqrt{3+\sqrt{3}} + 3\sqrt{3+\sqrt{3}} - \left(\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)^2\right)$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33 + \log(6+\sqrt{3}) + \log\left(9-(3+\sqrt{3})\right)$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33 + \log(6+\sqrt{3}) + \log(9-3-\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33 + \log(6+\sqrt{3}) + \log(6-\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33 + \log(6+\sqrt{3})\,(6-\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33 + \log(36 - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 3)$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33 + \log 33$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33 \times 33$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 33^2$

$x_1 = 33 \quad et\ \ x_2 = -33$

Seul $x_1 = 33$ qui vérifie la condition préalable.

$S = \{33\}$

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 24

L'équation $2\log x - \log 33 = \log(6+\sqrt{3}) + \log\left(3+\sqrt{3+\sqrt{3}}\right) + \log\left(3-\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)$ a pour solution :

a) $x = -33$ $b)\ x = \sqrt{3}$ $c)\ x = 3+3+\sqrt{3+\sqrt{3}}$ $d) x = 33$ $e)\ pas\ de\ bonne\ réponse$

(Concours 2021-2022/Algèbre)

Résolution

C.P. $x > 0$

$2\log x - \log 33 = \log(6+\sqrt{3}) + \log\left(3+\sqrt{3+\sqrt{3}}\right) + \log\left(3-\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)$

$\Leftrightarrow \log x^2 - \log 33 = \log(6+\sqrt{3}) + \log\left(3+\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)\left(3-\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)$

$\Leftrightarrow \log x^2 - \log 33 = \log(6+\sqrt{3}) + \log\left(9 - 3\sqrt{3+\sqrt{3}} + 3\sqrt{3+\sqrt{3}} - \left(\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)^2\right)$

$\Leftrightarrow \log x^2 - \log 33 = \log(6+\sqrt{3}) + \log\left(9-(3+\sqrt{3})\right)$

$\Leftrightarrow \log x^2 - \log 33 = \log(6+\sqrt{3}) + \log(9-3-\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \log x^2 - \log 33 = \log(6+\sqrt{3}) + \log(6-\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \log x^2 - \log 33 = \log(6+\sqrt{3})(6-\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \log x^2 - \log 33 = \log(36 - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 3)$

$\Leftrightarrow \log x^2 - \log 33 = \log 33$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33 + \log 33$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33 \times 33$

$\Leftrightarrow \log x^2 = \log 33^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 33^2$

$x_1 = 33$ $et\ x_2 = -33$

Seul $x_1 = 33$ qui vérifie la condition préalable.

$S = \{33\}$

$\boldsymbol{R)\ d}$

I.10 Equations exponentielles

Une équation exponentielle dans $\mathbb{R}$ est celle dans laquelle l'inconnue intervient dans l'exposant.

Exemples :

$2^{x+1} = 4$

$4^x = 2^{x-2}$

Marche à suivre pour la résolution

On peut classifier les équations exponentielles en 3 cas :

1er cas : Les deux membres ont la même base.

$a^{u(x)} = a^{v(x)}$, avec $a \in \mathbb{R}_+^* /\{1\}$

$a^{u(x)} = a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$1)3^{(x+2)(4-x)} = 1$ $\quad$ $2)3^x = \sqrt[3]{9}$ $\quad$ $3)\ \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{9}{16}$

Solution

$1)3^{(x+2)(4-x)} = 1$
$3^{(x+2)(4-x)} = 1$
$\Leftrightarrow 3^{(x+2)(4-x)} = 3^0$
$\Leftrightarrow (x+2)(4-x) = 0$
$\Leftrightarrow x+2 = 0 \ \ ou \ \ 4-x = 0$
$\Leftrightarrow x{=}-2 \ \ ou \ \ x = 4$
$S = \{-2; 4\}$

$2)\ 3^x = \sqrt[3]{9}$

$3^x = \sqrt[3]{9}$
$\Leftrightarrow 3^x = 9^{1/3}$ $\qquad$ $car\ \sqrt[n]{a^p} = a^{p/n}$
$\Leftrightarrow 3^x = (3^2)^{1/3}$
$\Leftrightarrow 3^x = 3^{2\times\frac{1}{3}}$
$\Leftrightarrow 3^x = 3^{2/3}$
$\Leftrightarrow x = 2/3$
$S = \{2/3\}$

3) $\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{3^2}{4^2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$

$\Leftrightarrow x = -2$

$\boldsymbol{S = \{-2\}}$

2e cas : Equation de la forme $\boldsymbol{a^{u(x)} = b}$ $\quad$ $\boldsymbol{avec\ b \in \mathbb{R}_+^*}$

$a^{u(x)} = b \Leftrightarrow \log_a a^{u(x)} = \log_a b$

$\Leftrightarrow u(x)\ \log_a a = \log_a b \qquad car\ \log_a a = 1$

$\Leftrightarrow u(x) = \log_a b$

Exemple :

Résoudre dans ℝ les équations suivantes

1) $5^{\log_5 x} = 125$ $\quad$ 2) $5^x = 3$

Solution

1) $5^{\log_5 x} = 125$

$\Leftrightarrow \log_5 5^{\log_5 x} = \log_5 125$

$\Leftrightarrow \log_5 x \log_5 5 = \log_5 125$

$\Leftrightarrow \log_5 x = 3$

$\Leftrightarrow \log_5 x = \log_5 5^3$

$\Leftrightarrow x = 5^3$

$S = \{125\}$

2) $5^x = 3$

$\Leftrightarrow \log_5 5^x = \log_5 3$

$\Leftrightarrow x\ \log_5 5 = \log_5 3$

$\Leftrightarrow x = \log_5 3 \qquad car\ \log_5 5 = 1$

$S = \{\log_5 3\}$

3^e cas : Autres types d'équations

Ce sont des équations qui après transformation, se ramène à un des cas précédents.

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $6^x + \frac{1}{6^x} - 2 = 0$ 2) $8^{2x} - 3.8^x = 4$ 3) $49^x - 7^x - 2 = 0$

Résolution

1) $6^x + \frac{1}{6^x} - 2 = 0$

Résolution

$6^x + \frac{1}{6^x} - 2 = 0$

Posons $6^x = t, l'équation\ devient$:

$t + \frac{1}{t} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{t^2+1-2t}{t} = 0$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

Résolvons cette équation du second degré

$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1$

$\Delta = 0$

$t_1 = t_2 = {}^{2}/_{2} = 1$

$t = 1 \Leftrightarrow 6^x = 1$

$\Leftrightarrow 6^x = 6^0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

2) $8^{2x} - 3.8^x = 4$

Résolution

$8^{2x} - 3.8^x = 4$

Posons $8^x = t$, l'équation devient :

$t^2 - 3t = 4$

$\Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$

Résolvons cette nouvelle équation du second degré en t :

$t^2 - 3t - 4 = 0$

$a = 1 \qquad b = -3 \qquad c = -4$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4)$

$\Delta = 25$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{3+\sqrt{25}}{2} = 4 \\ t_2 = \frac{3-\sqrt{25}}{2} = -1 \text{ à } rejeter \end{cases}$$

$Pour\ t = 4 : 8^x = 4$

$\Leftrightarrow (2^3)^x = 2^2$

$\Leftrightarrow 2^{3x} = 2^2$

$\Leftrightarrow 3x = 2$

$\Leftrightarrow x = {}^2/_3$

$S = \{{}^2/_3\}$

3) $49^x - 7^x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow (7^2)^x - 7^x - 2 = 0$

Posons $7^x = t$, on aura : $(7^2)^x - 7^x - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2)$

$= 1 + 8$

$\Delta = 9$

$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2(1)} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2(1)} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad A\ rejeter$

Pour $t = 2$: $\quad 7^x = t \Leftrightarrow 7^x = 2$

$\Leftrightarrow \log_7 7^x = \log_7 2$

$\Leftrightarrow x \log_7 7 = \log_7 2$

$\Leftrightarrow x = \log_7 2$

$S = \{\log_7 2\}$

EXERCICE 25

La solution de l'équation : $8^{6x} - 3.8^{3x} - 4 = 0$ est :

$a)\ S = \{4, -1\}$ $b)\ S = \{-4\,;0\}$ $c)\ S = \{4\,;1\}$ $d)\ S = \left\{\frac{2}{9}\right\}$ $e)\ ABR$

(Concours 2023-2024/Algèbre)

Résolution

$8^{6x} - 3.8^{3x} - 4 = 0 \Leftrightarrow (8^{3x})^2 - 3.8^{3x} - 4 = 0$

Posons $8^{3x} = t$, l'équation devient : $t^2 - 3t - 4 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(-4)$

$= 9 + 16$

$\Delta = 25$

$t_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2(1)} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$ $t_2 = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2(1)} = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ A rejeter

Or $8^{3x} = t, pour\ t = 4$, on a :

$8^{3x} = 4 \Leftrightarrow (2^3)^{3x} = 2^2$

$\Leftrightarrow 2^{9x} = 2^2$

$\Leftrightarrow 9x = 2$

$\Leftrightarrow x = {}^{2}/_{9}$

$R)\ d$

EXERCICE 26

La somme et le produit des $a\ et\ b$ tels que pour tout réel x on ait :

$(2x+1)e^{x+1} + x - 3 = a(x+1)e^{x+1} + be^{x+1} + x - 3$ valent respectivement :

$a)\ 1\ et -3$ $b) -3\ et\ 4$ $c) -1\ et -2$ $d)\ 1\ et -2$ $e) -1\ et -3$

(Concours 2022-2023/Algèbre)

Résolution

$(2x+1)e^{x+1} + x - 3 = a(x+1)e^{x+1} + be^{x+1} + x - 3$

$(2x+1)e^{x+1} + x - 3 = [a(x+1) + b]e^{x+1} + x - 3$

$(2x+1)e^{x+1} + x - 3 = (ax + a + b)e^{x+1} + x - 3$

$(2x+1)e^{x+1} + x - 3 = [ax + (a+b)]e^{x+1} + x - 3$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 2 & (1) \\ a + b = 1 & (2) \end{cases}$$

$(1)\ \ dans\ (2)\ \Rightarrow 2 + b = 1 \quad \Leftrightarrow b = 1 - 2$

$\Leftrightarrow b = -1$

$a = 2 \quad et\ \ b = -1 \quad \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 + (-1) = 1 \\ a.b = 2(-1) = -2 \end{cases}$

R) d

EXERCICE 27

Soit la fonction $f(x) = \frac{2\ln(x+1)}{\ln x}$

L'ensemble de solution S de l'équation $f(x) = 1$ est :

1) $S =]0\,;\, +\infty[$ 2) $S = [0; 1[$ 3) $S = \left\{0; \frac{1}{6}\right\}$ 4) $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$ 5) $\left[1; \frac{3}{2}\right]$

(Concours 2022-2023/Algèbre)

Résolution

$f(x) = \frac{2\ln(x+1)}{\ln x}$

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2\ln(x+1)}{\ln x} = 1$

Conditions préalables $x + 1 > 0 \quad et\ x > 0\ \ et \ln x \neq 0 \ \Leftrightarrow x > -1\ \ et\ x > 0\ \ et\ x \neq 1$

Résolvons maintenant l'équation :

$\frac{2\ln(x+1)}{\ln x} = 1 \ \Leftrightarrow 2\ln(x+1) = \ln x$

$\Leftrightarrow \ln(x+1)^2 = \ln x$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = x$

$\Leftrightarrow (x)^2 + 2(x)(1) + (1)^2 = x$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4(1)(1)$

$= 1 - 4$

$\Delta = -3$

Pas de racines réelles.

***R*) 6**

EXERCICE 28

On rappelle que $chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $et\ shx = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. L'équation $5chx - 3shx = 4\ dans\ \mathbb{R}$ a pour solution :

$a)\ e^2$ $b) -2\ln 2$ $c) \ln 3$ d) $\ln\ 2$ e) pas de donne réponse

(Concours 2020-2021)

Résolution

$5chx - 3shx = 4$

$5\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) - 3\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right) = 4$

$\frac{5e^x+5e^{-x}}{2} - \frac{3e^x-3e^{-x}}{2} = 4$

$\frac{5e^x+5e^{-x}-3e^x+3e^{-x}}{2} = 4$

$2e^x + 8e^{-x} = 8$

$e^x + 4e^{-x} = 4$

$e^x + \frac{4}{e^x} = 4$

$\frac{e^{2x}+4}{e^x} = 4$

$e^{2x} + 4 = 4e^x$

$e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$

Posons $e^x = t$

L'équation devient : $t^2 - 4t + 4 = 0$

Résolvons cette équation du second degré

$a = 1$ $\quad b = -4$ $\quad c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4)$

$= 16 - 16$

$\Delta = 0$

$t = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$

Or $e^x = t \Leftrightarrow e^x = 2$

$\Leftrightarrow \ln e^x = \ln 2$

$\Leftrightarrow x \ln e = \ln 2 \qquad car \ln e = 1$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$

$S = \{\ln 2\}$

$\boldsymbol{R)\ d}$

EXERCICE 29

Le système $\begin{cases} \frac{2^y}{3} = x \\ \frac{3^y}{2} = x \end{cases}$ a pour solution $(x\,, y)$. Les quantités $12x + y\ et\ 6xy$ sont données respectivement par :

$a. -5\ et\ 12 \quad b. -2\ et\ 17 \quad c. 1\ et\ -1 \quad d. Pas\ de\ bonne\ réponse$

(Concours 2014-2015/ Algèbre)

Résolution

$\begin{cases} \frac{2^y}{3} = x \\ \frac{3^y}{2} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = 3x & (1) \\ 3^y = 2x & (2) \end{cases}$

Divisons membre à membre (1) par (2)

$\frac{2^y}{3^y} = \frac{3x}{2x}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^y = \frac{3}{2} \qquad car \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \qquad car \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$

$\Rightarrow y = -1 \quad (3)$

Remplaçons la valeur trouvée dans (1) pour trouver la valeur de x

(3) dans (1)

$2^{-1} = 3x$

$3x = \frac{1}{2}$

$x = {}^{1}/_{6}$

$(x, y) = ({}^{1}/_{6}, -1)$

$12x + y = 12 \times \frac{1}{6} - 1 = 1$

$6xy = 6 \times \frac{1}{6} \times (-1) = -1$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 30

Le système $\begin{cases} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y \end{cases}$ $a\ pour\ solution\ (x, y).$ Les quantités $x + y\ et\ xy$ valent respectivement :

$a)\ -\frac{5}{6}\ et - \frac{1}{6}$ $b)\ -\frac{1}{2}\ et - \frac{3}{6}$ $c)\ \frac{3}{5}\ et\ \frac{5}{6}$ $d)\ Pas\ de\ bonne\ réponse.$

(Concours 2012-2013/ Algèbre)

Résolution

$\begin{cases} 2^x = 3y\ (1) \\ 3^x = 2y\ \ (2) \end{cases}$

Divisons membre à membre (1) par (2)

$\frac{2^x}{3^x} = \frac{3y}{2y}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$ $car\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ $car\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$

$\Rightarrow x = -1\ \ (3)$

Remplaçons la valeur trouvée dans (1) pour trouver la valeur de y

(3) dans (1)

$2^{-1} = 3y$

$3y = \frac{1}{2}$

$y = {}^{1}/_{6}$

$(x, y) = (-1;\ {}^{1}/_{6})$

$x + y = -1 + \frac{1}{6} = \frac{-6+1}{6} = \frac{-5}{6}$

$xy = (-1) \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$

$\boldsymbol{R}) \boldsymbol{a}$

EXERCICE 31

Le système $\begin{cases} 2^y = 3x \\ 3^y = 2x \end{cases}$ $a\ pour\ solution\ (x, y)$. Les quantités $x - y\ et\ xy$ valent respectivement :

$a)\ -\frac{5}{6}\ et\ \frac{1}{6}$ $b)\ -\frac{1}{2}\ et -\frac{3}{2}$ $c\,) -\frac{3}{2}\ et\ \frac{1}{2}$ $d)\ Pas\ de\ bonne\ réponse.$

(Concours 2011-2012/ Algèbre)

(Concours 2019-2020/ Algèbre)

Résolution

$\begin{cases} 2^y = 3x \ (1) \\ 3^y = 2x \ (2) \end{cases}$

Divisons membre à membre (1) par (2)

$\frac{2^y}{3^y} = \frac{3x}{2x}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^y = \frac{3}{2}$ $\quad car\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ $\quad car\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$

$\Rightarrow y = -1 \ (3)$

Remplaçons la valeur trouvée dans (1) pour trouver la valeur de x

(3) dans (1)

$2^{-1} = 3x$

$3x = \frac{1}{2}$

$x = {}^{1}/{}_{6}$

$(x, y) = ({}^{1}/{}_{6}, -1)$

$x - y = \frac{1}{6} - 1 = \frac{1-6}{6} = \frac{-5}{6}$

$xy = \frac{1}{6} \times (-1) = -\frac{1}{6}$

$\boldsymbol{R}) \boldsymbol{d}.$

EXERCICE 32

Le système $\begin{cases} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y \end{cases}$ $a\ pour\ solution\ (x, y).$ Les quantités $x - y$ et $x + y$ sont données respectivement par :

$a)\ \frac{1}{6}\ et - \frac{5}{6}$ $b)\ \frac{3}{2}\ et - \frac{1}{2}$ $c)\ \frac{1}{2}\ et - \frac{3}{2}$ $d) - \frac{5}{6}\ et - \frac{7}{6}$ $e)\ Pas\ de\ bonne\ réponse.$

(Concours 2021-2022/ Algèbre)

Résolution

$\begin{cases} 2^x = 3y\ (1) \\ 3^x = 2y\ \ (2) \end{cases}$

Divisons membre à membre (1) par (2)

$\frac{2^x}{3^x} = \frac{3y}{2y}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$ $\quad car\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ $\quad car\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$

$\Rightarrow x = -1\ \ (3)$

Remplaçons la valeur trouvée dans (1) pour trouver la valeur de y

(3) dans (1)

$2^{-1} = 3y$

$3y = \frac{1}{2}$

$y = {}^{1}/_{6}$

$(x, y) = (-1;\ {}^{1}/_{6})$

$x - y = -1 - \frac{1}{6} = \frac{-6-1}{6} = -\frac{7}{6}$

$x + y = -1 + \frac{1}{6} = \frac{-6+1}{6} = \frac{-5}{6}$

$\boldsymbol{R})\ \boldsymbol{e}$

I.11 Equations avec des factorielles (combinaisons)

Rappelons que $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p\,!}$ $\quad et\ que\ n! = n(n-1)!$

$n, p \geq 0 \quad avec\ n \geq p \qquad et\ 0! = 1\ \ et\ 1! = 1$

Exemples :

$$\begin{aligned} 5! &= 5\,(5-1)! \\ &= 5\,.\,4! \\ &= 5.4.(4-1)! \\ &= 5.4.3! \\ &= 5.4.3.(3-1)! \\ &= 5.4.3.2! \\ &= 5.4.3.2.(2-1)! \\ &= 5.4.3.2.1! \\ &= 5.4.3.2.1 \\ 5! &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3! &= 3(3-1)\,! \\ &= 3.2! \\ &= 3.2.(2-1)! \\ &= 3.2.1! \\ &= 3.2.1 \\ 3! &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2! &= 2(2-1)! \\ &= 2.1! \\ &= 2.1 \\ 2! &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_5^2 &= \frac{5!}{(5-2)!2!} \\ &= \frac{120}{3!\times 2} \\ &= \frac{120}{6\times 2} \\ &= \frac{120}{12} \\ C_5^2 &= 10 \end{aligned}$$

EXERCICE 33

L'équation $c_x^2 = 1$ dans $\mathbb{N}$ a pour solution :

$a)\ 2\ et\ -1 \quad b)\ 2\ et\ 1 \quad c)\ 4\ et\ -2 \quad d)\ -2\ et\ -1 \quad e)\ Pas\ de\ bonne\ solution$

(Concours 2018-2019/Algèbre)

Résolution

On sait que $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

$C_x^2 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x!}{(x-2)!2!} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!\,2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{2} = 2$

$\Leftrightarrow x(x-1) = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)$

$= 1 + 8$

$\Delta = 9$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad A\ rejeter \\ x_2 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$S = \{2\}$

R) e.

EXERCICE 34

L'équation $C_x^2 = 3$ a pour solution :

$a) 3\ et -2 \quad b) -3\ et -2 \quad c)\ 3 \quad d) -2 \quad e) -3\ et -2$

(Concours 2020-2021/Algèbre)

Résolution

On sait que $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} \qquad et\ n = n(n-1)!$

$C_x^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-2)!2!} = 3$

$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!2\times 1} = 3$

$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{2} = 3$

$\Leftrightarrow x(x-1) = 6$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 6$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = -6$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6)$

$= 1 + 24$

$\Delta = 25$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2} = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad A\ rejeter \\ x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

$S = \{3\}$

R) c

EXERCICE 35

L'équation $C_x^2 = 3!$ a pour solution :

$a)\ 4\ et -3 \quad b) -4\ et\ 3 \quad c) -3 \quad d) -4 \quad e) 4$

(Concours 2021-2022/Algèbre)

Résolution

On sait que $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} \qquad et\ n! = n(n-1)!$

$C_x^2 = 3!$

$\frac{x!}{(x-2)!2!} = 3!$

$\frac{x(x-1)!}{(x-2)!\ 2\times 1} = 3 \times 2 \times 1$

$\frac{x(x-1)(x-1-1)!}{(x-2)!2} = 6$

$\frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!2} = 6$

$\frac{x(x-1)}{2} = 6$

$x(x-1) = 2 \times 6$

$x^2 - x = 12$

$x^2 - x - 12 = 0$

$a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = -12$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-12)$

$\quad = 1 + 48$

$\Delta = 49$

$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2(1)} = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad A\ rejeter$

$x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2(1)} = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$S = \{4\}$

$\boldsymbol{R)\ e}$

I.12. Equations du troisième degré

Une équation du troisième degré a la forme générale suivante :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad avec\ a \neq 0$$

Nous allons traiter le cas où un des diviseurs du terme indépendant annule ou vérifie l'équation. Dans ce cas, on procède comme suit pour résourdre l'équation du troisième degré :

- Chercher la première racine (solution) qui correspond au diviseur du terme indépendant vérifiant l'équation
- Décomposer le polynôme (équation) par $x - r$ (avec r la racine trouvée à l'étape précédente
- Après décomposition, le quotient donnera une équation du second degré, qu'il faut résoudre pour trouver éventuellement la deuxième et troisième racine.

Exemple :

Résoudre $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$

Les diviseurs du terme indépendant (12 dans notre cas) sont : $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6\ et \pm 12$

On essaie chaque diviseur pour voir celui qui va vérifier l'équation :

Pour $x = 1$: $(1)^3 - 7(1)^2 + 16(1) - 12 = -2 \neq 0$

Pour $x = -1$: $(-1)^3 - 7(-1)^2 + 16(-1) - 12 = -36 \neq 0$

Pour $x = 2$: $(2)^3 - 7(2)^2 + 16(2) - 12 = 0$

$x = 2$ vérifie donc $x_1 = 2$

Decomposons $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ par $x - 2$ par la méthode d'Horner

	1	-7	16	-12
2		2	-10	12
	1	-5	6	0

D'où $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x-2)(x^2 - 5x + 6)$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6)$

$= 25 - 24$

$\Delta = 1$

$x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$ $\quad x_3 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$S = \{2; 3\}$

EXERCICE 36

Soit la fonction $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. Les valeurs de x vérifiant $f(x) = 0$ sont dans l'ensemble ?

$a)$ 2 $\quad b)$ 3 $\quad c)$ 0 $\quad d) +\infty \quad d) -\infty$

(Concours 2023-2024/Analyse)

Résolution

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

Les diviseurs du terme indépendant sont -1 et 1

Pour $x = 1$: $(1)^3 + (1)^2 - 1 - 1 = 0$ $\quad$ Donc $x_1 = 1$

Decomposons $x^3 + x^2 - x - 1$ par $x - 1$

	1	1	-1	-1
1		1	2	1
	1	2	1	0

Donc $x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x^2 + 2x + 1)$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Delta = (2)^2 - 4(1)(1)$

$= 4 - 4$

$\Delta = 0$

$x_2 = x_3 = \frac{-2}{2(1)} = \frac{-2}{2} = -1$

$S = \{-1, 1\}$

R) e

I.13. Problèmes qui conduit à la résolution des équations

Certains problèmes peuvent être résolus par des équations. La résolution d'un problème par l'algèbre peut se décomposer en quatre étapes :

- Choix des inconnues
- Mise en équation
- Résolution des équations
- Discussion du problème

EXERCICE 37

Une régate, ou course de Voilliers est organisée à la Rochelle. Deux types de Voilliers participent à la régate :

- Les « 420 » qui ont à bord deux personnes
- Les « optimistes » qui sont manœuvrés par une personne.

On compte au depart de la régate 48 voiliers et 80 personnes.

Le nombre de Voiliers de chaque catégorie vaut respectivement :

$a)\ 32\ et\ 16$ $\quad b)\ 25\ \ et\ 23$ $\quad c)\ 15\ \ et\ 33$ $\quad d)\ 33\ et\ 15$ $\quad e) -33\ \ et -15$

(Concours 2023-2024/Algèbre)

Résolution

Posons x : le nombre de Voiliers « 420 » et

y : le nombre de Voiliers « Optimistes »

$$\begin{cases} 2x + y = 80 & (1) \\ x + y = 48 & (2) \end{cases}$$

De (2), tirons x : $x = 48 - y \quad (3)$

$(3)\ dans\ (1) \Rightarrow 2(48 - y) + y = 80$

$\Leftrightarrow 96 - 2y + y = 80$

$\Leftrightarrow 2y - y = 80 - 96$

$\Leftrightarrow -y = -16$

$\Leftrightarrow y = 16 \quad (4)$

$(4)\ dans\ (3) \Rightarrow x = 48 - 16$

$\Leftrightarrow x = 32$

Donc il y a 32 Voiliers « 420 » et 16 Voiliers « Optimistes »

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 38

La longueur et la largeur d'une parcelle rectangulaire de périmètre 52 m et d'aire $165\ m^2$ sont :

$a)\ 16\ m\ et\ 12\ m \quad b)\ 10\ m\ \ et\ 15\ m \quad c)\ 13\ m\ et\ 14\ m \quad d)\ ABR$

(Concours 2023-2024/algèbre)

Résolution

Posons L : la longueur et l : la largeur

$$\begin{cases} 2L + 2l = 52 & (1) \\ L.l = 165 & (2) \end{cases}$$

$De\ (2)$, tirons $L \Rightarrow L = \frac{165}{l} \quad (3)$

$(3)\ dans\ (1) \Rightarrow 2\left(\frac{165}{l}\right) + 2l = 52 \quad \Leftrightarrow \frac{330}{l} + 2l = 52$

$\Leftrightarrow \frac{330+2l^2}{l} = 52$

$$\Leftrightarrow 330 + 2l^2 = 52l$$

$$\Leftrightarrow 2l^2 - 52l + 330 = 0$$

$\Delta = (-52)^2 - 4(2)(330)$

$= 2704 - 2640$

$\Delta = 64$

$l_1 = \frac{-(-52)+\sqrt{64}}{2(2)} = \frac{52+8}{4} = \frac{60}{4} = 15 \quad l_2 = \frac{-(-52)-\sqrt{64}}{2(2)} = \frac{52-8}{4} = \frac{44}{4} = 11$

On prend la petite valeur, donc $l = 11 \quad (4)$

$(4)\ dans\ (3)\ \Rightarrow L = \frac{165}{11} = 15$

$L = 15\,m\ \ et\ l = 11\,m$

R) d

EXERCICE 39

La largeur et la longueur d'une parcelle rectangulaire de 80 m^2 $de\ surface$ et de 42 m de périmètre sont :

$a)\ 7\,m\ et\ 12\,m\ \ b) - 12\,m\ et - 7m\ \ c)16\,m\ et - 5m\ d)\ \ 12m\ et\ 16m\ \ e)Pas\ de\ bonne\ réponse$

(Concours 2022-2023/Algèbre)

Résolution

Première méthode

On sait que dans un rectangle :

$S = L \times l \quad et\ \ P = 2 \times l + 2 \times L$

On a le système suivant :

$$\begin{cases} L \cdot l = 80 & (1) \\ 2l + 2L = 42 & (2) \end{cases}$$

De (1) tirons la valeur de L : $L = {}^{80}/_{l} \quad (3)$

(3) dans (2)

$2 \times \frac{80}{l} + 2l = 42$

$\Leftrightarrow \frac{160+2l^2}{l} = 42$

$\Leftrightarrow 160 + 2l^2 = 42l$

$\Leftrightarrow 2l^2 - 42l + 160 = 0$

$\Delta = (-42)^2 - 4 \times 2 \times 160$

$\Delta = 484$

$$\begin{cases} l_1 = \frac{42+\sqrt{484}}{4} = 16 \\ l_2 = \frac{42-\sqrt{484}}{4} = 5 \end{cases} \quad (4)$$

Remplaçons la valeur de l pour trouver L :

(4) dans (3)

$L = \frac{80}{5} = 16$

$Donc\ L = 16\ m\ et\ l = 5m$

$R)\ e$

Deuxième méthode

Comme les valeurs sont déjà proposées, il suffit de remplacer pour voir si le périmètre donnera 42 et la surface 80.

On sait que : $P = 2L + 2l \quad et\ S = L \times L$

Pour l'assertion a

$$l = 7\ m\ et\ L = 12\ m \quad \Rightarrow \begin{cases} P = 2(12) + 2(7) \\ S = 12 \times 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 24 + 14 \\ S = 84 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 38\ m \\ S = 84\ m^2 \end{cases}$$

L'assertion a est incorrecte.

Pour l'assertion b

Elle est incorrecte car la longueur et la largeur ne peuvent pas être négatives

Pour l'assertion c

Elle est également incorrecte car la largeur ne peut pas être supérieure à la longueur et cette dernière ne peut pas être négative.

Pour l'assertion d

$$l = 12\ m\ et\ L = 16\ m \quad \Rightarrow \begin{cases} P = 2(16) + 2(12) \\ S = 16 \times 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 32 + 24 \\ S = 192 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 56\ m \\ S = 192\ m^2 \end{cases}$$

L'assertion est incorrecte.

$R)\ e$

EXERCICE 40

La largeur et la longueur d'une parcelle rectangulaire de 80 m^2 $de\ surface$ et de 42 m de périmètre sont :

a) $12\ m\ et\ \ 7m$ $\quad b)\ 15m\ et\ 5\ m$ $\quad c)\ 16m\ et\ 5m$ $\quad d)\ Pas\ de\ bonne\ réponse$

(Concours 2012-2013/Algèbre)

Résolution

<u>Première méthode</u>

On sait que dans un rectangle :

$S = L \times l \quad et\ \ P = 2 \times l + 2 \times L$

On a le système suivant :

$$\begin{cases} L \cdot l = 80 & (1) \\ 2l + 2L = 42 & (2) \end{cases}$$

De (1) tirons la valeur de L : $L = {}^{80}/_{l}\ \ (3)$

(3) dans (2)

$2 \times \frac{80}{l} + 2l = 42$

$\Leftrightarrow \frac{160+2l^2}{l} = 42$

$\Leftrightarrow 160 + 2l^2 = 42l$

$\Leftrightarrow 2l^2 - 42l + 160 = 0$

$\Delta = (-42)^2 - 4 \times 2 \times 160$

$\Delta = 484$

$$\begin{cases} l_1 = \frac{42+\sqrt{484}}{4} = 16 \\ l_2 = \frac{42-\sqrt{484}}{4} = 5 \end{cases} \quad (4)$$

Remplaçons la valeur de l pour trouver L :

(4) dans (3)

$L = \frac{80}{5} = 16$

$Donc\ L = 16\ m\ et\ l = 5m$

$\boldsymbol{R})\ \boldsymbol{d}.$

Deuxième méthode

Comme les valeurs sont déjà proposées, il suffit de remplacer pour voir si le périmètre donnera 42 et la surface 80.

Selon la question, la première valeur correspond à la largeur et la deuxième à la longueur et nous savons que la longueur est supérieure ou égale à la largeur. En regardant toutes les assertions, on constate que la première valeur (la largeur) est supérieure à la deuxième valeur (la longueur). Donc il n'y a pas de bonne réponse.

EXERCICE 41

La longueur et la largeur d'une parcelle rectangulaire de périmètre 56 m et d'aire $196\ m^2$ sont :

a) $16\ m\ et\ 12m$ $b)\ 10m\ et\ 15\ m$ $c)\ 12m\ et\ 16m$ $d)\ Pas\ de\ bonne\ réponse$

(Concours 2011-2012/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Algèbre)

Résolution

Les assertions b et c sont déjà fausses car la longueur est toujours supérieure ou égale à la largeur. Il nous reste que l'assertion a.

1ere méthode :

On sait que dans un rectangle :

$S = L \times l \quad et\ P = 2 \times l + 2 \times L$

Dans notre cas, on doit avoir :

$L \times l = 196 \quad et\ 2l + 2L = 56$

Remplaçons L par 16 et l par 12 (assertion a) pour voir si ça va vérifier :

$16 \times 12 = 192 \neq 196$

$2 \times 12 + 2 \times 16 = 56$

On constate que l'assertion a vérifié pour le périmètre, mais pas pour l'aire

$\boldsymbol{R})\ \boldsymbol{d}.$

2e méthode

On sait que dans un rectangle :

$S = L \times l \quad et \;\; P = 2 \times l + 2 \times L$

Dans notre cas, on doit avoir :

$L \times l = 196 \quad et \;\; 2l + 2L = 56$

On a le système suivant :

$$\begin{cases} L \cdot l = 196 & (1) \\ 2l + 2L = 56 & (2) \end{cases}$$

De (1) tirons la valeur de L : $L = {}^{196}/_{l} \;\; (3)$

(3) dans (2)

$2 \times \frac{196}{l} + 2l = 56$

$\Leftrightarrow \frac{392+2l^2}{l} = 56$

$\Leftrightarrow 392 + 2l^2 = 56l$

$\Leftrightarrow 2l^2 - 56l + 392 = 0$

$a = 2 \qquad b = -56 \qquad\qquad c = 392$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-56)^2 - 4 \times 2 \times 392$

$= 3\,136 - 3\,136$

$\Delta = 0$

$l = \frac{56}{4} = 14 \qquad (4)$

Remplaçons la valeur de l pour trouver L :

(4) dans (3)

L$= \frac{196}{14} = 14$

$Donc\ L = 14\ m\ et\ l = 14m$

R) d.

EXERCICE 42

Déterminer la longueur et la largeur d'une parcelle rectangulaire de périmètre 180 m et d'aire 2000 m^2.

(Concours 2008-2009/ Algèbre)

Résolution

On sait que dans un rectangle :

$S = L \times l \quad et \;\; P = 2 \times l + 2 \times L$

Dans notre cas, on doit avoir :

$L \times l = 2000 \quad et \;\; 2l + 2L = 180$

On a le système suivant :

$$\begin{cases} L \cdot l = 2000 & (1) \\ 2l + 2L = 180 & (2) \end{cases}$$

De (1) tirons la valeur de L : $L = {}^{2000}/_{l} \;\; (3)$

(3) dans (2)

$2 \times \frac{2000}{l} + 2l = 180$

$\Leftrightarrow \frac{4000+2l^2}{l} = 180$

$\Leftrightarrow 4000 + 2l^2 = 180l$

$\Leftrightarrow 2l^2 - 180l + 4000 = 0$

$a = 2 \qquad b = -180 \qquad c = 4000$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-180)^2 - 4 \times 2 \times 4000$

$\;\; = 32\,400 - 32\,000$

$\Delta = 400$

$$\begin{cases} l_1 = \frac{180-\sqrt{400}}{2(2)} = \frac{180-20}{4} = \frac{160}{4} = 40 \\ l_2 = \frac{180+\sqrt{400}}{2(2)} = \frac{180+20}{4} = \frac{200}{4} = 50 \end{cases} \quad (4)$$

Remplaçons la valeur de l pour trouver L :

(4) dans (3)

$L = \frac{2000}{40} = 50$

$Donc\ L = 50\ m\ et\ l = 40m$

EXERCICE 43

Avant sa mort, Monsieur MAKAYABU lègue son avoir de 9000 dollars à ses deux enfants. La part de l'ainé dépasse le double du cadet de 3000 dollars.

Quelle est la part de chacun ?

(Concours 2008-2009/Algèbre)

Résolution

Posons x : la part de l'ainé

y : la part du cadet

On a le système suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{x} = 2\mathrm{y} + 3000\ (1) \\ \mathrm{x} + \mathrm{y} = 9000\ \ (2) \end{cases}$$

(1) Dans (2)

$2y + 3000 + y = 9000$

$3y = 9000 - 3000$

$3y = 6000$

$y = {}^{6000}/_{3}$

$y = 2000\ (3)$

(3) dans (1)

x= $2 \times 2000 + 3000$

$x = 4000 + 3000$

$x = 7000$

La part de l'ainé est : 7000 dollars

Et celle du cadet est de 2000 dollars.

EXERCICE 44

La longueur et la largeur d'une parcelle rectangulaire de 32m de périmètre et de $240m^2$ d'aire valent respectivement :

$a)\ 15m\ et\ 18m\quad b)\ 20m\ et\ 15m\quad c)\ 25m\ et\ 11m\quad d)\ 20m\ et\ 12m$

(Concours 2013-2014/ Algèbre)

Résolution

Première Méthode

On sait que dans un rectangle :

$S = L \times l \quad et\ \ P = 2 \times l + 2 \times L$

Dans notre cas, on doit avoir :

$L \times l = 240 \quad et\ \ 2l + 2L = 32$

L'assertion a est déjà écartée car la longueur doit être supérieure ou égale à la largeur.

Testons les autres assertions

Pour b : 20$\times$ $15 = 300 \neq 240$ b est écartée

Pour c : 25$\times$ $11 = 275 \neq 240$ c aussi écartée

Pour d : 20$\times$ $12 = 240 \quad et\ 2 \times 20 + 2 \times 12 = 64 \neq 32$ d écartée aussi.

$\boldsymbol{R)\ e.}$

Deuxième méthode

On a le système suivant :

$$\begin{cases} L \cdot l = 240 & (1) \\ 2l + 2L = 32 & (2) \end{cases}$$

De (1) tirons la valeur de L : $L = {}^{240}/_{l}\ \ (3)$

(3) dans (2)

$2 \times \frac{240}{l} + 2l = 32$

$\Leftrightarrow \frac{480+2l^2}{l} = 32$

$\Leftrightarrow 480 + 2l^2 = 32l$

$\Leftrightarrow 2l^2 - 32l + 480 = 0$

$a = 2 \qquad b = -32 \qquad c = 480$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-32)^2 - 4 \times 2 \times 480$

$= 1\,024 - 3\,840$

$\Delta = -2816$

$\boldsymbol{R)\ e.}$

EXERCICE 45

Si je gagne 30$, j'aurai le double de ce que j'aurais si je perdais 30%. Combien ai-je ?

$a)\ 100\$ \qquad b)\ 60\$ \qquad c)\ 500\$ \qquad d)\ 120\$$

(Concours 2013-2014/Algèbre)

Résolution

Posons x : ce que j'ai.

$x + 30 = 2 * (x - de\ 30\%\ de\ x)$

$x + 30 = 2 * (x - 0{,}30 * x)$

$x + 30 = 2 \times 0{,}7x$

$x + 30 = 1{,}4x$

$30 = 1{,}4x - x$

$30 = 0{,}4x$

$x = \frac{30}{0{,}4}$

$x = 75$

Donc j'ai 75$.

$\boldsymbol{R)\ e.}$

EXERCICE 46

Les $\frac{3}{5}$ d'un morceau du gâteau de votre anniversaire valent 1800 FC. Que vaut un morceau ?

$a)$ 3000 FC $b)$9000 FC $c)$ 1500 FC $d)$ 180 FC $e)$ 600 FC

(Concours 2021-2022/Algèbre)

Résolution

Soit x : le montant d'un morceau

$\frac{3}{5}\,x = 1800$

$3x = 5 \times 1800$

$3x = 9000$

$x = \frac{9000}{3}$

$x = 3000\ FC$

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICES D'AUTO- EVALUATION

EXERCICE AE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations*

a) $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$
b) $(2x - 1)(x - 1)(x - 1) = 0$
c) $(x - 2)(x + 1) = 2$
d) $\frac{2}{x+1} + 3 - \frac{5}{x-2} = \frac{3}{x+1}$
e) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = 0$

EXERCICE AE2

L'équation $(x + 1)(x - 1) = 0 \; dans \; \mathbb{N}$ admet pour solution :

$a. 1 \; et - 1 \qquad b. -1 \qquad c. \; 1 \qquad d. -1 \; et \; 1$

EXERCICE AE3

L'équation $(x - 1)(x - 1) = 2 \; dans \; \mathbb{R}$ admet pour solution :

a. $3 \qquad b. 1 \; et \; 3 \qquad c. \; 3 \; et \; 3 \qquad d. \; 3 \; ou \; 3$

EXERCICE AE 4

Trouver la longueur et la largeur d'une parcelle rectangulaire qui a 52 m de périmètre et $168000 \; dm^2$

EXERCICE AE 5

Après la hausse de 25%, le prix d'un article est de 350 $. Trouver le prix de de cet article avant la hausse ?

$a) 280\$ \qquad b) \; 350\$ \qquad c) 325\$ \quad d) 262,5\$ \quad e) ABR$

EXERCICE AE 6

Dans une classe, la moitié des élèves est née en 2000, le cinquième en 2001, le sixième en 2002 et le reste, soit quatre élèves, en 2003.

Combien cette classe comprend elle d'élèves ?

EXERCICE AE 7

L'équation $(4x-3)(x+4)$ a pour solution :

$a)-4\ \ et\ \frac{4}{3}$ $b)-\frac{3}{4}et\ 4$ $c)-4\ et\ \frac{4}{3}$ $d)ABR$

EXERCICE AE8

Résoudre les systèmes suivants :

$a)\begin{cases} 2x+5y=4{,}3 \\ 3x-0{,}2y=10{,}6 \end{cases}$

$b)\begin{cases} (x+2)(y+3)=0 \\ 2x+y=12 \end{cases}$

$c)\begin{cases} a+b=ab \\ b-a=5ab \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=-5 \\ 2x+5y=-11 \end{cases}$

$e)\begin{cases} 2x+y=4 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$

$f)\begin{cases} x-y=5 \\ x+y=5 \end{cases}$

$g)\begin{cases} a-3b=7 \\ a=b-1 \end{cases}$

$h)\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{6}{5} \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{4}{5} \end{cases}$

EXERCICE AE9

Un nombre de deux chiffres est tel qu'en y ajoutant 9, on obtient le nombre renversé est qu'en le diminuant de 9, le reste est égale 4 fois la somme des chiffres. Quel est ce nombre ?

EXERCICE AE10

Soit la fonction d'une variable suivante :

$f(x)=\sqrt{\frac{x^2-4}{x^3}}$

L'équation $f(x)=0$ a pour solution :

$a)\ 1\ et-1$ $b)-4\ et\ 2$ $c)-2\ et\ 2$ $d)\ 0$ $e)ABR$

EXERCICE AE 11

Résoudre les équations suivantes :

a) $\log x = \log(5 - 6\sqrt{3}) - 18 \log \sqrt{3} - \sqrt{2}) + 2 \log(4 - 3\sqrt{3}) - 17 \log(\sqrt{3 + \sqrt{2}})$

b) $\log(2 - x) + \log(2 + x) = 2 \log 3 + \log 5$

c) $2 \log(2x - 1) - \log(2x + 3x^2) = \log(3x - 7) - \log x$

d) $\frac{\log_3 4x}{\log_3(x+1)} = 2$

EXERCICE AE12

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ $les\ systèmes\ suivants$:

a) $\begin{cases} 5^y = 3x \\ 3^y = 5x \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5.25^{2x+y} = 5^{x+1} \\ 16.2^x = 4^{x+y} \end{cases}$

EXERCICE AE13

La solution de l'équation :

$2 \log_2 x - \log_2 33 - \log_2(6 + \sqrt{3})$=$\log_2(3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}) + \log_2(3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}})$ est :

$a)\ x = 33^2 \quad b)\ x = \log_2 33 \quad c)\ x = 33 \quad d)\ x = -33 \quad e)\ x = \pm 33$

EXERCICE AE14

La longueur et la largeur d'une parcelle rectangulaire de 90 m^2 de surface et de 42 m de périmètre est de :

$a)\ 15\ m\ et\ 7\ m \quad b)\ 6\ m\ et\ 15m \quad c)\ 30m\ et\ 3\ m \quad d)\ ABR$

EXERCICE AE15

On désigne par a et b les racines de l'équation du second degré :

$x^2 + 5x + 10 = 0.$ La quantité $p = a - 2.b$ est donnée par :

$a) - 15 \quad b)\ Pas\ de\ racines\ réelles \quad c)\ 5 \quad d)\ 10 \quad e) ABR$

EXERCICE AE16

L'inéquation $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$ a pour solution :

$a)\ ]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$ $\quad b)]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$ $\quad c)\ ]2; 3[$ $\quad d)[2; 3[$

EXERCICE AE17

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\frac{2x^2-x}{x-5} \geq 0$
b) $\frac{2x^2-11x+15}{x-5} < 0$
c) $(1-x)(x-3) < 0$

EXERCICE AE18

Résoudre les équations suivantes :

a) $|x-3| + 2|x-5| = 13$
b) $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 5$
c) $\frac{|x-2|}{2} = \frac{|x-5|}{3}$
d) $|x+4| + |x-2| = 6$

EXERCICE AE19

Un triangle rectangle a pour aire 24 cm^2et pour périmètre 24 m.

Déterminer la mesure de chacun de ses côtés.

EXERCICE AE20

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $7x^2 - 2x - 5 \leq 0$
b) $-15x^2 - 11x - 2 \geq 0$
c) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$
d) $x^2 - 5x + 10 \leq 0$
e) $\frac{2x+8}{x^2+5x-6} \leq \frac{1}{x+2}$

II. GENERALITES SUR LES FONCTIONS

II.1 Le domaine de définition d'une fonction

Le domaine de définition d'une fonction dépend du type de la fonction.

II.1.1 Fonction polynôme

$Df = \mathbb{R}$

Exemples :

1) $f(x) = x^2 + 2x - 3 + 7x^3$ $\quad$ D$f = \mathbb{R}$
2) $f(x) = x^3 + \frac{2x-5}{5}$ $\quad$ D$f = \mathbb{R}$

II.1.2 Fonction rationnelle ($f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$)

$Df = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$ ou

$Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$

Cela signifie qu'on prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ sauf celles qui annulent le dénominateur.

Pour trouver le domaine de définition d'une fonction rationnelle, on procède comme suit :

- Egaler le dénominateur à zéro, c'est-à-dire écrire : $g(x) = 0$
- Résoudre l'équation ainsi formée.
- Prendre toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ à l'exception des racines de l'équation.

Exemple

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

$1) f(x) = \frac{x-5}{x-2}$ $\qquad$ $2) f(x) = \frac{2x+8}{x^2-5x+6}$

Résolution

$1)\ f(x) = \frac{x-5}{x-2}$

$Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x - 2 = 0\}$
$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
$Df = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ Ou sous forme d'intervalles
$Df =]-\infty; 2[\ \cup\ ]2; +\infty[$

$2)\ f(x) = \frac{2x+8}{x^2-5x+6}$

$Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 6 = 0\}$
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$
$\Delta = 1$
$x_1 = 3 \quad et\ x_2 = 2$
$Df = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\} \quad ou \quad Df =]-\infty; 2[\ \cup\ ]2; 3[\ \cup\ ]3; +\infty[$

II.1.3 Fonction irrationnelle de la forme $f(x) = \sqrt[n]{t(x)}$

Dans ce cas, on examine la parité de n (indice),

Si n est pair $Df = \{x \in \mathbb{R} : t(x) \geq 0\}$
Si n est impair $Df = \mathbb{R}$

Exemples :

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sqrt[3]{2x - 3}$ 2) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 5x - 6}$

Résolution

1) $f(x) = \sqrt[5]{2x - 3}$ L'indice 5 est impair, donc $Df = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 5x - 6}$

L'indice est pair

$Df = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 - 5x - 6 \geq 0\}$
$-x^2 - 5x - 6 \geq 0$
$-x^2 - 5x - 6 = 0$
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1) \times (-6)$
$\Delta = 1$
$x_1 = -3 \quad et \quad x_2 = -2$

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$-x^2 - 5x - 6$		-	0	+	0	-	

$Df = [-3; -2]$

II.1.4 Fonction irrationnelle de la forme $f(x) = \sqrt[n]{\frac{h(x)}{g(x)}}$

Si n est impair : $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}$

Si n est pair : $Df = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{h(x)}{g(x)} \geq 0\right\}$

Exemples :

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+5x-6}{x^2-2x+1}}$ 2) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-5}{x^2-7x+12}}$

Résolution

1) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+5x-6}{x^2-2x+1}}$

n est impair : $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 2x + 1 = 0\}$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1$

$= 4 - 4$

$\Delta = 0$

$x_1 = x_2 = {}^2/_2 = 1$

$Df = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad ou\ Df =]-\infty; 1[\ \cup\ ]1; +\infty[$

2) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-5}{x^2-7x+12}}$

$n\ est\ pair:\ Df = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x-5}{x^2-7x+12} \geq 0\right\}$

$\frac{x-5}{x^2-7x+12} \geq 0$

$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4\ \ et\ x_2 = 3$

x	$-\infty$		3		4		5		$+\infty$
$x-5$		-		-		-	0	+	
$x^2-7x+12$		+	0	-	0	+		+	
$\frac{x-5}{x^2-7x+12}$		-	||	+	||	-	0	+	

$Df =]3\,;4[\cup [5\,;\, +\infty\,[$

II.1.5 Fonction irrationnelle de la forme $f(x) = \frac{h(x)}{\sqrt[n]{g(x)}}$

Si n est impair : $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}$

Si n est pair : $Df = \{x \in \mathbb{R}: g(x) > 0\}$

Exemple

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{\sqrt[5]{x^2-2x+1}}$ 2) $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{\sqrt[2]{-x^2+4x-3}}$

Résolution

1) $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{\sqrt[5]{x^2-2x+1}}$

n est impair : $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 2x + 1 = 0\}$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1$

$= 4 - 4$

$\Delta = 0$

$x_1 = x_2 = {}^2/_2 = 1$

$Df = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad ou\ Df =]-\infty; 1[\ \cup\ ]1; +\infty[$

2) $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{\sqrt[2]{-x^2+4x-3}}$

n est pair : $Df = \{x \in \mathbb{R}: -x^2 + 4x - 3 > 0\}$

$-x^2 + 4x - 3 > 0$

$a = -1 \qquad b = 4 \qquad c = -3$

$-x^2 + 4x - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (4)^2 - 4 \times (-1) \times (-3)$

$= 16 - 12$

$\Delta = 4$

$x_1 = 1 \quad et\ \ x_2 = 3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$		-	0	+	0	-	

$Df =]1; 3[$

II.1.6 Fonction irrationnelle de la forme $f(x)=\frac{\sqrt[n]{h(x)}}{g(x)}$

Si n est impair : $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}$

Si n est pair : $Df = \{x \in \mathbb{R}: h(x) \geq 0 \quad et\ g(x) \neq 0\}$ ou

$$Df = \{x \in \mathbb{R}: h(x) \geq 0\} \cap \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}$$

Exemple :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1)\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 15}}{x - 3} \qquad 2)\ f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 8x + 4}}{-x^2 + 3x - 2}$$

Résolution

$1)\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2-8x+15}}{x-3}$

n est pair : $Df = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 8x + 15 \geq 0\} \cap \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x - 3 = 0\}$

$x^2 - 8x + 15 \geq 0$

$a = 1 \quad b = -8 \quad c = 15$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 15$

$= 64 - 60$

$\Delta = 4$

$x_1 = \frac{-(-8)-\sqrt{4}}{2(1)} = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$x_2 = \frac{-(-8)+\sqrt{4}}{2(1)} = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$x^2 - 8x + 15$		+	0	-	0	+	

$S_1 =]-\infty; 3] \cup [5; +\infty[$

$x - 3 \neq 0$

$x \neq 3$

$S_2 =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

$Df = S_1 \cap S_2 =]-\infty; 3[\cup [5; +\infty[$

2) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-8x+4}}{-x^2+3x-2}$

$n \ est \ pair$

$Df = \mathbb{R} - \{x \ \in \mathbb{R} : \ -x^2 + 3x - 2 = 0\}$

$-x^2 + 3x - 2 = 0$

$a = -1 \qquad\qquad b = 3 \qquad\qquad c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (3)^2 - 4(-1)(-2)$

$= 9 - 8$

$\Delta = 1$

$x_1 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2(-1)} = \frac{-3+1}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$

$x_2 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2(-1)} = \frac{-3-1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$

$Df = \mathbb{R} - \{1; 2\}$ Ou $Df =]-\infty; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[$

II.1.7 Fonction irrationnelle de la forme $f(x)=\frac{\sqrt[n]{h(x)}}{\sqrt[m]{g(x)}}$

Si n et m sont pairs : $Df = \{x \in \mathbb{R}: h(x) \geq 0 \quad et \ g(x) > 0\}$

Si n et m sont impairs : $Df = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\}$

Si n est pair et m impair : $Df = \{x \in \mathbb{R}: h(x) \geq 0 \quad et \ g(x) \neq 0\}$

Si n est impair et m pair : $Df = \{x \in \mathbb{R}: g(x) > 0\}$

Exemple :

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

$a) \ f(x) = \frac{\sqrt{12-x^2+x}}{\sqrt[3]{-2x+1}} \qquad b) \ f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{\sqrt{x^2-7x+12}}$

Résolution

$a) \ f(x) = \frac{\sqrt{12-x^2+x}}{\sqrt[3]{-2x+1}}$

$n \ est \ pair \ et \ p \ est \ impair$

$Df = \{ x \ \in \ \mathbb{R} : 12 - x^2 + x \ \geq 0 \ \ et - 2x + 1 \neq 0 \}$

$12 - x^2 + x \geq 0$

$12 - x^2 + x = 0$

$a = -1 \qquad b = 1 \qquad c = 12$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (1)^2 - 4(-1)(12)$

$= 1 + 48$

$\Delta = 49$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{49}}{2(-1)} = \frac{-1+7}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{49}}{2(-1)} = \frac{-1-7}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$12 - x^2 + x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S_1 = [-3\,;4\,]$

$-2x + 1 \neq 0$

$-2x + 1 = 0$

$-2x = -1$

$2x = 1$

$x = {}^1/_2$

$S_2 = \mathbb{R} - \{{}^1/_2\}$

$S_2 =]-\infty\,;\,{}^1/_2\,[\,\cup\,]\,{}^1/_2\,;\,+\infty[$

$Df = S_1 \cap S_2$

$Df = [-3\,;\,{}^1/_2[\,\cup\,]{}^1/_2\,;4]$

$b)\; f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{\sqrt{x^2-7x+12}}$

$n \text{ et } p \text{ sont pairs}$

$Df = \{\, x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 2 \geq 0 \;\text{ et }\; x^2 - 7x + 12 > 0\,\}$

$x^2 - 2x + 2 \geq 0$

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4(1)(2)$

$= 4 - 8$

$\Delta = -4$

x	$-\infty$			$+\infty$
$x^2 - 2x + 2$	$+$	$+$	$+$	

$S_1 =]-\infty\,;\,+\infty[$

$x^2 - 7x + 12 > 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$a = 1 \qquad b = -7 \qquad c = 12$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-7)^2 - 4(1)(12)$

$= 49 - 48$

$\Delta = 1$

$x_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{-(-7)+\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2 - 7x + 12$		$+$	0	$-$	0		

$S_2 =]-\infty\,;3[\ \cup\ ]4\,;\,+\infty[$

$Df = S_1 \cap S_2$

$Df =]-\infty\,;3[\ \cup\ ]4\,;\,+\infty[$

II.1.8 Fonctions logarithmiques

Soit $f(x) = \log_v u$. Le domaine de définition est donné par :

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : u > 0 \; et \; v > 0 \; et \; v \neq 1\}$

Exemple

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \log_{(x-5)}(x^2 - 5x + 6)$ 2) $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 9)$

3) $f(x) = \frac{\ln(x^2-7x+12)}{\ln(x-1)}$

Solution

1) $f(x) = \log_{(x-5)}(x^2 - 5x + 6)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 > 0 \;\; et \; x - 5 > 0 \;\; et \; x - 5 \neq 1\}$

$x^2 - 5x + 6 > 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6)$

$\quad = 25 - 24$

$\Delta = 1$

$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		+	0	−	0	+	

$S_1 =]-\infty\,; 2[\ \cup\ ]3\,; +\infty[$

$x - 5 > 0$

$x - 5 = 0 \;\; \Rightarrow x = 5$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$x - 5$		−	0	+	

$S_2 =]5\,; +\infty[$

$x - 5 \neq 1 \;\; \Leftrightarrow x \neq 1 + 5$

$\qquad\qquad \Leftrightarrow x \neq 6$

$S_3 =]-\infty\,; 6[\ \cup\ ]6\,; +\infty[$

$D_f = S_1 \ \cap S_2 \ \cap S_3$

$D_f =]5\,; 6[\ \cap\ ]6\,; +\infty[$

2) $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 9)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x + 9 > 0\}$

$x^2 - 6x + 9 > 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(9)$

$\quad = 36 - 36$

$\Delta = 0$

$x_1 = x_2 = \frac{-(-6)}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x^2 - 6x + 9$		+	0	+	

$D_f =]-\infty\,; 3[\ \cup\ ]3\,;\ +\infty[$

3) $f(x) = \frac{\ln(x^2-7x+12)}{\ln(x-1)}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x + 12 > 0\ \ et\ x - 1 > 0\ \ et\ \ln(x-1) \neq 0\}$

$x^2 - 7x + 12 > 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4(1)(12)$

$\quad = 49 - 48$

$\Delta = 1$

$x_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$ $\qquad x_2 = \frac{-(-7)+\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2 - 7x + 12$		+	0	−	0	+	

$S_1 =]-\infty; 3[\ \cup\ ]4;\ +\infty[$

$x - 1 > 0$

$x - 1 = 0\ \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x - 1$		−	0	+	

$S_2 =]1\,;\ +\infty[$

$\ln(x-1) \neq 0\ \ \Leftrightarrow \ln(x-1) \neq \ln 1$

$\Leftrightarrow x - 1 \neq 1$

$\Leftrightarrow x \neq 1 + 1$

$\Leftrightarrow x \neq 2$

$S_3 =]-\infty\,; 2[\ \cup\ ]2;\ +\infty[$

$D_f = S_1 \cap S_2\ \cap S_3$

$D_f =]1; 2[\ \cup\ ]2; 3[\ \cup\ ]4\,;\ +\infty[$

Nota : soient f et g deux fonctions réelles de domaine de définition respectifs D_f *et* D_g, on a :

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

$D_{af} = D_f$ avec a un réel non nul

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap D_{\frac{1}{g}}$$

EXERCICE 47

Soit la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$

Le domaine de définition de la fonction f est :

$a)\ \mathbb{R}\backslash\{-2\,;1\}$ $b)\ \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $c)\ \mathbb{R}$ $d)\ \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ $e)\ ABR$

(Concours 2023-2024/Algèbre)

Résolution

$$Domf = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$
$$= \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$\boldsymbol{R)\ b}$

EXERCICE 48

Soit $f(x) = x^3 - 4x + 3x^2 - 12$. Le domaine de définiiton de f est :

$a)\ \{12\}$ $b)\ \mathbb{R} - \{12\}$ $c)\ ]-12, +\infty[$ $d)\ \mathbb{R}$ $e)\ \mathbb{R} - \{12, -12\}$

(Concours 2023-2024)

Résolution

$f(x) = x^3 - 4x + 3x^2 - 12$: c'est un polynôme.

$Domf = \mathbb{R}$

$\boldsymbol{R)\ d}$

EXERCICE 49

Soit la fonction $f(x) = \frac{2\ln(x+1)}{\ln x}$

Le domaine de définition de la fonction f est donné par :

1) $]-\infty\,;\,+\infty[$ 2) $\left]\frac{1}{6}\,;1\right[\,\cup\,]1;\,+\infty[$ 3) $]0;\,+\infty[$ 4) $\left]\frac{1}{6}\,;\frac{1}{2}\right[\,\cup\,\left]\frac{1}{2};\,4\right[$ 5) $\left[\frac{1}{6}\,;4\right[$

(Concours 2022-2023/Algèbre)

Résolution

$f(x)=\frac{2\ln(x+1)}{\ln x}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+1>0\ \ et\ \ x>0\ \ et\ln x\neq 0\}$

$x+1>0$

$x+1=0\ \Rightarrow x=-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

$S_1=]-1;\,+\infty[$

$x>0\ \Rightarrow S_2=]0\,;\,+\infty[$

$\ln x\neq 0\ \Leftrightarrow \ln x\neq \ln 1$

$\Leftrightarrow x\neq 1$

$S_3=]-\infty\,;1[\ \cup\ ]1\,;\,+\infty[$

$D_f=S_1\cap S_2\ \cap S_3$

$D_f=]0\,;1[\ \cup\ ]1;\,+\infty\,[$

***R*) 6**

EXERCICE 50

Le domaine de définition de $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$ est

$a)\ \mathbb{R}-\{3\}\ \ b)\ ]-\infty\,;\,-3[\ \cup\ ]-3;\,+\infty[\quad c)\ \mathbb{R}-\{-3;3\}\quad d)\mathbb{R}-\{-3\}\quad e)\ \mathbb{R}$

(Concours 2022-2023/Analyse)

Résolution

Soit $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$

$Df=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}: x+3=0\}$

$x+3=0\Leftrightarrow x=-3$

$Df=\mathbb{R}-\{-3\}$ ou

$Df=]-\infty;\,-3[\ \cup\,]-3;\,+\infty[$

$R)\ b\ et\ d$

EXERCICE 51

Le domaine de définition de $\frac{x^5+x^3-2}{x+3}$ est :

$a)\mathbb{R}\quad b)\ \mathbb{R}-\{-3\}\quad c)\mathbb{R}-\{3\}\quad d)\ \mathbb{R}-\{3;\ -3\}\quad e)]-\infty;\ -3[\cup]-3;\ +\infty[$

(Concours 2018-2019/Analyse)

Résolution

Soit $f(x)=\frac{x^5+x^3-2}{x+3}$

$Df=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}: x+3=0\}$

$x+3=0\Leftrightarrow x=-3$

$Df=\mathbb{R}-\{-3\}$ ou

$Df=]-\infty;\ -3[\cup]-3;\ +\infty[$

$R)\ b\ et\ e$

EXERCICE 52

Le domaine de définition de $\frac{x^2-9}{x+3}$ est :

$a)\mathbb{R}\quad b)\ \mathbb{R}-\{-3\}\quad c)\mathbb{R}-\{3\}\quad d)\ \mathbb{R}-\{3;\ -3\}\quad e)]-\infty;\ -3[\cup]-3;\ +\infty[$

(Concours 2017-2018/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

Résolution

Soit $f(x)=\frac{x^5+x^3-2}{x+3}$

$Df=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}: x+3=0\}$

$x+3=0\Leftrightarrow x=-3$

$Df=\mathbb{R}-\{-3\}$ ou

$Df=]-\infty;\ -3[\cup]-3;\ +\infty[$

$R)\ b\ et\ e$

EXERCICE 53

Soit les fonctions d'une variable réelle $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$.

Les domaines de définition des fonctions $f(x)\ et\ \frac{1}{g(x)}$ sont respectivement :

$a)\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}\ et\ [-1;1]\quad b)\mathbb{R}^*\ et\ \mathbb{R}\quad c)\left[-\frac{1}{2};1\right]\ et\ \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}\ d)\mathbb{R}\ et\ \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

(Concours 2018-2019/Algèbre)

Résolution

$f(x) = 2x + 1$

$D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = x^2 - 1$ et $\frac{1}{g} = \frac{1}{x^2-1}$

$D_{\frac{1}{g}} = \mathbb{R}\setminus\{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 = 0\}$

$x^2 - 1 = 0$

$a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 0^2 - 4(1)(-1)$

$= 0 + 4$

$\Delta = 4$

$x_1 = \frac{0-\sqrt{4}}{2(1)} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad x_2 = \frac{0+\sqrt{4}}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$

$D_{\frac{1}{g}} = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

$\boldsymbol{R)\ d.}$

EXERCICE 54

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{4x+9} + \sqrt{3x-8}$

Le domaine de définition de la fonction $f(x)$ est donné par :

$a)\mathbb{R} \qquad b)\{+3;\ -3\} \quad c)\mathbb{R} - \{3;-3\} \quad d)\left[\frac{8}{3}\ ;\ +\infty\right[$

(Concours 2014-2015/Algèbre)

Résolution

Posons $f = f_1 - f_2 + f_3$ avec $f_1 = \sqrt{2x+1}\,, f_2 = \sqrt{4x+9}\; et\; f_3 = \sqrt{3x-8}$

$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$

- $D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 1 \geq 0\}$

$2x + 1 \geq 0$

$2x + 1 = 0$

$2x = -1$

$x = {}^{-1}/_{2}$

x	$-\infty$		${}^{-1}/_{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	

$D_{f_1} = [{}^{-1}/_{2}\,; +\infty[$

- $D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R}: 4x + 9 \geq 0\}$

$4x + 9 \geq 0$

$4x + 9 = 0$

$4x = -9$

$x = {}^{-9}/_{4}$

x	$-\infty$		${}^{-9}/_{4}$		$+\infty$
$4x+9$		$-$	0	$+$	

$D_{f_2} = [{}^{-9}/_{4}\,; +\infty[$

- $D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R}: 3x - 8 \geq 0\}$

$3x - 8 \geq 0$

$3x - 8 = 0$

$3x = 8$

$x = {}^{8}/_{3}$

x	$-\infty$		${}^{8}/_{3}$		$+\infty$
$3x-8$		$-$	0	$+$	

$D_{f_3} = [{}^{8}/_{3}\,; +\infty[$

$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$

$D_f = [{}^{-1}/_{2}\,;\,+\infty[\cap [{}^{-9}/_{4}\,;\,+\infty[\cap [{}^{8}/_{3}\,;\,+\infty[$

$D_f = [{}^{8}/_{3}\,;\,+\infty[$

R) d.

EXERCICE 55

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-8x+15}}{\sqrt{x^2-2x-8}}$

$a)\mathbb{R} - \{-2; 4\}$ $b)\mathbb{R} - \{3; 4\}$ c)$\mathbb{R}$ $d)\ \mathbb{R} - \{5; 2\}$ $e)ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

Résolution

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-8x+15}}{\sqrt{x^2-2x-8}}$

$Df = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 8x + 15 \geq 0 \quad et\ x^2 - 2x - 8 > 0\}$

$x^2 - 8x + 15 \geq 0$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$a = 1 \qquad b = -8 \qquad c = 15$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 15$

$= 64 - 60$

$\Delta = 4$

$x_1 = \frac{-(-8)-\sqrt{4}}{2(1)} = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{-(-8)+\sqrt{4}}{2(1)} = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$

x	-∞		3		5		+∞
$x^2 - 8x + 15$		+	0	-	0	+	

$S_1 =]-\infty; 3] \cup [5;\ +\infty[$

$x^2 - 2x - 8 > 0$

$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = -8$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8)$

$\quad = 4 + 32$

$\Delta = 36$

$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{36}}{2(1)} = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{36}}{2(1)} = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x^2 - 8x + 15$		+	0	-	0	+	

$S_2 =]-\infty;\ -2[\cup]4;\ +\infty[$

$D_f = S_1 \cap S_2$

$= (\,]-\infty; 3] \cup [5;\ +\infty[\,) \cap (\,]-\infty;\ -2[\cup]4;\ +\infty[\,)$

$D_f =]-\infty;\ -2[\ \cup\ [5;\ +\infty[$

R) e

EXERCICE 56

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{x+5}}$

$a)]-3;\ -1] \cup [2; 3[\quad b)\ \mathbb{R} - \{3; 4\} \quad c)]-\infty; 5[\cup \left]\frac{3}{2};\ +\infty\right[\quad d)\emptyset \quad e) ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

Résolution

$f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{x+5}}$

L'indice est pair : $Df = \left\{x \in \mathbb{R}\colon \frac{2x-3}{x+5} \geq 0\right\}$

$\frac{2x-3}{x+5} \geq 0$

$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = {}^{3}/_{2}$

$x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$

x	$-\infty$		-5		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		-		-	0	+	
$x+5$		-	0	+		+	
$\frac{2x-3}{x+5}$		+	||	-	0	+	

$Df =]-\infty;\ -5[\ \cup\ \left[\frac{3}{2};\ +\infty\right[$

$\boldsymbol{R)\ e}$

EXERCICE 57

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-16}{x^2}}$

Le domaine de définition de la fonction f est :

$a)]-\infty; 4] \cup]4;\ +\infty[\ \ b)]-\infty; 4] \cup [4;\ +\infty[\ \ c)\ ]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[\ \ \ d)ABR$

(Concours 2012-2013/Algèbre)

Résolution

$\frac{x^2-16}{x^2} \geq 0$

$x^2 - 16 = 0$

$a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = -16$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (0)^2 - 4(1)(-16)$

$= 0 + 64$

$\Delta = 64$

$x_1 = \frac{0-\sqrt{64}}{2(1)} = \frac{-8}{2} = -4 \qquad x_2 = \frac{0+\sqrt{64}}{2(1)} = \frac{8}{2} = 4$

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$

x	$-\infty$	-4		0		4		$+\infty$
x^2-16	+	0	-		-	0	+	
x^2	+		+	0	+		+	
f	+	0	-	||	-	0	+	

$Df =]-\infty; -4] \cup [4; +\infty[$

R) b

EXERCICE 58

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+2}}{\sqrt{9-x^2}}$

$a)]-3; -1] \cup [2; 3[$ $b)\mathbb{R} - \{3; 4\}$ $c)\mathbb{R} - \{2; 3\}$ $d)\emptyset$ $e)ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

Résolution

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+2}}{\sqrt{9-x^2}}$

$Df = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - x + 2 \geq 0 \quad et\ 9 - x^2 > 0\}$

$x^2 - x + 2 \geq 0$

$a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = 2$

$x^2 - x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2$

$= 1 - 8$

$\Delta = -7$

Pas de racines réelles

x	$-\infty$				$+\infty$
x^2-x+2	+	+	+	+	+

$S_1 = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$9 - x^2 > 0$

$a = -1 \quad b = 0 \quad c = 9$

$9 - x^2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (0)^2 - 4(-1)(9)$

$= 0 + 36$

$\Delta = 36$

$x_1 = \frac{0+\sqrt{36}}{2(-1)} = \frac{6}{-2} = -3 \qquad x_2 = \frac{0-\sqrt{36}}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$9 - x^2$		-	0	+	0	-	

$S_2 =]-3\,;3[$

$D_f = S_1 \cap S_2$

$D_f = \mathbb{R} \cap]-3\,;3[$

$D_f =]-3\,;3[$

***R*) *e*.**

EXERCICE 59

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{2x+3} - \sqrt{4x+4} + \sqrt{3x-8}$

Le domaine de définition de la fonction $f(x)$ est donné par :

$a)\mathbb{R} \qquad b)\{+3;\ -3\} \quad c)\mathbb{R} - \{3; -3\} \quad d)\left[\frac{8}{3}\ ;\ +\infty\right[$

(Concours 2011-2012/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Algèbre)

Résolution

Posons $f = f_1 - f_2 + f_3$ avec $f_1 = \sqrt{2x+3}$, $f_2 = \sqrt{4x+4}$ et $f_3 = \sqrt{3x-8}$

$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$

- $D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 3 \geq 0\}$

$2x + 3 \geq 0$

$2x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = -3$

$\Leftrightarrow x = {}^{-3}/_{2}$

x	$-\infty$		${}^{-3}/_{2}$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	

$D_{f_1} = [{}^{-3}/_{2}\,;\, +\infty[$

- $D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R}: 4x + 4 \geq 0\}$

$4x + 4 \geq 0$

$4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4x = -4$

$\Leftrightarrow x = {}^{-4}/_{4}$

$\Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$4x+4$		$-$	0	$+$	

$D_{f_2} = [-1;\, +\infty[$

- $D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R}: 3x - 8 \geq 0\}$

$3x - 8 \geq 0$

$\Leftrightarrow 3x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 3x = 8$

$\Leftrightarrow x = {}^{8}/_{3}$

x	$-\infty$		${}^{8}/_{3}$		$+\infty$
$3x-8$		$-$	0	$+$	

$D_{f_3} = [{}^{8}/_{3}\,;\, +\infty[$

$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$

$D_f = [{}^{-3}/_{2}\,;\, +\infty[\cap [{}^{-9}/_{4}\,;\, +\infty[\cap [{}^{8}/_{3}\,;\, +\infty[$

$D_f = [{}^{8}/_{3}\,;\, +\infty[$

R) d.

EXERCICE 60

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \cos x$ est :

$a)$ $[-1\,;1]$ $b)$ $\mathbb{R}$ $c)$ $\mathbb{R}-\{0\}$ $d)$ $\mathbb{R}-\{1\}$ $e)$ $]-\infty\ ;\ +\infty[$

(Concours 2021-2022/Analyse)

Résolution

$R)\ \ b\ et\ e$

Car dans les consignes, on a demandé d'encercler la (les) bonne(s) réponse(s)

EXERCICE 61

On considère la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$

Le domaine de définition de la fonction f est :

$a)\mathbb{R}_+$ $b)$ $\mathbb{R}-\{-3\}\cup]-2;\ +\infty[$ $c)$ $]-2;\ +\infty[$ $d)$ $[2;\ +\infty[$ e) ABR

(Concours 2018-2019/Analyse)

Résolution

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$

$Df = \{x \in \mathbb{R}: x+2 > 0\}$

$x + 2 > 0$

$x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$

x	$-\infty$	-2		$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	

$Df =]-2;\ +\infty[$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 62

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Le domaine de définition de f est :

$a)]-\infty; 0[\cup]0;\ +\infty[$ $b)\mathbb{R}-\{12\}$ $c)$ $\mathbb{R}-\{0\}$ $d)\mathbb{R}$ $e)\mathbb{R}-\{12;-12\}$

(Concours 2017-2018/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

(Concours 2021-2022/Analyse)

(Concours 2022-2023/Analyse)

Résolution

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$Df = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$x > 0$

$x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	

$Df =]0;\ +\infty[$

$\boldsymbol{R) f}$

EXERCICE 63

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = x$ est :

$a)\mathbb{C}$ $b)\mathbb{R} - \{0\}$ $c)\ \mathbb{R} - \{1\}$ $d)\ \mathbb{R}$ $e)]-\infty;\ +\infty[$

(Concours 2017-2018/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

Résolution

$f(x) = x$

$D_f = \mathbb{R}$

Ou $D_f =]-\infty;\ +\infty[$

$\boldsymbol{R)\ d\ et\ e}$

EXERCICE 64

Soit la fonction $f(x) = -2\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-8} + \sqrt{3+2x}$

Le domaine de définition de f est :

$a)\{-3;3\}$ $b)[{}^{8}/_{3}\,;\ +\infty[$ $c)\ \left]-\infty;\ -\frac{8}{3}\right]$ $d)\mathbb{R}$

(Concours 2013-2014/Algèbre)

Résolution

Posons $f = -f_1 + f_2 + f_3$ avec $f_1 = -2\sqrt{x+1}\,, f_2 = \sqrt{3x-8}$ et

$f_3 = \sqrt{3+2x}$

$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$

- $D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R}: x+1 \geq 0\}$

$x+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x+1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

$D_{f_1} = [-1;\ +\infty[$

- $D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R}: 3x-8 \geq 0\}$

$3x-8 \geq 0$

$3x-8 = 0$

$\Leftrightarrow 3x = 8$

$\Leftrightarrow x = {}^{8}/_{3}$

x	$-\infty$		${}^{8}/_{3}$		$+\infty$
$3x-8$		$-$	0	$+$	

$D_{f_2} = \left[{}^{8}/_{3};\ +\infty\right[$

- $D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R}: 3+2x \geq 0\}$

$3+2x \geq 0$

$3+2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x = -3$

$\Leftrightarrow x = {}^{-3}/_{2}$

x	$-\infty$		${}^{-3}/_{2}$		$+\infty$
$3+2x$		$-$	0	$+$	

$D_{f_3} = \left[{}^{-3}/_{2};\ +\infty\right[$

$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$

$D_f = D_{f_1} = [-1;\ +\infty[\cap [^8/_3;\ +\infty[\cap [^{-3}/_2;\ +\infty[$

$D_f = [^8/_3;\ +\infty[$

R) b

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE21

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ est :

$a)\ \mathbb{R}$ $\quad b)\ \mathbb{R} - \{-3\}$ $\quad c)\ \mathbb{R} - \{3, -3\}$ $\quad d)\mathbb{R} - \{3\}$ $\quad e)]-\infty;\ -3[\cup]-3;\ +\infty[$

EXERCICE AE22

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{x-5}{6}$ est :

$a)\ \mathbb{R} - \{6\}$ $\quad b)\mathbb{R} - \{5\}$ $\quad c)\mathbb{R} - \{-5\}$ $\quad d)\ \mathbb{R} - \{-6\}$

EXERCICE AE23

Soit la fonction réelle d'une variable réelle suivante :

$f(x) = \sqrt[3]{4x+5} - \sqrt{4x+9} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{3x-8}.$

Le domaine de définition de f est donné par :

$a)\ \mathbb{R}$ $\quad b)\ \mathbb{R} - \{5; 9; 8\}$ $\quad c)\ \left]-\infty;\ {}^{-5}/_{4}\right] \cup \left[{}^{8}/_{3}; +\infty\right[$ $\quad d)\ \left[{}^{8}/_{3};\ +\infty\right[$ $\quad e)\ ABR$

EXERCICE AE24

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{2+x^2+x}}{\sqrt{-x^2+9}}$

$a)\ ]-3; 1] \cup [2; 3[$ $\quad b)\ \mathbb{R} - \{3; 4\}$ $\quad c)\ \mathbb{R} - \{2; 3\}$ $\quad d)\ \emptyset$

EXERCICE AE25

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{4x-6}{2x+10}}$

$a)\ ]-3; 1] \cup [2; 3[$ $\quad b)\ \mathbb{R} - \{3; 4\}$ $\quad c)\ \mathbb{R} - \{2; 3\}$ $\quad d)\ \emptyset$

EXERCICE AE26

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2x$
b) $f(x) = \frac{2x-3}{5}$
c) $f(x) = 10$

EXERCICE AE27

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x + 2 - \frac{2}{x+3}$
b) $f(x) = \frac{x+4}{-x^2+6x-8}$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x+6}$
d) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2-1}{x+4}}$
e) $f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{-x^2+4x-3}}$

EXERCICE AE28

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{2x+3} + \sqrt[4]{1-x}$
b) $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x+5}}$
c) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$
d) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x^2+3)(-4x^2+1)}}$

EXERCICE AE29

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = 5$ est :

$a)\ \mathbb{R} - \{5\} \quad b)\ \mathbb{R} - \{-5\} \quad c)\ ]-\infty; 5[\ \cup\ ]5; +\infty[\ \ d)\ ]-\infty; -5[\ \cup\ ]-5; +\infty[$

EXERCICE AE30

Déterminer le domaine de définition de la fonction suivante :

$f(x) = \sqrt[5]{x^2 + x - 6} + \sqrt[3]{x+3}$

EXERCICE AE31

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{\ln(x+5)}{\ln(x-2)}$ vaut :

$a)\ ]2; +\infty[\quad b)\ ]-5; +\infty[\quad c)\ ]2; 3[\ \cup]3; +\infty[\quad d)\ \mathbb{R} - \{-5; 2\} \quad e)\ \mathbb{R}$

EXERCICE AE32

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

$a)\ f(x) = \frac{\sqrt{2x^2-10x+12}}{\sqrt[3]{-x^2-5x-6}}$

$b)\ f(x) = \frac{\log(-x^2-x-5)}{x-3}$

$c)\ f(x) = \frac{x^2-x+2}{\ln(x^2-5x+6)} + \ln(5x-1) + \sqrt{2x-18}$

$d)\ f(x) = \frac{\ln(3x-9)}{Arc\cos(2x-1)}$

EXERCICE AE33

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = Arc\cos(2x-4)$ est donné par :

$a)\ \mathbb{R}$ $\quad b)\ [-1;1]$ $\quad c)\ \left[\frac{3}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right]$ $\quad d)\ \mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right\}$ $\quad e)\ \mathbb{R}-\left\{\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right\}$

EXERCICE AE34

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \cos(x^2-3x+2) + Arc\sin x$ est donné par :

$a)\ \mathbb{R}$ $\quad b)\ [-1;1]$ $\quad c)\ ]-1;1[$ $\quad d)\mathbb{R}-\{1,2\}$ $\quad e)\ ]-\infty;1[\ \cup\ ]1,2[\ \cup\ ]2\,;+\infty[$

EXERCICE AE35

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

$a)\ f(x) = \ln(x^2-7x+12) + \sqrt[3]{x^3-2x^2+4x-7} + \frac{\ln(x-3)}{\ln(x+3)}$

$b)\ f(x) = \frac{\ln(\ln(2x-4))}{\ln x}$

$c)\ f(x) = 2x+3+\ln(2x^2-4x+4) + \frac{1}{\sqrt{x}}$

EXERCICE AE36

Soit les fonctions suivantes : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-8x+15}}{\sqrt{-x^2-12x-20}}$ $\quad et\ g(x) = \sqrt{\frac{x^2-8x+15}{-x^2-12x-20}}$.

Laquelle des affirmations suivantes est correcte :

$a)\ D_f = D_g$ $\quad b)\ D_f \subset D_g$ $\quad c)\ D_g \subset D_f$ $\quad d)\ Aucune\ bonne\ réponse$

II.2. Parité d'une fonction

Soit f une fonction réelle de domaine de définition D_f.

- f est paire si et seulement si : $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ $\; et \; f(x) = f(-x)$
- f est paire si et seulement si : $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ $\; et \; f(-x) = -f(x)$

Il existe des fonctions qui ne sont ni paires ni impaires et une fonction ne peut pas être à la fois paire et impaire.

Nota :

$$(-x)^n = \begin{cases} x^n & si \;\; n \; est \; pair \\ -x^n & si \;\; n \; est \; impair \end{cases}$$

Exemple :

Examiner la parité de chacune de fonctions suivantes

1) $f(x) = 3x^2 + 5$

2) $f(x) = 2x^3 - x$

3) $f(x) = 4x^2 + x - 2$

Résolution

1) $f(x) = 3x^2 + 5$

Commençons par vérifier si elle est paire c'est-à-dire $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = 3.(-x)^2 + 5$

$= 3x^2 + 5$

$= f(x)$

Donc f est paire.

2) $f(x) = 2x^3 - x$

Commençons par vérifier si elle est paire c'est-à-dire $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = 2.(-x)^3 - (-x)$

$=-2x^3 + x$

$\neq f(x) \qquad f \; n'est \; pas \; paire$

Vérifions si elle est impaire c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$

$-f(x) = -2x^3 + x$

$f(-x) = 2.(-x)^3 - (-x)$

$=-2x^3 + x$

$= -f(x)$

Donc f est impaire

3) $f(x) = 4x^2 + x - 2$
Commençons par vérifier si elle est paire c'est-à-dire $f(x) = f(-x)$
$f(-x) = 4.(-x)^2 + (-x) - 2$
$=4x^2 - x - 2$
$\neq f(x) \quad f\ n'est\ pas\ paire$

Vérifions si elle est impaire c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$

$-f(x) = -4x^2 - x + 2$

$f(-x) = 4.(-x)^2 + (-x) - 2$
$=4x^2 - x - 2$
$\neq -f(x) \quad f\ n'est\ pas\ impaire$
$Donc\ f\ n'est\ ni\ paire\ ni\ impaire$

EXERCICE 65

Soit la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = 2x^2 - 3$ est :

$a)$ impaire b) paire c) ni paire ni impaire d) pas de bonne réponse

(Concours 2022-2023/Algèbre)

Résolution

$f(x) = 2x^2 - 3$

Vérifions si elle est paire, c'est-à-dire si $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = 2(-x)^2 - 3 \Rightarrow f(-x) = 2x^2 - 3$

On constate que $f(x) = f(-x)$ Donc f est paire

$R)\ b$

EXERCICE 66

La fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = x^2 - 1$ est :

$a)$Paire b) impaire c) ni paire ni impaire

(Concours 2012-2013/Algèbre)

Résolution

$f(x) = x^2 - 1$

Commençons par vérifier si elle est paire c'est-à-dire $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = (-x)^2 - 1$
$= x^2 - 1$
$= f(x)$

Donc f est paire.

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 67

La fonction $f(x) = 8x^5 - 5x^7$ est :

$a)$ Paire   b) impaire   c) ni paire ni impaire   d) ABR

(Concours 2013-2014/Algèbre)

Résolution

$f(x) = 8x^5 - 5x^7$

Commençons par vérifier si elle est paire c'est-à-dire $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = 8(-x)^5 - 5(-x)^7$

$= -8x^5 + 5x^7$

$\neq f(x) \qquad f\ n'est\ pas\ paire$

Vérifions si elle est impaire c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$

$-f(x) = -8x^5 + 5x^7$

$f(-x) = 8(-x)^5 - 5(-x)^7$

$= -8x^5 + 5x^7$

$= -f(x)$

Donc f est impaire

$\boldsymbol{R)\ b}$

EXERCICE 68

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sin x$. f est :

$a)Paire \quad b)non\ périodique \quad c)\ impaire \quad d)\ Périodique \quad e)aucune\ bonne\ réponse$

(Concours 2021-2022/Analyse)

Résolution

Parité

$f(x) = \sin x$

$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x$

$f(x) \neq f(-x) : f\ n'est\ pas\ paire$

$-f(x) = -\sin x$

$f(-x) = -f(x)\ :\ f\ est\ impaire$

$\boldsymbol{R)\ c\ \ et\ d}$

Car dans les consignes, on avait demandé d'encercler la ou les bonnes réponses

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE37

Déterminer la parité de chacune des fonctions suivantes :

$a)\ f(x) = x^4 - 3x^2 + 3x$

$b)\ f(x) = \frac{x^2+10}{3x^2-2}$

$c)\ f(x) = \frac{\sqrt[3]{4x^2}}{\sqrt[5]{x^4+3x^2-2}}$

$d)\ f(x) = \frac{2x^3-x}{x^4+1}$

$e)\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$f)\ f(x) = -\cos\frac{x}{2}$

EXERCICE AE38

$a)$ Déterminer les réels a et b pour que la fonction

$f(x) = ax^{54} + 2x^2 + (b-3)x + 4$ Soit paire

$b)$ Déterminer les réels m et n pour que la fonction $f(x) = (m-3)x^2 + 4x + 2\,mn - 12$ soit impaire.

EXERCICE AE39

La fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = 2x^3 - 4x - 5$ est :

$a)\ Paire$ $\quad b)\ Impaire$ $\quad c)\ ni\ paire\ ni\ impaire$ $\quad d)\ paire\ et\ impaire$

EXERCICE AE40

La fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = -3x^3 - 2x^7 + x$ est :

$a)\ Paire$ $\quad b)\ Impaire$ $\quad c)\ ni\ paire\ ni\ impaire$ $\quad d)\ paire\ et\ impaire$

EXERCICE AE41

La fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \cos x$ est :

$a)\ Paire$ $\quad b)\ Impaire$ $\quad c)\ ni\ paire\ ni\ impaire$ $\quad d)\ paire\ et\ impaire$

II.3. Fonction injective, surjective et bijective

Soit f une fonction réelle

- f est injective si et seulement si :

$\forall\, x_1, x_2 \in D_f : x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
Ou $\forall\, x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

Exemple et contre-exemple :

1) $f(x) = 2x + 5$
f est injective ssi $\forall\, x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$
$f(x_1) = f(x_2)$
$\Leftrightarrow 2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$
$\Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2$
$\Leftrightarrow x_1 = x_2$
Donc f est injective

2) $f(x) = 2x^2 - 3$

f est injective ssi $\forall\, x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$
$\Leftrightarrow 2{x_1}^2 - 3 = 2{x_2}^2 - 3$
$\Leftrightarrow 2{x_1}^2 = 2{x_2}^2$
$\Leftrightarrow {x_1}^2 = {x_2}^2$
$\Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{{x_2}^2}$
$\Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$
Donc f n'est pas injective

- f est surjective si et seulement si :

$\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in D_f : y = f(x)$

Exemple :
$f(x) = 2x - 3$
f est surjective car $\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in D_f : y = f(x)$
$y = f(x)$
$y = 2x + 3$
$x = 2y + 3$
$2y = x - 3$
$y = \frac{x-3}{2}$
Donc $\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x = \frac{y-3}{2} \in D_f : y = f(x)$

Nota : pour que f soit surjective, il suffit que la dernière expression trouvée ait pour domaine de définition l'ensemble d'arrivée de la fonction ($\mathbb{R}$ dans plusieurs cas)

- f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

EXERCICE 69

On considère les fonctions d'une variable réelle f et g définies par :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \longrightarrow f(x) = x^2 \quad et\ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \longrightarrow g(x) = x^2$

1) f et g sont injectives 2) f et g ne sont pas surjectives 3) f est injective et g non injective 4) PBR

(Concours 2022-2023/Algèbre)

Résolution

f est injective ssi : $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow (x_1)^2 = (x_2)^2$

$\Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{x_2^2}$

$\Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$

Donc f n'est pas injective

f est surjective si $\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in D_f : y = f(x)$

$y = f(x)$

$y = x^2$

$x = y^2$

$y = \sqrt{x}$ La dernière expression trouvée n'a pas pour domaine de définition $\mathbb{R}$.

Donc f n'est pas surjective.

g est injective ssi : $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a : $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow (x_1)^2 = (x_2)^2$

$\Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{x_2^2}$

$\Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$

Donc g n'est pas injective

g est surjective si $\forall\, y \in \mathbb{R}_+, \exists\, x \in D_f : y = g(x)$

$y = g(x)$

$y = x^2$

$x = y^2$

$y = \sqrt{x}$

Donc $\forall\, y_+ \in \mathbb{R}, \exists\, x = \sqrt{y} \in D_f : y = g(x)$

La dernière expression trouvée ($\sqrt{y}$) a pour domaine de définition l'ensemble d'arrivée de la fonction ($\mathbb{R}_+$). Donc g est surjective.

$R)\ 4$

EXERCICE 70

La fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = x^2 + 10$ est :

a) Injective b) surjective c) ni injective ni surjective d) bijective

(Concours 2014-2015/Algèbre)

Résolution

$f(x) = x^2 + 10$

- **Injection**

f est injective ssi $\forall\, x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$
$\Leftrightarrow {x_1}^2 + 10 = {x_2}^2 + 10$
$\Leftrightarrow {x_1}^2 = {x_2}^2$

$\Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{{x_2}^2}$

$\Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$
f n'est pas injective

- **Surjection**

f est surjective car $\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in D_f : y = f(x)$
$y = f(x)$
$y = x^2 + 10$
$x = y^2 + 10$
$y^2 = x - 10$
$y = \sqrt{x - 10}$
Le domaine de définition de cette fonction n'est pas égale à $\mathbb{R}$
f n'est pas surjective
Donc f n'est ni injective ni surjective.
$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 71

La fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = x^2 + 1$ est :

$a)$ Injective b) surjective c) ni injective ni surjective d) ABR

(Concours 2017-2018/Algèbre)

(Concours 2023-2024/Algèbre)

Résolution

$f(x) = x^2 + 1$

- **Injection**

f est injective ssi $\forall\, x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Leftrightarrow {x_1}^2 + 1 = {x_2}^2 + 1$

$\Leftrightarrow {x_1}^2 = {x_2}^2$

$\Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{{x_2}^2}$

$\Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$

f n'est pas injective

- **Surjection**

f est surjective si $\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in D_f : y = f(x)$

$y = f(x)$
$y = x^2 + 1$
$x = y^2 + 1$
$y^2 = x - 1$
$y = \sqrt{x - 1}$

Le domaine de définition de cette fonction n'est pas égale à $\mathbb{R}$

f n'est pas surjective

Donc f n'est ni injective ni surjective.

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 72

On considère les fonctions f et g d'une variable réelle définies dans $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 - 1,\ g(x) = 2x + 3$

La fonction f est : a) injective et surjective b) injective et non surjective c) ni injective ni surjective d) pas de bonne réponse

(Concours 2020-2021/Algèbre)

Résolution

$f(x) = x^2 - 1$

- **Injection**

f est injective ssi $\forall\, x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$
$\Leftrightarrow x_1{}^2 - 1 = x_2{}^2 - 1$
$\Leftrightarrow x_1{}^2 = x_2{}^2$

$\Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{x_2{}^2}$

$\Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$
f n'est pas injective

- **Surjection**

f est surjective si $\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in D_f : y = f(x)$

$y = f(x)$
$y = x^2 - 1$
$x = y^2 - 1$
$y^2 = x + 1$
$y = \sqrt{x + 1}$
Le domaine de définition de cette fonction n'est pas égale à $\mathbb{R}$
f n'est pas surjective
Donc f n'est ni injective ni surjective.

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 73

La fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = x^3$ est :

$a)$ Injective b. surjective c.ni injective ni surjective d. bijective

(Concours 2011-2012/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Algèbre)

Résolution

$f(x) = x^3$

- **Injection**

f est injective ssi $\forall\, x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$
$\Leftrightarrow x_1{}^3 = x_2{}^3$

$\Leftrightarrow x_1 = \sqrt[3]{x_2{}^3}$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$
f est injective

- **Surjection**

f est surjective car $\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in D_f : y = f(x)$
$y = f(x)$
$y = x^3$
$x = y^3$
$y^3 = x$
$y = \sqrt[3]{x}$
Le domaine de définition de cette fonction égale à $\mathbb{R}$

f est surjective

Donc f est bijective

$\boldsymbol{R)\ d}$

EXERCICE 74

On considère la fonctions f d'une variable réelle définie par : $f(x) = -3x - 4$

La fonction f est :

$a)$ Injective et non surjective b) non injective et surjective c) bijective d) pas de bonne réponse

(Concours 2021-2022/Algèbre)

Résolution

$f(x) = -3x - 4$

- f est injective ssi $\forall\, x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$

$-3x_1 - 4 = -3x_2 - 4$

$\Leftrightarrow -3x_1 = -3x_2 - 4 + 4$

$\Leftrightarrow -3x_1 = -3x_2$

$\Leftrightarrow -x_1 = -\frac{3x_2}{3}$

$\Leftrightarrow -x_1 = -x_2$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$

Donc f est injective

- f est surjective car $\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in D_f : y = f(x)$

  $y = f(x)$

$y = -3x - 4$

$-3x - 4 = y$

$-3y - 4 = x$

$-3y = x + 4$

$-y = \frac{x+4}{3}$

$y = -\frac{x+4}{3}$

Le domaine de définition de cette fonction égale à $\mathbb{R}$

D'où f est surjective

Donc f est bijective

R) c

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE42

La fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = x^2 + 5$ est :

a) Injective b) surjective c) ni injective ni surjective d) bijective

EXERCICE AE43

La fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{x^3+1}{\sqrt{x}}$ est :

a) Injective b) surjective c) ni injective ni surjective d) bijective

EXERCICE AE44

La fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \sqrt{2x + 5}$ est :

a) Injective b) surjective c) ni injective ni surjective d) bijective

EXERCICE AE45

La fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = 5$ est :

a) Injective b) surjective c) ni injective ni surjective d) bijective

EXERCICE AE46

La fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{1}{x-2}$ est :

a) Injective b) surjective c) ni injective ni surjective d) bijective

EXERCICE AE47

La fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{x^2-5x+2}{2x-8}$ est :

a) Injective b) surjective c) ni injective ni surjective d) bijective

EXERCICE AE48

La fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ est :

a) Injective b) surjective c) ni injective ni surjective d) bijective

EXERCICE AE49

La fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \ln(x - 2)$ est :

a) Injective b) surjective c) ni injective ni surjective d) bijective

II.4. Composition des fonctions

Soient f et g deux fonctions réelles à une variable réelle.

$(fog)(x) = f[g(x)]$ C'est-à-dire on remplace dans f la variable par la valeur de la fonction g

$(gof)(x) = g[f(x)]$ C'est-à-dire on remplace dans g la variable par la valeur de la fonction f

Exemple:

Soient $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x - 1$

$(fog)(x) = f[g(x)]$

$= 2[g(x)] + 1$

$= 2(x - 1) + 1$

$= 2x - 2 + 1$

$(fog)(x) = 2x - 1$

$(gof)(x) = g[f(x)]$

$= [f(x)] - 1$

$= 2x + 1 - 1$

$(gof)(x) = 2x$

EXERCICE 75

Soient les fonctions réelles d'une variable réelle $f(x) = 2x + 1$

$et\ g(x) = x^2 + 1$.

Le couple (r, s) avec r=$(fog)(1)$ $et\ s = (gof)(1)$ est donné par :

$a)\ (5, -5)$ $b)\ (5, -10)$ $c)\ (10,5)$ $d)\ (-5,10)$ $e)\ ABR$

(Concours 2017-2018/Algèbre)

Résolution

$f(x) = 2x + 1$

$g(x) = x^2 + 1$

$(fog)(x) = f[g(x)]$

$= 2[g(x)] + 1$

$= 2(x^2 + 1) + 1$

$= 2x^2 + 2 + 1$

$(fog)(x) = 2x^2 + 3$

r=$(fog)(1) = 2(1)^2 + 3 = 5$

$(gof)(x) = g[f(x)]$

$= [f(x)]^2 + 1$

=$(2x + 1)^2 + 1$

$= 4x^2 + 4x + 1 + 1$

$(gof)(x) = 4x^2 + 4x + 2$

$s = (gof)(1) = 4(1)^2 + 4(1) + 2 = 10$

$(r, s) = (5, 10)$

R) e

EXERCICE 76

Considérons les fonctions réelles d'une variable réelle $f(x) = 2x + 1$

$et\ g(x) = x^2 - 1$.

Les quantités $(fog)(-5)\ \ et\ (gof)(-5)$ sont données par :

$a)\ 49\ et - 80 \quad b)\ 50\ \ et\ 80 \quad c)\ 49\ et\ 100 \quad d) - 49\ et - 80 \quad e)\ ABR$

(Concours 2018-2019/Algèbre)

Résolution

$f(x) = 2x + 1$

$g(x) = x^2 - 1$

$(fog)(x) = f[g(x)]$

$= 2[g(x)] + 1$

$= 2(x^2 - 1) + 1$

$= 2x^2 - 2 + 1$

$(fog)(x) = 2x^2 - 1$

$(gof)(x) = g[f(x)]$

$= [f(x)]^2 - 1$

$=(2x+1)^2-1$

$=4x^2+4x+1-1$

$(gof)(x)=4x^2+4x$

$(fog)(-5)=2.(-5)^2-1=49$

$(gof)(-5)=4.(-5)^2+4.(-5)=80$

$\boldsymbol{R})\ \boldsymbol{e}$

EXERCICE 77

On considère les fonctions f et g d'une variable réelle définies dans $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^2-1, g(x)=2x+3$.

1. Les fonctions $(f\circ g)(x)$ *et* $(g\ \circ f)(x)$ sont données respectivement par :

$a)\ x^2+12x-8\ \ et\ 2x^2+1$ $\quad b)\ x^2+x+8\ et\ 2x^2+5$ $\quad c)-x^2+12x+8\ \ et\ x^2-1$

$d)\ x^2+12x+8\ \ et\ 2x^2-1$ $\quad e)\ pas\ de\ bonne\ réponse$

2. Les valeurs de $(f\circ g)(-1)$ *et* $(g\ \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right)$ sont données respectivement par :

$a)\ 1\ et-3\ \ b)\ 0\ et-\frac{1}{2}\quad c)\ \frac{1}{2}\ \ et\ 1\ \ d)\ 0\ et\ \frac{1}{2}\quad e)\ pas\ de\ bonne\ réponse$

(Concours 2020-2021/Algèbre)

Résolution

1. $f(x)=x^2-1, g(x)=2x+3$

$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$

$=(2x+3)^2-1$

$=4x^2+2\times 2x\times 3+9-1$

$=4x^2+12x+9-1$

$(f\circ g)(x)=4x^2+12x+8$

$(g\ \circ f)(x)=g[f(x)]$

$=2(x^2-1)+3$

$=2x^2-2+3$

$(g\ \circ f)(x)=2x^2+1$

$\boldsymbol{R})\ \boldsymbol{e}$

$2. (f \circ g)(x) = 4x^2 + 12x + 8$

$(f \circ g)(-1) = 4(-1)^2 + 12(-1) + 8$

$= 4 \times 1 - 12 + 8$

$(f \circ g)(-1) = 0$

$(g \circ f)(x) = 2x^2 + 1$

$(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1$

$= 2 \times \frac{1}{4} + 1$

$= \frac{1}{2} + 1$

$= \frac{1+2}{2}$

$(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

$\boldsymbol{R)\ e}$

EXERCICE 78

On considère les fonctions f et g d'une variable réelle définies par :

$f(x) = -3x - 4,\ g(x) = -2x^2 + 5$

1. Les fonctions composées $(f\ o\ g)(x)$ et $(g\ o\ f)(x)$ sont données respectivement par :

$a)\ x^2 + 19\ \ et - 18x^2 - 48x - 27 \quad b) - x^2 + 19\ \ et - 18x^2 - 48x - 27 \quad c)\ x^2 + 19\ et - 18x^2 - 48x + 27\ \ d)\ 6x^2 + 19\ \ et - 18x^2 - 48x - 27 \quad e)\ 6x^2 - 19\ et - 18x^2 - 48x - 27$

2. Les quantités $(f\ o\ g)(-1)$ et $(g\ o\ f)\left(-\frac{1}{2}\right)$ valent respectivement :

$a) - 12\ et - \frac{5}{2} \quad b)\ 12\ et - \frac{5}{2} \quad c) - 13\ et\ - \frac{5}{2} \quad d) - 13\ et\ \frac{5}{2} \quad e) - 13\ et\ - \frac{15}{2}$

(Concours 2021-2022/Algèbre)

Résolution

$f(x) = -3x - 4,\ g(x) = -2x^2 + 5$

1.

$(f\ o\ g)(x) = f[g(x)]$

$= -3(-2x^2 + 5) - 4$

$= 6x^2 - 15 - 4$

$(f\ o\ g)(x) = 6x^2 - 19$

$(g\ o\ f)(x) = g[f(x)]$

$= -2(-3x - 4)^2 + 5$

$= -2[(-3x)^2 - 2(-3x)(4) + 4^2] + 5$

$= -2(9x^2 + 24x + 16) + 5$

$= -18x^2 - 48x - 32 + 5$

$(g\ o\ f)(x) = -18x^2 - 48x - 27$

R) e

2.

$(f\ o\ g)(x) = 6x^2 - 19$

$(f\ o\ g)(-1) = 6(-1)^2 - 19$

$= 6(1) - 19$

$= 6 - 19$

$(f\ o\ g)(-1) = -13$

$(g\ o\ f)(x) = -18x^2 - 48x - 27$

$(g\ o\ f)\left(-\frac{1}{2}\right) = -18\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 48\left(-\frac{1}{2}\right) - 27$

$= -18\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{48}{2} - 27$

$= -\frac{18}{4} + 24 - 27$

$= -\frac{9}{2} + 24 - 27$

$= \frac{-9+48-54}{2}$

$= \frac{-15}{2}$

R) e

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE50

Soit f, g et h trois fonctions définies dans $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 - 3$ $\quad$ $g(x) = 2x - 5$ $\quad$ $h(x) = \frac{-3x+4}{2}$. Déterminer :

$a)$ $(f\ o\ g)(x)$ $\quad$ $b)$ $(f\ o\ h)(x)$ $\quad$ $c)$ $(\ g\ o\ h)(x)$ $\quad$ $d)$ $(f\ o\ h\ o\ g)(x)$

EXERCICE AE51

Soit f, g et h trois fonctions définies dans $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{2x-3}{5}$ $\quad$ $g(x) = 2x^2 + 4$ $\quad$ $h(x) = 1 - 5x + 4x^2$. Déterminer

$a)$ $(f\ o\ h\ o\ g)(-2)$ $\quad$ $b)$ $(f\ o\ g)(1) - (g\ o\ f)(1)$ $\quad$ $c)$ $(f\ o\ f)\ (x)$

EXERCICE AE52

Soit les fonctions f, g, h, i et m définies par :

$f(x) = x^2 - 1$ $\quad$ $g(x) = \sqrt{x-1}$ $\quad$ $h(x) = \frac{2x}{x+1}$

$m(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ $\quad$ $i(x) = \frac{6}{\sqrt{x}(x+4)}$

$a)$ Déterminer $(g\ o\ h)(x)$ $\quad$ $(f\ o\ g)(x)$ $\quad$ et $(i\ o\ m)(x)$

$b)$ Calculer $(\ go\ h)(3)$ $\quad$ $(i\ o\ m)(3)$ $\quad$ et $(h\ o\ f)(4)$

EXERCICE AE53

Soient les fonctions réelles d'une variable réelle $f(x) = 4x + 2$

et $g(x) = 2x^2 + 2$.

Le couple (r, s) avec r=$(fog)(-3)$ $\quad et\ s = (gof)(-1)$ est donné par :

$a)$ $(82{,}10)$ $\quad$ $b)$ $(-62, -54)$ $\quad$ $c)$ $(-82{,}10)$ $\quad$ $d)$ $(82{,}74)$ $e)$ ABR

II.5. Réciproque d'une fonction

Soit $f(x) = y$, pour trouver la reciproqque de f notée f^{-1}, on procède comme suit :

- Remplacer x par y et y par x dans $f(x) = y$
- Expliciter y à partir de l'équation obtenue

Exemple :

Trouver la réciproque des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 2x - 4$ 2) $f(x) = x^2 - 4$

Solution

1) $f(x) = 2x - 4$
Soit $f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 4 = y$
Remplaçons x par y et y par x :
$2y - 4 = x$
Explicitons y
$2y - 4 = x$
$\Leftrightarrow 2y = x + 4$
$\Leftrightarrow y = \frac{x+4}{2}$
$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$

2) $f(x) = x^2 - 4$

Soit $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 4 = y$

Remplaçons x par y et vice-versa :

$y^2 - 4 = x$

Explicitons y : $y^2 - 4 = x \Leftrightarrow y^2 = x + 4$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{x + 4}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 4}$

EXERCICE 79

Soit la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = 2x^2 - 3$

La quantité $f^{-1}(-2)$ est égale à :

$a)\ -\frac{1}{2}$ $b)\ -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $c)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$ $d)\ \frac{1}{2}$ $e)$ *pas de bonne réponse*

(Concours 2022-2023/Algèbre)

Résolution

$f(x) = 2x^2 - 3$

Soit $f(x) = y \iff 2x^2 - 3 = y$

Remplaçons x par y et vice-versa :

$2y^2 - 3 = x$

Explicitons y

$2y^2 - 3 = x \iff 2y^2 = x + 3$

$\iff y^2 = \frac{x+3}{2}$

$\iff y = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$

$f^{-1}(-2) = \sqrt{\frac{-2+3}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}}$

$= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}}$

$f^{-1}(-2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$R)\ c$

EXERCICE 80

Soit $f(x) = 2x + 1.$

La quantité q= $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ où f^{-1} est la réciproque de f est donnée par :

$a) -1$ $b)\ \frac{-1}{2}$ $c)\ \frac{1}{2}$ $d)\ \frac{-1}{4}$ $e) ABR$

(Concours 2017-2018/Algèbre)

Résolution

$f(x) = 2x + 1$

Soit $f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 1 = y$

Remplaçons x par y et y par x :

$2y + 1 = x$

Explicitons y

$2y + 1 = x$

$\Leftrightarrow 2y = x - 1$

$\Leftrightarrow y = \frac{x-1}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

q= $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\frac{1}{2}-1}{2}$

$= \frac{\frac{1-2}{2}}{2}$

$= \frac{-1/2}{2}$

q $= \frac{-1}{4}$

$\boldsymbol{R) \ d}$

EXERCICE 81

La réciproque de la fonction $f(x) = 2x + 1$ est donnée par :

$a)\ \frac{x+1}{2}$ $\quad b)\ \frac{x^2-1}{2}$ $\quad c)\ \frac{x-2}{2}$ $\quad d)\ \frac{2x-1}{2}$ $\quad e) ABR$

(Concours 2018-2019/Algèbre)

Résolution

$f(x) = 2x + 1$

Soit $f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 1 = y$

Remplaçons x par y et y par x :

$2y + 1 = x$

Explicitons y

$2y + 1 = x$

$\Leftrightarrow 2y = x - 1$

$\Leftrightarrow y = \frac{x-1}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

$\boldsymbol{R) \ e}$

EXERCICE 82

On considère les fonctions f et g d'une variable réelle définies dans $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 - 1, g(x) = 2x + 3$.

1. La valeur de $g^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)$ *est* :

$a)\ -\frac{9}{4}\quad b)\ -\frac{4}{9}\quad c)\ -15\quad d)\ \frac{9}{4}\quad e)\ pas\ de\ bonne\ réponse$

2. Le domaine de définition de $f^{-1}(x)$ est :

$a)\ [0\ ;\ +\infty[\quad b)\ [-1\ ;\ +\infty[\ \cup\ ]-\infty\ ;0[\quad c)\ \mathbb{R}_+\quad d)\ [-1;\ +\infty[\ \cap$
$]-\infty\ ;0[\quad e) pas\ de\ bonne\ réponse$

(Concours 2020-2021)

Résolution

$1.\, g(x) = 2x + 3$

$2x + 3 = y$

Remplaçons x par y, vice versa

$2y + 3 = x$

$2y = x - 3$

$y = \frac{x-3}{2}$

$g^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

$g^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-\frac{3}{2}-3}{2}$

$= \frac{\frac{-3-6}{2}}{2}$

$= \frac{\frac{-9}{2}}{2}$

$= \frac{-9}{2} \times \frac{1}{2}$

$g^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$

R) a

$2.\, f(x) = x^2 - 1$

$x^2 - 1 = y$

$y^2 - 1 = x$

$y^2 = x + 1$

$y = \sqrt{x+1}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$

$Dom\ f^{-1} = \{ x\ \in\ \mathbb{R}\ /\ x + 1 \geq 0\}$

$x + 1 \geq 0$

$x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

$Dom\ f^{-1} = [-1\ ;\ +\infty[$

$\boldsymbol{R)\ e}$

EXERCICE 83

On considère la fonctions f d'une variable réelle définie par : $f(x) = -3x - 4$

La valeur de $f^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$ est :

$a)\ -\frac{9}{11}$ $b)\ \frac{9}{11}$ $c)\ -\frac{15}{11}$ $d)\ -\frac{10}{9}$ $e)\ \frac{10}{9}$

(Concours 2021-2022/Algèbre)

Résolution

$f(x) = -3x - 4$

$-3x - 4 = y$

Remplaçons x par y et y par x

$-3y - 4 = x$

Explicitons par rapport à y

$-3y = x + 4$

$-y = \frac{x+4}{3}$

$y = -\frac{x+4}{3}$

$f^{-1}(x) = -\ \frac{x+4}{3}$

$$f^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{-\frac{2}{3}+4}{3}$$

$$= -\frac{\frac{-2+12}{3}}{3}$$

$$= -\frac{\frac{10}{3}}{3}$$

$$= -\frac{10}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$f^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{9}$$

$\boldsymbol{R)\ d}$

EXERCICE 84

On considère la fonction g d'une variable réelle définie par : $g(x) = -2x^2 + 5$

Le domaine de définition de $g^{-1}(x)$ est :

$a)\ ]-\infty\,;5] \cup [5\,;\,+\infty[\quad b)]-\infty\,;-5] \cup [5\,;\,+\infty[\quad c)\ [5\,;\,+\infty[\quad d)\ ]-\infty\,;5]\quad e)$ *pas de bonne réponse*

(Concours 2021-2022/Algèbre)

Résolution

$g(x) = -2x^2 + 5$

$-2x^2 + 5 = y$

Remplaçons x par y et y par x

$-2y^2 + 5 = x$

$-2y^2 = x - 5$

$-y^2 = \frac{x-5}{2}$

$-y = \sqrt{\frac{x-5}{2}}$

$y = -\sqrt{\frac{x-5}{2}}$

$dom\ (g^{-1}) = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-5}{2} \geq 0\right\}$

$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$x-5$		$-$	0	$+$	
2		$+$		$+$	
$\frac{x-5}{2}$		$-$	0	$+$	

$dom\ (g^{-1}) = [5\ ;\ +\infty[$

R) c

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE54

On donne $f(x) = \frac{-3-3x}{2x+4}$, que vaut $[f^{-1}(3)]^2$

$a)\ -\frac{5}{3}$ $\quad b)\ 49$ $\quad c)\ 23$ $\quad d)\ \frac{25}{9}$ $\quad e) ABR$

EXERCICE AE55

On donne $f(x) = \frac{5-2x}{4+3x}$, que vaut $[f^{-1}(-2)]^2$

$a)\ \frac{169}{16}$ $\quad b)\ \frac{16}{100}$ $\quad c)\ \frac{13}{4}$ $\quad d)\ \frac{-13}{4}$ $\quad e) ABR$

EXERCICE AE56

Trouver la réciproque de chacune des fonctions suivantes :

$a)\ f(x) = 2x + 3$

$b)\ f(x) = \frac{2x-1}{3}$

$c)\ f(x) = \frac{4}{x^3-2}$

$d)\ f(x) = \sqrt{1-2x}$

$e)\ f(x) = \frac{7x-14}{4x+12}$

$f)\ f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{x+4}}$

EXERCICE AE57

Trouver la réciproque de chacune des fonctions suivantes :

$a)\ f(x) = \sqrt{x^3 - 4}$

$b)\ f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2+2}}$

$c)\ f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+3}}$

$d)\ f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+2}$

EXERCICE AE58

On considère la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = 4x + 3$. La quantité $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ vaut :

$a)\ {}^{-5}/_{8}$ $\quad b)\ {}^{5}/_{8}$ $\quad c)\ {}^{-10}/_{16}$ $\quad d)\ {}^{1}/_{2}$ $\quad e) \frac{x-3}{4}$

III. LIMITES

III. 1 Introduction

D'une manière générale, pour calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, on calcule $f(a)$, c'est-à-dire on remplace partout il y a la variable x par le réel a.

Exemples :

1) $\lim\limits_{x \to 2} 2x + 5$

$\lim\limits_{x \to 2} 2x + 5 = 2 \times 2 + 5 = 9$

2) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2+2x-8}{\sqrt{x^2+9}}$

$\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2+2x-8}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{4^2+2\times4-8}{\sqrt{4^2+9}} = \frac{16}{5}$

Mais, il arrive de fois qu'en remplaçant la variable par le réel a, on trouve ceci :

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$, ces formes ne sont pas de vraies valeurs, elles sont appelées formes indéterminées. Dans ce cas, il faut lever l'indétermination pour trouver la vraie valeur.

III.2 Cas d'indétermination $\frac{0}{0}$

1er cas : Fractions rationnelles

Si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, pour lever l'indétermination, décomposer $f(x)$ *et* $g(x)$ tout en sachant que les deux fonctions ont un facteur commun $x - a$.

Pour la décomposition, nous pouvons utiliser la division euclidienne ou la méthode d'Horner.

Exemple :

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

Résolution

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \frac{2^2-2-2}{2^2-3\times2+2} = \frac{0}{0}$ $(F.I.)$

Levons l'indétermination

Dans ce cas, les deux fonctions ont un facteur commun : $x - 2$

Utilisons la division euclidienne par $x-2$

d'effectuer la division euclidienne par $x-2$

$$\begin{array}{r|l} x^2-x-2 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2+2x & x+1 \\ \hline x-2 & \\ -x+2 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^2-3x+2 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2+2x & x\text{-}1 \\ \hline -x+2 & \\ x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ et $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)}{(x-1)}$$

$$=\frac{2+1}{2-1}=3$$

2e cas : Fractions irrationnelles

Dans ce cas, on multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par l'(les) expression(s) conjuguée(s) du(des) terme(s) contenant les radicaux.

Exemple :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

Résolution

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{\sqrt{3+1}-2}{3-3}=\frac{0}{0}$$

Levons l'indétermination.

Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué du numérateur (car c'est la seule expression qui contient le radical)

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+1+2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3+1}+2}$$

$$= {}^{1}/_{4}$$

Dans le cas de l'indétermination $\frac{0}{0}$, nous pouvons aussi utiliser la règle de l'Hospital pour lever l'indétermination. Cette règle stipule que pour lever l'indétermination, il suffit de dériver le numérateur et le dénominateur (Les dérivées sont traitées au point VII, nous vous recommandons d'étudier d'abord les dérivées pour continuer cette section).

Reprenons les deux exemples ci-haut :

1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

Résolution

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \frac{2^2-2-2}{2^2-3\times 2+2} = \frac{0}{0} \ (F.I.)$$

Pour lever l'indétermination, dérivons le numérateur et le dénominateur :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)'}{(x^2-3x+2)'}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x^2)'-(x)'-(2)'}{(x^2)'-(3x)'+(2)'}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2x-1-0}{2x-3+0}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{2x-3}$$

$$= \frac{2(2)-1}{2(2)-3}$$

$$= \frac{4-1}{4-3}$$

$$= \frac{3}{1}$$

$$= 3$$

2) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{\sqrt{3+1}-2}{3-3} = \frac{0}{0}$$

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)'}{(x-3)'}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)'-(2)'}{(x)'-(3)'}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}}-0}{1-0}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3+1}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$=\frac{1}{2\times 2}$$

$$={}^{1}/_{4}$$

III.3 Cas d'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$

La limite d'un polynôme lorsque x tend vers l'infini est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

1er cas : Fractions rationnelles

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^n}{bx^p}$: trois cas sont possibles

$$si\ n=p\ alors\ \lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{bx^p}={}^{a}/_{b}$$

$$si\ n<p\quad alors\ \lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{bx^p}=0$$

$$Si\ p<n\ alors\ \lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{bx^p}=\infty$$

Exemples :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5x^2-5}{5-x+3x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{3x^3}={}^{2}/_{3}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5x^2-5}{5-x+3x^3+8x^5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{3x^3}=0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2-5}{5-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{3x^3}=+\infty$

2e cas : Fractions irrationnelles :

A retenir que $\sqrt{x^2} = |x|$
$$= \begin{cases} x \; si \; x \to +\infty \\ -x \;\; si \;\; x \to -\infty \end{cases}$$

Exemple :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+x+2}}{2x+\sqrt{16x^2+x+1}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{2x+\sqrt{16x^2\left(1+\frac{1}{16x}+\frac{1}{16x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x-\sqrt{x^2}}{2x+\sqrt{16x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x-|x|}{2x+|4x\,|}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x-(-x)}{2x-4x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-2x}$$

$$= -1$$

La règle de l'Hospital s'applique aussi dans ce cas d'indétermination.

III.4 Cas d'indétermination $\infty - \infty$

Pour lever cette indétermination, on multiplie et on divise l'expression donnée par son conjugué. Et cela nous ramènera dans le cas de la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple :

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x - 2})$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x - 2}) = \infty - \infty \; (F.I.)$$

Levons l'indétermination en multipliant et en divisant $(x - \sqrt{x^2 + 2x - 2})$ par son conjugué $(x + \sqrt{x^2 + 2x - 2})$.

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x - 2}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2+2x-2})(x+\sqrt{x^2+2x-2})}{(x+\sqrt{x^2+2x-2})}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2+x\sqrt{x^2+2x-2}-x\sqrt{x^2+2x-2}-(x^2+2x-2)}{(x+\sqrt{x^2+2x-2})}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-x^2-2x+2}{(x+\sqrt{x^2+2x-2})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x+2}{(x+\sqrt{x^2+2x-2})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x+|x|}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{2x}$$

$$= -1$$

Nota : Le cas d'indétermination $0.\infty$ se ramene aux cas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

EXERCICE 85

$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2} - \sqrt{1+2x-3x^2}\right)$ est égale à :

$a)\ \infty \quad b) \frac{1}{2} \quad c)\ \sqrt{3} \quad d) -\infty \quad e)\ Aucune\ assertion\ n'est\ correcte$

(Conours 2023-2024/Analyse)

Résolution

$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2} - \sqrt{1+2x-3x^2}\right) = \infty - \infty\ (F.I.)$

On multiplie et on divise l'expression donnée par son conjugué

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2} - \sqrt{1+2x-3x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}-\sqrt{1+2x-3x^2}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}+\sqrt{1+2x-3x^2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}+\sqrt{1+2x-3x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^2-\left(\sqrt{1+2x-3x^2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+2\sqrt{1+2x-3x^2}}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-1}{4}-(1+2x-3x^2)}{\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+2\sqrt{1+2x-3x^2}}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-1-4(1+2x-3x^2)}{4}}{\left(\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-3\right)}}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-1-4-8x+12x^2}{4}}{\frac{|x|+2|x|}{2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{13x^2}{4}}{\frac{3|x|}{2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{13x^2}{4} \times \frac{2}{3|x|}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{13x^2}{6|x|}$$

$$= \infty$$

R) a

EXERCICE 86

Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$.

Soit $g(x) = ax + b$ l'asymptote oblique de la fonction $f(x)$. La limite de $g(x)$ quand x tend vers -1 vaut :

$a)2 \quad b)\ y = -2 \quad c)\ y = 1 \quad d)\ y = -1 \quad e)\ Aucune\ assertion\ n'est\ correcte$

(Concours 2023-2024/Analyse)

Résolution

Nous devons d'abord trouver l'asymptote oblique (voir chapitre suivant)

Comme le degré du numérateur est d'une unité supérieure à celui du dénominateur, il suffit de diviser le numérateur par le dénominateur pour trouver l'équation de l'asymptote oblique :

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x + 1 & x \\ \cline{2-2} -x^2 & x + 2 \\ \hline 2x + 1 & \\ -2x & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$g(x) = x + 2$

$$\lim_{x \to -1} (x + 2) = -1 + 2$$

$$= 1$$

R) c

EXERCICE 87

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+1}{x}\right) =$$

$a)\ 2 \qquad b)\ \frac{\infty+1}{\infty} \qquad c) +\infty \qquad d)(\infty + 1) \qquad e)\ aucune\ bonne\ réponse$

(Concours 2021-2022/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{x}\right)$$

$$= 2$$

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 88

Soit la fonction numérique $f(x) = \left(\frac{1-\cos x}{x}\right)$; $\lim_{x \to 0} f(x)\ vaut$:

$a)\ 0 \qquad b)\ 1 \qquad c) +\infty \qquad d) -\infty \qquad e)\ aucune\ bonne\ réponse$

(Concours 2021-2022/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = \frac{1-\cos 0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \quad (F.I.)$$

Utilisons la règle de l'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{0-(-\sin x)}{1} \qquad car\ (\cos x)' = -\sin x$$

$$= \lim_{x \to 0} \sin x$$

$$= \sin 0$$

$$= 0$$

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 89

Calculez :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{9991x^{25}-4000x^{28}}{58x^{25}+100x^{28}}$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{9991x^{25}-4000x^{28}}{58x^{25}+100x^{28}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4000x^{28}}{100x^{28}}$$

$$=\frac{-4000}{100}$$

$$=-40$$

EXERCICE 90

Calculez et simplifiez

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-4-\sqrt{x^2+75x+7857}\right)$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-4-\sqrt{x^2+75x+7857}\right)=\infty-\infty\ (F.I.)$$

Multiplions et divisons $\left(x-4-\sqrt{x^2+75x+7857}\right)$ par son conjugué

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-4-\sqrt{x^2+75x+7857}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-4-\sqrt{x^2+75x+7857}\right)\left(x-4+\sqrt{x^2+75x+7857}\right)}{\left(x-4+\sqrt{x^2+75x+7857}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-8x+16-\left(\sqrt{x^2+75x+7857}\right)^2\right)}{\left(x-4+\sqrt{x^2+75x+7857}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-8x+16-x^2-75x-7857\right)}{\left(x-4+\sqrt{x^2+75x+7857}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-83x-7841}{\left(x-4+\sqrt{x^2+75x+7857}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-83x}{\left(x+\sqrt{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-83x}{x+|x|}$$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-83x}{2x}$

$= \frac{-83}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} \left(x - 4 - \sqrt{x^2 + 75x + 7857}\right) = \frac{-83}{2}$

EXERCICE 91

On considère la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$.

La $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ *est égale* à:

$a)\ \frac{1}{4}$ $\quad b) \frac{-1}{4}$ $\quad c)\ 0$ $\quad d) + \infty$ $\quad e) - \infty$

(Concours 2018-2019/Analyse)

Résolution

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$

Trouvons d'abord $f'(x)$ (N'hésitez pas à voir la partie qui traite les dérivées)

$f'(x) = \frac{(x)'\sqrt{x+2} - x\,(\sqrt{x+2})'}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2}$

$= \frac{\sqrt{x+2} - x.\frac{(x+2)'}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$

$= \frac{\sqrt{x+2} - \frac{x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$

$= \frac{\frac{2(\sqrt{x+2})^2 - x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$

$= \frac{\frac{2(x+2) - x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$

$= \frac{\frac{2x+4-x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$

$= \frac{x+4}{2\sqrt{x+2}(x+2)}$

$f'(x) = \frac{x+4}{2x+4\sqrt{x+2}}$

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{2x+4\sqrt{x+2}}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x}$

$= {}^{1}/_{2}$

$\boldsymbol{R)\ f}$

EXERCICE 92

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x+x^3+x^4}{x}$ est égale à :

$a)\ 1 \quad b) +\infty \quad c)0 \quad d)3 \quad e) -\infty \quad f)2$

(Concours 2018-2019/Analyse)

Résolution

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x+x^3+x^4}{x} = \frac{2.0+0^3+0^4}{0} = \frac{0}{0}\ (F.I)$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x+x^3+x^4}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x(2+x^2+x^3)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} 2 + x^2 + x^3$

$= 2 + 0^2 + 0^3$

=2

$\boldsymbol{R)\ f}$

EXERCICE 93

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+2x+1}{x} =$

$a) -\infty \quad b)1 \quad c)0 \quad d) +\infty \quad e)\frac{\infty}{\infty} \quad f)1.000$

(Concours 2018-2019/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

(Concours 2022-2023/Analyse)

Résolution

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+2x+1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x}$

$= \infty$

$\boldsymbol{R)\ g}$

EXERCICE 94

Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

$a)3 \quad b)\ 0 \quad c)\ \frac{5}{4} \quad d)\frac{3}{2} \quad e)ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

Résolution

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{1^3-1}{1^2-1} = \frac{0}{0}(FI)$

Levons l'indétermination

$$\begin{array}{c|c} x^3-1 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+x+1 \\ \hline x^2-1 & \\ -x^2+x & \\ \hline x-1 & \\ -x+1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} x^2-1 & x-1 \\ \hline -x^2+x & x+1 \\ \hline x-1 & \\ -x+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$x^2-1=(x-1)(x+1)$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^2+x+1)}{(x+1)}$

$= \frac{1^2+1+1}{1+1}$

$= {}^{3}/_{2}$

Autre méthode : La règle de l'Hospital

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^3-1)'}{(x^2-1)'}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^3)'-(1)'}{(x^2)'-(1)'}$

$$= \lim_{x\to1} \frac{3x^2}{2x}$$

$$= \frac{3(1)^2}{2(1)}$$

$$= {}^{3}/_{2}$$

$\boldsymbol{R)\ d}$

EXERCICE 95

Déterminer $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$a)\ 1$ $\quad b)\ 0$ $\quad c)\ \frac{1}{2}$ $\quad d)\ \frac{1}{4}$ $\quad e) ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{1}-1}{1-1} = \frac{0}{0}(F.I.)$$

Levons l'indétermination en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du numérateur car c'est le terme qui a le signe radical

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{x+\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}+1}$$

$$= {}^{1}/_{2}$$

$\boldsymbol{R)\ c}$

Autre méthode : Utilisons la règle de l'Hospital

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(\sqrt{x}-1)'}{(x-1)'}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(\sqrt{x})'-(1)'}{(x)'-(1)'}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-0}{1-0}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1}}$$

$$= \frac{1}{2\times 1}$$

$$= {}^{1}/_{2}$$

EXERCICE 96

Calculez :

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{4521x^{150}-5000x^{152}}{9758x^{150}+100x^{152}}$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{4521x^{150}-5000x^{152}}{9758x^{150}+100x^{152}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-5000x^{152}}{100x^{152}}$$

$$= \frac{-5000}{100}$$

$$= -50$$

EXERCICE 97

Calculez et simplifiez

$$\lim_{x\to +\infty} \left(x - 9 - \sqrt{x^2 + 54x + 7859}\right)$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x\to +\infty} \left(x - 9 - \sqrt{x^2 + 54x + 7859}\right) = \infty - \infty \ (F.I.)$$

Multiplions et divisons $\left(x - 9 - \sqrt{x^2 + 54x + 7859}\right)$ par son conjugué

$$\lim_{x\to +\infty} \left(x - 9 - \sqrt{x^2 + 54x + 7859}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(x-9-\sqrt{x^2+54x+7859}\right)\left(x-9+\sqrt{x^2+54x+7859}\right)}{\left(x-9+\sqrt{x^2+54x+7859}\right)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(x^2-18x+81-\left(\sqrt{x^2+54x+7859}\right)^2\right)}{\left(x-9+\sqrt{x^2+54x+7859}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-18x+81-x^2-54x-7859)}{(x-9+\sqrt{x^2+54x+7859})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-72x-7778}{(x-9+\sqrt{x^2+54x+7859})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-72x}{(x+\sqrt{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-72x}{x+|x|}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-72x}{2x}$$

$$= \frac{-72}{2}$$

$$= -36$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - 9 - \sqrt{x^2 + 54x + 7859}\right) = -36$$

EXERCICE 98

Calculez

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{12547}+11x^{10520}-14000x^{10521}}{24x^{10520}-2000^{10521}+214x^{1021}}$$

(Concours 2012-2013/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{12547}+11x^{10520}-14000x^{10521}}{24x^{10520}-2000^{10521}+214x^{1021}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-14000x^{10521}}{-2000^{10521}+2}$$

$$= \frac{-14000}{-2000}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{12547}+11x^{10520}-14000x^{10521}}{24x^{10520}-2000^{10521}+214x^{1021}} = 7$$

EXERCICE 99

Calculez et simplifiez

$$\lim_{x\to+\infty} \left(7x - 10 - \sqrt{49x^2 - 126x + 7859}\right)$$

(Concours 2012-2013/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x\to+\infty} \left(7x - 10 - \sqrt{49x^2 - 126x + 7859}\right) = \infty - \infty \ (F.I.)$$

Multiplions et divisons $\left(7x - 10 - \sqrt{49x^2 - 126x + 7859}\right)$ par son conjugué

$$\lim_{x\to+\infty}\left(7x-10-\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(7x-10-\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)\left(7x-10+\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)}{\left(7x-10+\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(49x^2-140x+100-\left(\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)^2\right)}{\left(7x-10+\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(49x^2-140x+100-49x^2+126x-7859)}{\left(7x-10+\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-14x-7759}{\left(7x-10+\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-14x}{\left(7x+\sqrt{49x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-14x}{7x+|7x|}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-14x}{14x}$$

$$=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(7x-10-\sqrt{49x^2-126x+7859}\right)=\mathbf{-1}$$

EXERCICE 100

Déterminer $\lim_{x\to1}\frac{3x^5+11}{2x^4+3}$

$a)$ 3 $\quad b)\ 0 \quad c)\ \infty \quad d)\ \frac{3}{2} \quad e)ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^5+11}{2x^4+3}=\frac{3(1)^2+11}{2(1)^4+3}$$

$$=\frac{3+11}{2+3}$$

$$=\frac{14}{5}$$

$\boldsymbol{R)\ e.}$

EXERCICE 101

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3+x^2+2x}{x}$ est égale à :

$a)\ 2 \quad b)3 \quad c)0 \quad d) + \infty \quad e) - \infty$

(Concours 2018-2019/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

(Concours 2023-2024/Analyse)

Résolution

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3+x^2+2x}{x} = \frac{0^3+0^2+2.0}{0} = \frac{0}{0}\ (F.I)$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3+x^2+2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x^2+x+2)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} x^2 + x + 2$

$= 0^2 + 0 + 2$

$= 2$

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 102

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3+x^2+2x}{x}$ est égale à :

$a)\ 0 \quad b)3 \quad c)2 \quad d) + \infty \quad e) - 2$

(Concours 2020-2021/Analyse)

Résolution

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3+x^2+2x}{x} = \frac{0^3+0^2+2.0}{0} = \frac{0}{0}\ (F.I)$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3+x^2+2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x^2+x+2)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} x^2 + x + 2$

$= 0^2 + 0 + 2$

$= 2$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 103

Calculez :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{30001x^{21}-3000x^{23}}{569x^{21}+100x^{23}}$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{30001x^{21}-3000x^{23}}{569x^{21}+100x^{23}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3000x^{23}}{100x^{23}}$$

$$= \frac{-3000}{100}$$

$$= -30$$

EXERCICE 104

Calculez et simplifiez

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - 71 - \sqrt{x^2 + 83x + 7852}\right)$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - 71 - \sqrt{x^2 + 83x + 7852}\right) = \infty - \infty\ (F.I.)$$

Multiplions et divisons $\left(x - 71 - \sqrt{x^2 + 83x + 7852}\right)$ par son conjugué

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - 71 - \sqrt{x^2 + 83x + 7852}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x-71-\sqrt{x^2+83x+7852}\right)\left(x-71+\sqrt{x^2+83x+7852}\right)}{\left(x-71+\sqrt{x^2+83x+7852}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2-142x+5041-\left(\sqrt{x^2+83x+7852}\right)^2\right)}{\left(x-71+\sqrt{x^2+83x+7852}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2-142x+5041-x^2-83x-7852\right)}{\left(x-71+\sqrt{x^2+83x+7852}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-225x-2811}{\left(x-71+\sqrt{x^2+83x+7852}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-225x}{\left(x+\sqrt{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-225x}{x+|x|}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-225x}{2x}$$

$= \frac{-225}{2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-71-\sqrt{x^2+83x+7852}\right)=\frac{-225}{2}$$

EXERCICE 105

Calculez :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5281x^{20000}-6000x^{20002}}{9x^{20000}+100x^{20002}}$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5281x^{20000}-6000x^{20002}}{9x^{20000}+100x^{20002}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-6000x^{20002}}{100x^{20002}}$$

$$=\frac{-6000}{100}$$

=-60

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5281x^{20000}-6000x^{20002}}{9x^{20000}+100x^{20002}}=-60$$

EXERCICE 106

Calculez et simplifiez

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-35-\sqrt{x^2+85x+7871}\right)$$

(Concours 2013-2014/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-35-\sqrt{x^2+85x+7871}\right)=\infty-\infty\ (F.I.)$$

Multiplions et divisons $\left(x-35-\sqrt{x^2+85x+7871}\right)$ par son conjugué

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-35-\sqrt{x^2+85x+7871}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-35-\sqrt{x^2+85x+7871}\right)\left(x-35+\sqrt{x^2+85x+7871}\right)}{\left(x-35+\sqrt{x^2+85x+7871}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-70x+1225-\sqrt{x^2+85x+7871}^2\right)}{\left(x-35+\sqrt{x^2+85x+7871}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-70x+1225-x^2-85x-7871\right)}{\left(x-35+\sqrt{x^2+85x+7871}\right)}$$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-155x-6646}{(x-35+\sqrt{x^2+85x+7871})}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-155x}{(x+\sqrt{x^2})}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-155x}{x+|x|}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-155x}{2x}$

$= \frac{-155}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} \left(x - 35 - \sqrt{x^2 + 85x + 7871}\right) = \frac{-155}{2}$

EXERCICE 107

On considère la fonction réelle f de la variable réelle x définie par la formule

$f(x) = \frac{2-x^2}{2+x^2}$

Evaluez en vous justifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

(Concours 2009-2010/Analyse)

Résolution

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-x^2}{2+x^2}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2}$ car La limite d'un polynôme lorsque x tend vers l'infini est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

$= -1$

EXERCICE 108

Calculez :

$\lim_{x\to-\infty} \frac{2531x^{30}-7000x^{32}}{9x^{30}+800x^{32}}$

(Concours 2013-2014/Analyse)

Résolution

$\lim_{x\to-\infty} \frac{2531x^{30}-7000x^{32}}{9x^{30}+800x^{32}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-7000x^{32}}{800x^{32}}$

$= \frac{-7000}{800}$

$= -\frac{35}{4}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2531x^{30} - 7000x^{32}}{9x^{30} + 800x^{32}} = -\frac{35}{4}$

EXERCICE 109

Calculez et simplifiez

$\lim_{x \to +\infty} \left(x + 21 - \sqrt{x^2 + 35x + 7857}\right)$

(Concours 2013-2014/Analyse)

Résolution

$\lim_{x \to +\infty} \left(x + 21 - \sqrt{x^2 + 35x + 7857}\right) = \infty - \infty\ (F.I.)$

Multiplions et divisons $\left(x + 21 - \sqrt{x^2 + 35x + 7857}\right)$ par son conjugué

$\lim_{x \to +\infty} \left(x + 21 - \sqrt{x^2 + 35x + 7857}\right)$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x+21-\sqrt{x^2+35x+7857}\right)\left(x+21+\sqrt{x^2+35x+7857}\right)}{\left(x+21+\sqrt{x^2+35x+7857}\right)}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2+42x+441-(\sqrt{x^2+35x+7857}^2))}{\left(x+21+\sqrt{x^2+35x+7857}\right)}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2+42x+441-x^2-35x-7857)}{\left(x+21+\sqrt{x^2+35x+7857}\right)}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{7x-7416}{\left(x+21+\sqrt{x^2+35x+7857}\right)}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{7x}{\left(x+\sqrt{x^2}\right)}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{7x}{x+|x|}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{7x}{2x}$

$= \frac{7}{2}$

$\lim_{x \to +\infty} \left(x + 21 - \sqrt{x^2 + 35x + 7857}\right) = \frac{7}{2}$

EXERCICE 110

Evaluez et simplifiez

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+3-\sqrt{x^2+3x+800}\right)$$

(Concours 2009-2010/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+3-\sqrt{x^2+3x+800}\right)=\infty-\infty\ (F.I.)$$

Multiplions et divisons $\left(x+3-\sqrt{x^2+3x+800}\right)$ par son conjugué

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+3-\sqrt{x^2+3x+800}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+3-\sqrt{x^2+3x+800}\right)\left(x+3+\sqrt{x^2+3x+800}\right)}{\left(x+3+\sqrt{x^2+3x+800}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+6x+9-\left(\sqrt{x^2+3x+800}^{\,2}\right)\right)}{\left(x+3+\sqrt{x^2+3x+800}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+6x+9-x^2-3x-800\right)}{\left(x+3+\sqrt{x^2+3x+800}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-791}{\left(x+3+\sqrt{x^2+3x+800}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\left(x+\sqrt{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x+|x|}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x}$$

$$=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+3-\sqrt{x^2+3x+800}\right)=\frac{3}{2}$$

EXERCICE 111

$\lim_{x\to2}\frac{3x^3+5x^2-2x}{x^2+2}$ est égale à :

$a)-7\ \ b)-6\ \ c)7\qquad d)6\qquad e)aucune\ bonne\ réponse$

(Concours 2020-2021/Analyse)

Résolution

$$\lim_{x\to2}\frac{3x^3+5x^2-2x}{x^2+2}=\frac{3(2)^3+5(2)^2-2(2)}{(2)^2+2}$$

$$= \frac{3 \times 8+5\times 4-4}{4+2}$$

$$= \frac{24+20-4}{6}$$

$$= \frac{4}{6}$$

$$= 6,6666666666666$$

$$\cong 7$$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE59

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-2}{x^2-3x+10}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{2+x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}}{2x-4}$

EXERCICE AE60

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to {}^{1}/_{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2-2x-1}{x^2+3x-4}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+2x^2+x}{3x^2+2x}$

e) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{4x^3+11x^2-3x}{4x^2+11x-3}$

EXERCICE AE61

Calculer :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}}{1-x}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}{\sqrt{3x}-3}$

EXERCICE AE62

Calculer :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2^{20}-2x^{19}+10x^{20}}{3^{25}+2x+2x^{20}}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^{20}-2x^{19}+10x^{20}}{3^{25}+2x+2x^{25}}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2^{20}-2x^{19}+10x^{20}}{3^{25}+2x+2x^{2}}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1+x-x^2}{1-x^2+2x^6}$

EXERCICE AE63

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{16x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+1}-3x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4-5x^2+4}+\sqrt[3]{x^2+6}}{\sqrt[3]{x^5+x+3}}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{x^4-2x^2-3}}$

EXERCICE AE64

Calculer

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-4+\sqrt{x^2+2x+1})$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x-4-\sqrt{9x^2+5x+1})$

EXERCICE AE65

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{x-1}$

Que vaut $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

$a) -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad b)\ 2$ $\quad c)\ 1$ $\quad d)\ ABR$

EXERCICE AE66

La limite en +∞ de la fonction $f(x) = \frac{-2x^2+7x-4}{3-x}$ est :

$a)\ 0$ $\quad b)\ 2$ $\quad c) +\infty$ $\quad d) -\infty$

EXERCICE AE67

La limite en +∞ de la fonction $f(x) = \frac{(2x-3)(x^2+1)}{(1-x^2)^2}$ est :

$a)\ 0$ $\quad b) -2$ $\quad c) -\infty$ $\quad d) +\infty$

EXERCICE AE68

$\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3+1}{x+1}$ vaut :

$a)\ 1$ $\quad b)\ 3$ $\quad c) +\infty$ $\quad d) -\infty$ $\quad e) ABR$

EXERCICE AE69

Soit la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$.

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ vaut :

$a) +\infty \quad b) \sqrt{3} \quad c) \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad d) \frac{1}{\sqrt{3}}$

EXERCICE AE70

Soit la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{x-4}{x^2-6x+5}$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ vaut :

$a) -\infty \quad b) 1 \quad c) -3 \quad d) +\infty$

EXERCICE AE71

Soit la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x}{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) \quad vaut :$

$a) \; 0 \quad b) \; \frac{\sqrt{2}}{2} \quad c) \; 45° \quad c) \; 1 \quad d) -1 \quad e) \; \frac{0}{0}$

EXERCICE AE72

$\lim\limits_{x \to 1}(2x-2).\frac{4}{x-1}$ vaut :

$a) \; 0 \quad b) \; 8 \quad c) \; 4 \quad d) \; 1 \quad e) \; 0.\infty$

EXERCICE AE73

Calculer les limites suivantes :

$a) \; \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3-2x^2+3x}{x^2+3x^6+7x^8}$

$b) \; \lim\limits_{x \to +\infty} \log\left(\frac{2x+4}{8+2x}\right)$

IV.ASYMPTOTES

Il y a trois sortes d'asymptotes :

- ✓ Asymptote verticale
- ✓ Asymptote horizontale
- ✓ Asymptote oblique

IV.1 Asymptote verticale (A.V.)

La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale de la fonction f si et seulement si a est un adhérent de f et $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Si la fonction est rationnelle, pour trouver l'équation de l'asymptote verticale, il suffit d'égaler le dénominateur à 0 et résoudre l'équation formée et la (les) racine(s) trouvée(s) est (sont) l'(les) asymptote(s) verticale(s).

Exemple :

$f(x) = \frac{2x+3}{5x-10}$

$5x - 10 = 0$
$\Leftrightarrow 5x = 10$
$\Leftrightarrow x = 2$

La droite d'équation $x = 2$ est A.V. car $\lim_{x \to 2} \frac{2x+3}{5x-10} = \frac{2.2+3}{5.2-10}$

$$= \frac{7}{0}$$
$$= \infty$$

IV.2 Asymptote horizontale (A.H.)

La droite d'équation $y = b$ est A.H. à la courbe de la fonction f si et seulement si b=$\lim_{x \to \infty} f(x)$

Exemple :

$f(x) = \frac{3x^2+4x-2}{x^2+3}$

b=$\lim_{x \to \infty} f(x)$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+4x-2}{x^2+3}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{x^2}$

$b = 3$

La droite d'équation $y = 3$ est A.H.

IV.3 Asymptote oblique (A.O.)

La droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f ssi $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (mx + p)] = 0$

m et p sont donnés par :

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

$p = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - mx]$

Exemple :

$f(x) = \frac{2x^2+x-5}{x-1}$

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2+x-5}{x-1}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+x-5}{x(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+x-5}{x^2-x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2}$

$m = 2$

$p = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - mx]$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2+x-5}{x-1} - 2x\right]$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2+x-5-(x-1)2x}{x-1}\right]$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2+x-5-2x^2+2x}{x-1}\right]$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3x-5}{x-1}\right]$

$p = 3$

$y = 2x + 3$ est l'équation de l' A.O.

Nota :

Une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est supérieur de 1 au degré du dénominateur admet une A.O. dont l'équation est obtenue en effectuant la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

Exemple :

$f(x) = \frac{2x^2+x-5}{x-1}$

Le degré du numérateur est 2 et celui du dénominateur est 1.

Effectuons la division euclidienne du numérateur par le dénominateur pour trouver l'A.O.

$$
\begin{array}{c|c}
2x^2 + x - 5 & x - 1 \\
-2x^2 + 2x & \hline 2x + 3 \\
\hline
3x - 5 & \\
-3x + 3 & \\
\hline
-2 &
\end{array}
$$

$y = 2x + 3$ est l'équation de l'A.O.

EXERCICE 112

Soit la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$

L'équation de l'asymptote oblique à la courbe de la fonction $f(x)$ est :

$a)\ y = -\frac{1}{2}x + 3$ $b)\ y = x - 1$ $c)\ y = \frac{3}{2}x - 1$ $d)\ y = -\frac{3}{2}x + 1$ $e)\ y = \frac{1}{2}x$

(Concours 2023-2024/Algèbre)

Résolution

$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$

$\quad\ = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+3}{x}\right)$

$f(x) = \frac{x^2+3}{2x}$

Comme le degré du numérateur est d'une unité supérieure à celui du dénominateur, il suffit de diviser le numérateur par le dénominateur pour trouver l'équation de l'asymptote oblique :

$$
\begin{array}{c|c}
x^2 + 3 & 2x \\
-x^2 & \hline \frac{1}{2}x \\
\hline
3 &
\end{array}
$$

$y = \frac{1}{2}x$

R) e

EXERCICE 113

Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$. L'asymptote oblique de $f(x)$ est :

$a) y = x + 2 \quad b)\ y = x - 2 \quad c)\ y = -x + 2 \quad d)\ y = -x - 2 \quad e)\ y = 2x + 1$

(Concours 2023-2024/Analyse)

Résolution

Comme le degré du numérateur est d'une unité supérieure à celui du dénominateur, il suffit de diviser le numérateur par le dénominateur pour trouver l'équation de l'asymptote oblique :

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + 2x + 1 & x \\ \cline{2-2}
-x^2 \qquad\qquad & x + 2 \\ \cline{1-1}
2x + 1 & \\
-2x \quad & \\ \cline{1-1}
1 \quad &
\end{array}$$

$y = x + 2$

R) a

EXERCICE 114

Soit la fonction réelle $f(x) = \frac{3x^2-2}{x-1}$, l'équation de l'asymptote oblique est :

$a) y = -x + 3 \quad b) y = x - 3 \quad c) y = -3x \quad d) y = 3x + 3 \quad e) ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

Résolution

$f(x) = \frac{3x^2-2}{x-1}$

Première méthode

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2-2}{x-1}}{x}$$

$$p = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2-2}{x-1} - 3x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2}{x-1} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2}{(x-1)\,x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2}{x^2-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2}$$

$m = 3$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2-2-3x(x-1)}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2-2-3x^2+3x}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x}$$

$p = 3$

L'équation de l'asymptote oblique est donnée par $y = 3x + 3$

Deuxième méthode

Le degré du numérateur est 2 et celui du dénominateur est 1.

Effectuons la division euclidienne du numérateur par le dénominateur pour trouver l'A.O.

$3x^2 - 2$	$x - 1$
$-3x^2 + 3x$	$3x + 3$
$3x - 2$	
$-3x + 3$	
1	

$y = 3x + 3$ est l'équation de l'A.O.

R) d.

EXERCICE 115

Soit la fonction réelle $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x-2}$, l'équation de l'asymptote oblique est :

$a) y = -x + 3$ $\quad b) y = 2x + 3$ $\quad c) y = -3x$ $\quad d) y = 3x + 3$ $\quad e) ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

Résolution

$f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x-2}$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^2-x-1}{x-2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-x-1}{x-2} \times \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-x-1}{x^2-2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2}$$

$$m = 2$$

$$p = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2-x-1}{x-2} - 2x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2-x-1-2x(x-2)}{x-2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2-x-1-2x^2+4x}{x-2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x}$$

$$p = 3$$

$y = 2x + 3$

Autre méthode

Le degré du numérateur est 2 et celui du dénominateur est 1. Le degré du numérateur étant supérieur à celui du dénominateur de 1 :

Effectuons la division euclidienne du numérateur par le dénominateur pour trouver l'A.O.

$2x^2 - x - 1$	$x - 2$
$-2x^2 - 2x2$	$2x + 3$
$3x - 1$	
$-3x + 6$	
5	

$y = 2x + 3$ est l'équation de l'A.O.

R) b

EXERCICE 116

Soit la fonction réelle $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$, l'équation de l'asymptote oblique est :

$a)y = -x + 1 \quad b)y = -1 \quad c)y = 1 \quad d)y = x - 1 \quad e)ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

Résolution

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1-x^2} \times \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x-x^3}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{-x^3}$$

$$m = -1$$

$$p = \lim_{x\to+\infty} [\,f(x) - mx]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3+x(1-x^2)}{1-x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3+x-x^3}{1-x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-x^2}$$

$$p = 0$$

$y = -x$ est l'équation de l'asymptote oblique

Autre méthode

Le degré du numérateur est 3 et celui du dénominateur est 2. Le degré du numérateur étant supérieur à celui du dénominateur de 1 :

Effectuons la division euclidienne du numérateur par le dénominateur pour trouver l'A.O.

$$\begin{array}{c|c} x^3 & -x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^3 + x & -x \\ \hline x & \end{array}$$

R) e

EXERCICE 117

L'équation de l'asymptote oblique à la courbe C de la fonction $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ est :

$a)\ y - 2 = 0 \quad b) y + 2 = 0 \quad c)\ x - 1 = 0 \quad d) y = x - 1 \quad e) ABR$

(Concours 2018-2019/Analyse)

Résolution

$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2x+1}{x-1}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2}$

$m = 0$

$p = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx]$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{2x+1}{x-1} - 0x\right]$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{2x+1}{x-1}\right]$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{x}$

$p = 2$

$y = 2$

$y - 2 = 0$

Mais cette équation est celle de l'asymptote horizontale et non oblique.

$\boldsymbol{R) e}$

Aimé DIUMI DIKOLO
Groupe Les Erudits

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE74

Trouvez les asymptotes éventuelles des fonctions suivantes :

$a)\ f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x^2-4}$

$b)\ f(x) = \frac{x+3}{1-x^2}$

$c)\ f(x) = 2x^3 - \frac{x+3}{1-x^2}$

$d)\ f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+4}$

EXERCICE AE75

Soit la fonction réelle $f(x) = \frac{2x^3-3x^2+5}{1-x^2}$, l'équation de l'asymptote oblique est :

$a)\ y = -2x + 3$ $\quad b)\ y + 2x = 3$ $\quad c)\ y = 2x + 3$ $\quad d)\ y = -2x - 3$

EXERCICE AE76

Soit la fonction réelle $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$, l'équation de l'asymptote oblique est :

$y = x - 2$ $\quad b)\ y = x + 2$ $\quad c)\ y = -x - 2$ $\quad d)\ y = -x + 2$

EXERCICE AE77

Les fonctions suivantes acceptent-elles des asymptotes ? Si oui, combien et donnez-les :

$a)\ f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x^2-4}$ $\quad b)\ f(x) = \frac{x+3}{1-x^2}$

$c)\ f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+4}$

V. CONTINUITE

f est continue au point a si et seulement si :

- $a \in D_f$ ou $f(a) \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemple :

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

f est $continue$ au $point$ $x = 2, en$ $effet$:
(i) $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$
$2 \in D_f$
(ii) $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

EXERCICE 118

Pour quelle valeur de x, la fonction $f(x) = \frac{x^3+x^2+2x}{x+1}$ est continue :

$a)$ 0 $b)$ 1 $c)$ 2 $d)$ 3 $e)$ $Toutes$ les $assertions$ $sont$ $bonnes$

(Concours 2023-2024/Analyse)

Résolution

Le domaine de continuité est donné par : $D_C = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\}$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$$

$$D_C = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

R) e

EXERCICE 119

Pour quelle(s) valeur(s) de x, la fonction $\frac{x^2-9}{x-3}$ est discontinue :

$a)$ $\{3\}$ $b)$ $]-\infty; -3[$ $c)$ $\{3; -3\}$ $d)$ $\{-3\}$ $e)$ $\mathbb{N}$

(Concours 2022-2023/Analyse)

Résolution

Trouvons le domaine de continuité de la fonction

$D_c = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x - 3 = 0\}$

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$D_c = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ou $D_c =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

Pour trouver la(les) valeur(s) de x, pour laquelle(lesquelles) la fonction $\frac{x^2-9}{x-3}$ est discontinue, il suffit de trouver $\mathbb{R} \setminus D_c$

$\mathbb{R} \setminus D_c = \mathbb{R} \setminus]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[= \{3\}$

$R)$ a

EXERCICE 120

Pour quelle(s) valeur(s) de x, la fonction $\frac{x^2-9}{x-3}$ est discontinue :

$a)$ $\mathbb{N}$ $b)\{-3\}$ $c)$ $\{3\}$ $d)$ $\{3; -3\}$ $e)$ $]-\infty; -3[$

(Concours 2018-2019/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

Résolution

Trouvons d'abord le domaine de continuité de cette fonction

$D_c = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x - 3 = 0\}$

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$D_c = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ou $D_c =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

Pour trouver la(les) valeur(s) de x, pour laquelle(lesquelles) la fonction $\frac{x^2-9}{x-3}$ est discontinue, il suffit de trouver $\mathbb{R} \setminus D_c$

$\mathbb{R} \setminus D_c = \mathbb{R} \setminus]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[= \{3\}$

$\boldsymbol{R)}$ $\boldsymbol{c}$

EXERCICE 121

Pour quelle(s) valeur(s) de x, la fonction $f(x) = \frac{7x^3+x^2}{x+1}$ est continue :

$a)$ 0 $b)1$ $c)$ 2 $d)$ 3 $e)$ $Toutes\ les\ assertions\ sont\ bonnes$

(Concours 2018-2019/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

(Concours 2022-2023/Analyse)

Résolution

Trouvons le domaine de continuité de f

$D_c = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x + 1 = 0\}$

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$D_c = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ou $D_c =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

$\boldsymbol{R}) \boldsymbol{e}.$

EXERCICE 122

Pour quelle(s) valeur(s) de x, la fonction $\frac{x^2-9}{x-3}$ est discontinue :

$a)$ 3 $b)\{-3\}$ $c)\mathbb{N} - \{3\}$ $d)$ $\{3; -3\}$ $e)\mathbb{R} - \{3\}$

(Concours 2020-2021/Analyse)

Résolution

Trouvons d'abord le domaine de continuité de cette fonction

$D_c = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x - 3 = 0\}$

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$D_c = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ou $D_c =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

Pour trouver la(les) valeur(s) de x, pour laquelle(lesquelles) la fonction $\frac{x^2-9}{x-3}$ est discontinue, il suffit de trouver $\mathbb{R} \setminus D_c$

$\mathbb{R} \setminus D_c = \mathbb{R} \setminus]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[= \{3\}$

$\boldsymbol{R}) \boldsymbol{a}$

EXERCICE 123

Pour quelle(s) valeur(s) de x, la fonction $\frac{x^2+9}{x-3}$ est discontinue :

$a)$ $\mathbb{N}$ $b)\{3; -3\}$ $c)$ $\{-3\}$ $d)$ $\{3\}$ $e)$ $]-\infty; -3[$

(Concours 2021-2022/Analyse)

Résolution

Trouvons d'abord le domaine de continuité de cette fonction

$D_c = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x - 3 = 0\}$

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$D_c = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ou $D_c =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

Pour trouver la(les) valeur(s) de x, pour laquelle(lesquelles) la fonction $\frac{x^2-9}{x-3}$ est discontinue, il suffit de trouver $\mathbb{R} \setminus D_c$

$\mathbb{R} \setminus D_c = \mathbb{R} \setminus]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[= \{3\}$

$\boldsymbol{R)\ d}$

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE78

Pour quelle(s) valeur(s) de x, la fonction $\frac{x^2-7x+12}{x-5}$ est discontinue :

$a)\ 5$ $b) -5$ $c)\ \mathbb{R}-\{-5\}$ $d)\ \mathbb{R}-\{5\}$ $e)\ \mathbb{R}-\{3;4\}$

EXERCICE AE79

Pour quelle(s) valeur(s) de x, la fonction $f(x)=\frac{x^3+x^2-4x+5}{x-1}$ est continue :

$a) -1$ $b)\ 4$ $c)\ 5$ $d)\ 10$ $e)\ 20$

EXERCICE AE80

Pour quelle(s) valeur(s) de x, la fonction $\frac{x^3-2x+5}{x+4}$ est discontinue :

$a)\ 4$ $b) -4$ $c)\ \mathbb{R}-\{-4\}$ $d)\ \mathbb{R}-\{4\}$ $e)\ \mathbb{R}-\{3;4\}$

EXERCICE AE81

Pour quelle(s) valeur(s) de x, la fonction $f(x)=\frac{x^3+x^2-4x+5}{x-3}$ est continue :

$a) -1$ $b)\ 4$ $c)\ 5$ $d)\ 10$ $e)\ 20$

VI. DERIVEES

VI.1 Quelques formules ou résultats sur les dérivées

1) $c' = 0 \quad avec\ c \in \mathbb{R}$

2) $x' = 1$

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

4) $(u.v)' = u'v + uv'$

5) $(x^n)' = nx^{n-1}$

6) $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$

7) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

8) $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2} \qquad avec\ c \in \mathbb{R}$

9) $(\sin x)' = \cos x$

10) $(\sin u)' = u'.\cos u$

11) $(\cos x)' = -\sin x$

12) $(\cos u)' = -u' \sin u$

13) $(\tan x)' = \frac{1}{cos^2 x}$

14) $(\tan u)' = \frac{u'}{cos^2 u}$

15) $(\cot x)' = \frac{-1}{sin^2 x}$

16) $(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$

17) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

18) $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

19) $(Arc \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

20) $(Arc \sin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

21) $(Arc \cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

22) $(Arc \cos u)' = \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}$

23) $(Arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

24) $(Arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

25) $(Arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

26) $(Arc\cot u)' = \frac{-u'}{1+u^2}$

27) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

28) $(\log_a x)' = \frac{u'}{u\ln a}$

29) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

30) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

31) $(a^x)' = a^x \ln a$

32) $(a^u)' = u'a^u \ln a$

33) $(e^x)' = e^x$

34) $(e^u)' = u'e^u$

35) $(u^v)' = u^v\left(v'.\ln u + v.\frac{u'}{u}\right)$ Avec $u > 0$

VI.2 La croissance et la décroissance d'une fonction

Soit f une fonction de domaine de définition D_f et E une partie de D_f.

- f est croissante sur E si : $\forall\, x_1, x_2 \in E, (x_1 < x_2) \Rightarrow \left[\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0\right]$
- f est décroissante sur E si : $\forall\, x_1, x_2 \in E, (x_1 < x_2) \Rightarrow \left[\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 0\right]$

Exemple

1) La fonction $f(x) = 2x + 3$ est croissante sur $\mathbb{R}$, car

Soient 2 et 5 : $2 < 5 \Rightarrow \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{(2.5+3)-(2.2+3)}{5-2}$

$$= \frac{(10+3)-(4+3)}{3}$$

$$= \frac{13-7}{3}$$

$$= \frac{6}{3}$$

$$= 2 \geq 0$$

Soient -4 et 0 : $-4 < 0 \Rightarrow \frac{f(0)-f(-4)}{0-(-4)} = \frac{(2.0+3)-(2.(-4)+3)}{0+4}$

$$= \frac{(0+3)-(-8+3)}{4}$$

$$= \frac{3-(-5)}{4}$$

$$= \frac{8}{4}$$

$$= 2 \geq 0$$

2. La fonction $f(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;0[$

Soient -2 et -1 : $-2 < -1 \Rightarrow \frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = \frac{(-1)^2-(-2)^2}{-1+2}$

$$= \frac{1-4}{1}$$

$$= -3 \leq 0$$

Soit f une fonction dérivable sur $]a\,;b[$

- f est croissante sur $]a\,;b[$ ssi $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a\,;b[$
- f est décroissante sur $]a\,;b[$ ssi $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a\,;b[$

Pour déterminer l'intervalle de croissance ou de décroissance d'une fonction, on procède comme suit :

- Calculer la dérivée première de la fonction
- Trouver les valeurs qui annulent la dérivée première (c'est-à-dire égaler la dérivée première à zéro et résoudre l'équation ainsi formée)
- Faire l'étude de signe de la dérivée première

Exemples :

1. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 10$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - \left(\frac{5x^2}{2}\right)' + (6x)' + (10)'$$

$$= \frac{3x^2}{3} - \frac{10x}{2} + 6 + 0$$

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6)$$

$$= 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5-1}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-(-5)\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5+1}{2} = 3$

$f(2) = \frac{(2)^3}{3} - \frac{5(2)^2}{2} + 6(2) + 10 = \frac{8}{3} - 10 + 12 + 10 = \frac{8}{3} + 12 = \frac{8+36}{3} = \frac{44}{3}$

$f(3) = \frac{(3)^3}{3} - \frac{5(3)^2}{2} + 6(3) + 10 = 9 - \frac{45}{2} + 18 + 10 = 37 - \frac{45}{2} = \frac{74-45}{2} = \frac{29}{2}$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{44}{3}$	$\searrow$	$\frac{29}{2}$	$\nearrow$	

La fonction est croissante dans $]-\infty\,; 2] \cup [3;\ +\infty[$ et décroissante dans $[2; 3]$

2. $f(x) = x^2 + 3x + 10$

$f'(x) = (x^2)' + (3x)' + (10)'$

$f'(x) = 2x + 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = -3$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 10 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 10 = \frac{9-18+40}{4} = \frac{31}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{31}{4}$	$\nearrow$	

La fonction est croissante sur $\left[-\frac{3}{2}\,;\ +\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty\,;\ -\frac{3}{2}\right]$

VI.3 Extremum (maximum ou minimum) d'une fonction

Si f est une fonction dérivable sur $I =]a\,; b[$ et $x_0 \in I$ alors f admet un extremum en x_0 si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0

Lorsque f' change de signe en passant du positif au négatif, l'extremum est un maximum

Lorsque f' change de signe en passant du négatif au positif, l'extremum est un minimum

Exemples

1. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 10$

$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - \left(\frac{5x^2}{2}\right)' + (6x)' + (10)'$

$= \frac{3x^2}{3} - \frac{10x}{2} + 6 + 0$

$f'(x) = x^2 - 5x + 6$

$f'(x) = 0 \iff x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6)$

$= 25 - 24$

$\Delta = 1$

$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5-1}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-(-5)\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5+1}{2} = 3$

$f(2) = \frac{(2)^3}{3} - \frac{5(2)^2}{2} + 6(2) + 10 = \frac{8}{3} - 10 + 12 + 10 = \frac{8}{3} + 12 = \frac{8+36}{3} = \frac{44}{3}$

$f(3) = \frac{(3)^3}{3} - \frac{5(3)^2}{2} + 6(3) + 10 = 9 - \frac{45}{2} + 18 + 10 = 37 - \frac{45}{2} = \frac{74-45}{2} = \frac{29}{2}$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{44}{3}$	$\searrow$	$\frac{29}{2}$	$\nearrow$	

La courbe de f admet un maximum relatif $M\left(2; \frac{44}{3}\right)$ et un minimum relatif $m\left(3; \frac{29}{2}\right)$

2. $f(x) = x^2 + 3x + 10$

$f'(x) = (x^2)' + (3x)' + (10)'$

$f'(x) = 2x + 3$

$f'(x) = 0 \iff 2x + 3 = 0$

$\iff 2x = -3$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 10 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 10 = \frac{9-18+40}{4} = \frac{31}{4}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{31}{4}$	$\nearrow$	

La courbe de f admet un minimum relatif $m\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{31}{4}\right)$

VI.4 Sens de concavité et points d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivables sur $I =]a\,;b[$ et (C) sa courbe représentative.

Si $\forall\, x \in I\,, f''(x) > 0$, alors la courbe tourne sa concavité vers les y positifs

Si $\forall\, x \in I\,, f''(x) < 0$, alors la courbe tourne sa concavité vers les y négatifs

La courbe représentative admet un point d'inflexion en x_0 si $f''(x_0) = 0$ et f'' change de signe en x_0

Exemple

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 10$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - \left(\frac{5x^2}{2}\right)' + (6x)' + (10)'$$

$$= \frac{3x^2}{3} - \frac{10x}{2} + 6 + 0$$

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$f''(x) = (x^2)' - (5x)' + (6)'$$

$$= 2x - 5 + 0$$

$$f''(x) = 2x - 5$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^3}{3}-\frac{5\times\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2}+6\left(\frac{5}{2}\right)+10=\frac{\frac{125}{8}}{3}-\frac{5\times\frac{25}{4}}{2}+15+10=\frac{125}{24}-\frac{125}{8}+25=\frac{125-375+600}{24}=\frac{350}{24}$

x	$-\infty$		$5/2$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cap$	$350/24$	$\cup$	

La courbe admet un point d'inflexion d'abscisse $5/2$ et d'ordonnée $350/24$

NOTA

Un point critique d'une fonction est un point où la dérivée est nulle ou n'est pas définie.

Un point critique est la réunion de tous les points où la dérivée est nulle (appelés points stationnaires) avec tous les points où la dérivée n'est pas définie (appelés points singuliers)

EXERCICE 124

Soit la fonction réelle d'une variable réelle $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x}\right)$

La quantité $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ est égale à :

$a)\ -\frac{3}{4}\quad b)\ \frac{-5}{6}\quad c)\ -\frac{11}{2}\quad d)\ \frac{11}{4}\quad e)\ ABR$

(Concours 2023-2024)

Résolution

$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x}\right)$

$f'(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x}\right)'$

$=\frac{1}{2}\left[(x)'+\left(\frac{3}{x}\right)'\right]$

$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{(3)'(x)-(3)(x)'}{x^2}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{0(x)-3\times1}{x^2}\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{x^2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-3}{x^2}\right)$

$f'(x) = \frac{x^2-3}{2x^2}$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3}{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \frac{\frac{1}{4}-3}{2\times\frac{1}{4}}$

$= \frac{\frac{1-12}{4}}{\frac{2}{4}}$

$= -\frac{11}{4} \times \frac{4}{2}$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = {}^{-11}/_{2}$

R) c

EXERCICE 125

Soit la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$

La fonction f admet les points critiques aux points d'abscisses x égal à :

$a)\ x = 1\ \ et\ x = -1 \quad b)\ x = 2\ \ et\ x = \sqrt{2} \quad c)\ x = \sqrt{3}\ \ et\ x = -\sqrt{3} \quad d)\ x = -3 \quad e)\ ABR$

(Concours 2023-2024)

Résolution

Trouvons d'abord la dérivée de la fonction

$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)'$

$= \frac{1}{2}\left[(x)' + \left(\frac{3}{x}\right)'\right]$

$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(3)'(x)-(3)(x)'}{x^2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{0(x)-3\times1}{x^2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-3}{x^2}\right)$

$f'(x) = \frac{x^2-3}{2x^2}$

Un point critique d'une fonction est un point où la dérivée est nulle ou n'est pas définie.

$f'(x) = 0 \iff \frac{x^2-3}{2x^2} = 0$

$\iff x^2 - 3 = 2x^2(0)$

$\iff x^2 - 3 = 0$

$\iff x^2 = 3$

$\iff x = \pm\sqrt{3}$

La dérivée n'est pas définie pour $2x^2 = 0 \iff x = 0$

Les points critiques sont $\{-\sqrt{3}; 0;\ \sqrt{3}\}$

R) c

EXERCICE 126

Soit la fonction polynomiale suivante définie dans $\mathbb{R}$. $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Le point critique est :

$a)$ $(0,1)$ $b)(1,2)$ $c)$ $(1,0)$ $d)(2,1)$ $e)$ *aucune bonne réponse*

(Concours 2021-2022/Analyse)

Résolution

$f(x) = x^2 - 2x + 1$

$f'(x) = (x^2 - 2x + 1)'$

$= (x^2)' - (2x)' + (1)'$

$= 2x - 2 + 0$

$f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 0 \iff 2x - 2 = 0$

$\iff 2x = 2$

$\iff x = \frac{2}{2}$

$\iff x = 1$

Le point critique est 1

Remplaçons le 1 dans $f(x)$

$f(1) = (1)^2 - 2(1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

Le point critique est est $(1, 0)$

R) c

EXERCICE 127

On considère la fonction réelle d'une variable réelle $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$.

La quantité $f'(2)$ vaut :

$a)\ \frac{-3}{4}$ $\quad b)\ \frac{4}{3}$ $\quad c)\ \frac{-1}{2}$ $\quad d)\ \frac{-3}{8}$ $\quad e)\ ABR$

(Concours 2018-2019/Analyse)

Résolution

$$f'(x) = \frac{(x)'\sqrt{x+2} - x\,(\sqrt{x+2})\prime}{(\sqrt{x+2})^2} \qquad Car \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x+2} - x.\frac{(x+2)\prime}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{\sqrt{x+2} - \frac{x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{\frac{2(\sqrt{x+2})^2 - x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{\frac{2(x+2) - x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{\frac{2x+4-x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$= \frac{x+4}{2\sqrt{x+2}(x+2)}$$

$$f'(x) = \frac{x+4}{(2x+4)\sqrt{x+2}}$$

$$f'(2) = \frac{2+4}{(2.2+4)\sqrt{2+2}}$$

$$= \frac{6}{16}$$

$$= \frac{3}{8}$$

R) e

EXERCICE 128

Soit la fonction $f\ de\ \mathbb{R}\ dans\ \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x) = \frac{(x^2-40)^{555}}{555}$

$a)$ Calculez les dérivées $f'(x) et\ \ f''(x)$

$b)$ Evaluez les nombres $f(-\sqrt{39})\ et\ f(\sqrt{41})$

(Concours 2012-2013/Analyse)

Résolution

$a)\ f(x) = \frac{(x^2-40)^{555}}{555}$

$$f' = \frac{\left[(x^2-40)^{555}\right]' 555-(x^2-40)^{555}.(555)'}{555^2}$$

$$= \frac{555.(x^2-40)'(x^2-40)^{554}.555}{555^2}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 2x(x^2-40)^{554}}$$

$$f'' = (2x)'.(x^2-40)^{554} + 2x.[(x^2-40)^{554}]'$$

$$= 2(x^2-40)^{554} + 2x.554.(x^2-40)'(x^2-40)^{553}$$

$$= 2(x^2-40)^{554} + 1108x.2x(x^2-40)^{553}$$

$$= 2(x^2-40)^{554} + 2216x^2\,(x^2-40)^{553}$$

$$f''(x) = (x^2-40)^{553}[2(x^2-40) + 2216x^2]$$

$$f''(x) = (x^2-40)^{553}[2x^2 - 80 + 2216x^2]$$

$$\boldsymbol{f''(x) = (x^2-40)^{553}[2218x^2 - 80]}$$

$b)\ f(-\sqrt{39}) = \frac{((-\sqrt{39})^2-40)^{555}}{555}$

$$= \frac{(39-40)^{555}}{555}$$

$$f(-\sqrt{39}) = \frac{-1}{555}$$

$$f(\sqrt{41}) = \frac{((\sqrt{41})^2-40)^{555}}{555}$$

$$= \frac{(41-40)^{555}}{555}$$

$$f(\sqrt{41}) = \frac{1}{555}$$

EXERCICE 129

On donne $f(x) = \frac{-1-3x}{2x+4}$, que vaut $[f'(-2)]^2$

$a)$ 72 $b)$ 49 $c)$ 9 $d)$ 27 $e) ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

Résolution

$f(x) = \frac{-1-3x}{2x+4}$

$f' = \frac{(-1-3x)'(2x+4)-(-1-3x)(2x+4)'}{(2x+4)^2}$ $\quad Car \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$= \frac{-3(2x+4)-(-1-3x)2}{(2x+4)^2}$

$\frac{-6x-12+2+6x}{(2x+4)^2}$

$f' = \frac{-10}{(2x+4)^2}$

$[f'(-2)]^2 = \left[\frac{-10}{(2\times(-2)+4)^2}\right]^2$

$= \left[\frac{-10}{(-4+4)^2}\right]^2$

$= \left[\frac{-10}{(0)^2}\right]^2$

$= \infty$

$\boldsymbol{R) \ e}$

EXERCICE 130

Evaluez $f''(4)$ $si\ y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x}}$ avec $y = f(x)$

$a)$ 1.47 $b)$ 3.22 $c)$ 0.96 $d)$ 5.63 $e) ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

Résolution

$y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x}}$

$f(x) = \frac{x^2+5}{\sqrt{x}}$

$$f' = \frac{(x^2+5)'\sqrt{x}-(x^2+5)(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}^2}$$

$$= \frac{2x\sqrt{x}-(x^2+5)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{\frac{4x^2-x^2-5}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$f' = \frac{3x^2-5}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'' = \frac{(3x^2-5)'2x\sqrt{x}-(3x^2-5)(2x\sqrt{x})'}{(2x\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{(6x)2x\sqrt{x}-(3x^2-5)\left[(2x)'\sqrt{x}+2x.(\sqrt{x})'\right]}{4x^3}$$

$$= \frac{12x^2\sqrt{x}-(3x^2-5)\left[2\sqrt{x}+2x.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]}{4x^3}$$

$$= \frac{12x^2\sqrt{x}-(3x^2-5)\left[\frac{2x+x}{\sqrt{x}}\right]}{4x^3}$$

$$\boldsymbol{f'' = \frac{12x^2\sqrt{x}-(3x^2-5)\left[\frac{3x}{\sqrt{x}}\right]}{4x^3}}$$

$$f''(4) = \frac{12\times4^2\sqrt{4}-(3\times4^2-5)\times\frac{3\times4}{\sqrt{4}}}{4\times4^3}$$

$$= \frac{384-43\times6}{256}$$

$$= \frac{126}{256}$$

$$f''(4) = 0.4921875$$

R*) *e

EXERCICE 131

On donne $(x) = \frac{-3-3x}{2x+4}$, que vaut $[f'(3)]^2$

$a)\ -\frac{5}{3}$ $\quad b)\ 49$ $\quad c)\ 23$ $\quad d)\ \frac{25}{9}$ $\quad e) ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

Résolution

$$f(x) = \frac{-3-3x}{2x+4}$$

$$f' = \frac{(-3-3x)'(2x+4)-(-3-3x)(2x+4)'}{(2x+4)^2} \qquad Car\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$= \frac{-3(2x+4)-(-3-3x)2}{(2x+4)^2}$$

$$= \frac{-6x-12+6+6x}{(2x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6}{(2x+4)^2}$$

$$[f'(3)]^2 = \left[\frac{-6}{(2\times3+4)^2}\right]^2$$

$$= \left[\frac{-6}{(6+4)^2}\right]^2$$

$$= \left[\frac{-6}{(10)^2}\right]^2$$

$$= \left(\frac{-6}{100}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-3}{50}\right)^2$$

$$= \frac{9}{2500}$$

$$[f'(3)]^2 = \frac{9}{2500}$$

$\boldsymbol{R}) \, \boldsymbol{e}$

EXERCICE 132

Evaluez $f''(4) \;\; si \; f(x) = \frac{x^2+6}{\sqrt{x}}$

$a)$ 1.47 $\quad b)$ 3.22 $\quad c)$ 0.51 $\quad d)$ 5.63 $\quad e) ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

Résolution

$$f(x) = \frac{x^2+6}{\sqrt{x}}$$

$$f' = \frac{(x^2+6)'\sqrt{x}-(x^2+6)(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}^2}$$

$$= \frac{2x\sqrt{x}-(x^2+6)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{\frac{4x^2-x^2-6}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$f' = \frac{3x^2-6}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'' = \frac{(3x^2-6)'2x\sqrt{x}-(3x^2-6)(2x\sqrt{x})'}{(2x\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{(6x)2x\sqrt{x}-(3x^2-6)[(2x)'\sqrt{x}+2x.(\sqrt{x})']}{4x^3}$$

$$= \frac{12x^2\sqrt{x}-(3x^2-6)\left[2\sqrt{x}+2x.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]}{4x^3}$$

$$= \frac{12x^2\sqrt{x}-(3x^2-6)\left[\frac{2x+x}{\sqrt{x}}\right]}{4x^3}$$

$$\boldsymbol{f''} = \frac{\mathbf{12x^2\sqrt{x}-(3x^2-6)\left[\frac{3x}{\sqrt{x}}\right]}}{\mathbf{4x^3}}$$

$$f''(9) = \frac{12\times 9^2\times\sqrt{9}-(3\times 9^2-6)\left(\frac{3\times 9}{\sqrt{9}}\right)}{4\times 9^3}$$

$$= \frac{2916-237\times 9}{2916}$$

$$= \frac{783}{2916}$$

$f''(9) = 0.268518518$

$\textcolor{red}{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{)\ e}$

EXERCICE 133

Soit la fonction $f\ de\ \mathbb{R}\ dans\ \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x) = \frac{(7-x^2)^{326}}{326}$

a) Calculez les dérivées $f'(x) et\ f''(x)$
b) Evaluez les nombres $f(-\sqrt{7}), f(\sqrt{7})\ et\ f(-\sqrt{8})$

(Concours 2013-2014/Analyse)

Résolution

a) $f(x) = \frac{(7-x^2)^{326}}{326} f' = \frac{\left[(7-x^2)^{326}\right]' 326-(7-x^2)^{326}.(326)'}{326^2}$

$$= \frac{326.(7-x^2)'(7-x^2)^{325}.326}{326^2}$$

$\boldsymbol{f'(x) = -2x}(7-x^2)^{325}$

$f'' = (-2x)'.(7-x^2)^{325} + (-2x).[(7-x^2)^{325}]'$

$= -2(7-x^2)^{325} - 2x.325.(7-x^2)'(7-x^2)^{324}$

$= -2(7-x^2)^{325} - 650x.(-2x)(7-x^2)^{324}$

$= -2(7-x^2)^{325} + 1300x^2\,(7-x^2)^{324}$

$= (7-x^2)^{324}[-2(7-x^2) + 1300x^2]$

$f''(x) = (7 - x^2)^{324}[2x^2 - 14 + 1300x^2]$

$\boldsymbol{f''(x) = (7 - x^2)^{324}[1302x^2 - 14]}$

$b)\ f(-\sqrt{7}) = \frac{(7-(-\sqrt{7})^2)^{326}}{326}$

$= \frac{(7-7)^{326}}{326}$

$f(-\sqrt{7}) = \frac{0^{326}}{326}$

$f(-\sqrt{7}) = 0$

$f(\sqrt{7}) = \frac{(7-(\sqrt{7})^2)^{326}}{326}$

$= \frac{(7-7)^{326}}{326}$

$f(\sqrt{7}) = \frac{0^{326}}{326}$

$f(\sqrt{7}) = 0$

$f(-\sqrt{8}) = \frac{(7-(-\sqrt{8})^2)^{326}}{326}$

$= \frac{(7-8)^{326}}{326}$

$f(-\sqrt{8}) = \frac{1^{326}}{326}$

$f(-\sqrt{8}) = \frac{1}{326}$

EXERCICE 134

On donne $f(x) = \frac{5-2x}{4+3x}$, que vaut $[f'(-2)]^2$

$a)\ \frac{169}{16}$ $b)\ \frac{16}{100}$ $c)\ \frac{13}{4}$ $d)\ \frac{-13}{4}$ $e) ABR$

(Concours 2015-2016/Analyse)

Résolution

$f(x) = \frac{5-2x}{4+3x}$

$f' = \frac{(5-2x)'(4+3x)-(5-2x)(4+3x)'}{(4+3x)^2}$

$= \frac{-2(4+3x)-(5-2x)3}{(4+3x)^2}$

$\frac{-8-6x-15+6x}{(4+3x)^2}$

$f' = \frac{-23}{(4+3x)^2}$

$[f'(-2)]^2 = \left[\frac{-23}{(4+3\times(-2))^2}\right]^2$

$= \left[\frac{-23}{(4-6)^2}\right]^2$

$= \left[\frac{-23}{(-2)^2}\right]^2$

$= \left(\frac{-23}{4}\right)^2$

$= \frac{529}{16}$

$[f'(-2)]^2 = \frac{529}{16}$

$\boldsymbol{R)\ e}$

EXERCICE 135

Soit la fonction $f\ de\ \mathbb{R}\ dans\ \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x) = \frac{(x^5+21)^{452}}{452}$

a) Calculez les dérivées $f'(x) et\ \ f''(x)$
b) Evaluez les nombres $f(\sqrt[5]{-22})\ et\ f(-\sqrt[5]{22})$

(Concours 2013-2014/Analyse)

Résolution

$a)\ f(x) = \frac{(x^5+21)^{452}}{452}$

$f' = \frac{\left[(x^5+21)^{452}\right]' 452-(x^5+21)^{452}.(452)'}{452^2}$

$= \frac{452.(x^5+21)'(x^5+21)^{451}.452}{452^2}$

$\boldsymbol{f'(x) = 5x^4}(x^5+21)^{451}$

$f'' = (\boldsymbol{5x^4})'.(x^5+21)^{451} + \boldsymbol{5x^4}.[(x^5+21)^{451}]'$

$= 20x^3(x^5+21)^{451} + \boldsymbol{5x^4}.451.(x^5+21)'(x^5+21)^{450}$

$= 20x^3(x^5+21)^{451} + 2255x^4.\boldsymbol{5x^4}(x^5+21)^{450}$

$= 20x^3(x^5+21)^{451} + 11275x^8\ (x^5+21)^{450}$

$f''(x) = (x^5+21)^{450}[20x^3(x^5+21) + 11275x^8]$

$f''(x) = (x^5+21)^{450}[20x^8 + 420x^3 + 11275x^8]$

$\boldsymbol{f''(x)} = (x^5 + 21)^{450}[\boldsymbol{11295x^8} + 420x^3]$

$b)\ f(\sqrt[5]{-22}) = \frac{((\sqrt[5]{-22})^5+21)^{452}}{452}$

$= \frac{(-22+21)^{452}}{452}$

$= \frac{(-1)^{452}}{452}$

$f(\sqrt[5]{-22}) = \frac{1}{452}$

$f(-\sqrt[5]{22}) = \frac{((-\sqrt[5]{22})^5+21)^{452}}{452}$

$= \frac{(-22+21)^{452}}{452}$

$= \frac{(-1)^{452}}{452}$

$f(-\sqrt[5]{22}) = \frac{1}{452}$

EXERCICE 136

On considère la fonction réelle f de la variable réelle x définie par la formule

$f(x) = \frac{2-x^2}{2+x^2}$

a) Calculez et simplifiez la dérivée $f'(x)$
b) Que vaut $f'(-1)$
c) Que vaut $f(-2)$

(Concours 2009-2010/Analyse)

Résolution

a) $f(x) = \frac{2-x^2}{2+x^2}$

$f'(x) = \frac{(2-x^2)'(2+x^2)-(2-x^2)(2+x^2)'}{(2+x^2)^2}$

$= \frac{\left[(2)'-(x^2)'\right](2+x^2)-(2-x^2)\left[(2)'+(x^2)'\right]}{(2+x^2)^2}$

$= \frac{(0-2x)(2+x^2)-(2-x^2)(0+2x)}{(2+x^2)^2}$

$= \frac{-2x(2+x^2)-(2-x^2)2x}{(2+x^2)^2}$

$= \frac{-4x-2x^3-4x+2x^3}{(2+x^2)^2}$

$f'(x) = \frac{-8x}{(2+x^2)^2}$

$b)\ f'(-1) = \frac{-8\times(-1)}{(2+(-1)^2)^2}$

$= \frac{8}{3^2}$

$f'(-1) = \frac{8}{9}$

$c)\ f(-2) = \frac{2-(-2)^2}{2+(-2)^2}$

$= \frac{2-4}{2+4}$

$= \frac{-2}{6}$

$f(-2) = \frac{-1}{3}$

EXERCICE 137

Soit la fonction $f\ de\ \mathbb{R}\ dans\ \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x) = \frac{(1-x^4)^{150}}{150}$

$a)$ Calculez les dérivées $f'(x) et\ \ f''(x)$

$b)$ Evaluez les nombres $f(-1), f(\sqrt[4]{2})\ et\ f(0)$

(Concours 2013-2014/Analyse)

Résolution

$a)\ \ f(x) = \frac{(1-x^4)^{150}}{150}$

$f' = \frac{\left[(1-x^4)^{150}\right]' 150-(1-x^4)^{150}.(150)'}{150^2}$

$= \frac{150.(1-x^4)'(1-x^4)^{149}.150}{150^2}$

$\boldsymbol{f'(x) = -4x^3}(1-x^4)^{149}$

$f'' = (-4x^3)'.(1-x^4)^{149} + (-4x^3).[(1-x^4)^{149}]'$

$= -12x^2(1-x^4)^{149} - 4x^3.149.(1-x^4)'.(1-x^4)^{148}$

$= -12x^2(1-x^4)^{149} - 596x^3.(-4x^3)(1-x^4)^{148}$

$= -12x^2(1-x^4)^{149} + 2384x^6\,(1-x^4)^{148}$

$= (1-x^4)^{148}[-12x^2(1-x^4) + 2384x^6]$

$f''(x) = (1-x^4)^{148}[-12x^2 + 12x^6 + 2384x^6]$

$f''(x) = (1-x^4)^{148}[2396x^6 - 12x^2]$

$b)\ f(-1) = \frac{(1-(-1)^4)^{150}}{150}$

$= \frac{(1-1)^{150}}{150}$

$= \frac{0^{150}}{150}$

$f(-1) = 0$

$f(\sqrt[4]{2}) = \frac{(1-(\sqrt[4]{2})^4)^{150}}{150}$

$= \frac{(1-2)^{150}}{150}$

$= \frac{(-1)^{150}}{150}$

$f(\sqrt[4]{2}) = \frac{1}{150}$

$f(0) = \frac{(1-(0)^4)^{150}}{150}$

$= \frac{(1-0)^{150}}{150}$

$= \frac{1^{150}}{150}$

$f(0) = \frac{1}{150}$

EXERCICE 138

La fonction $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 10$ est strictement croissante sur

$a)\ \mathbb{R} \quad b)\ ]-3; 0[\quad c)\ ]-\infty\,; -3[\quad d)\ ]0;\ +\infty] \ e)]-\infty; -3[\ \cup\ ]0;\ +\infty[$

(Concours 2020-2021/Analyse)

Résolution

$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 10$

$f'(x) = (2x^3)' + (9x^2)' - (10)'$

$= 6x^2 + 18x - 0$

$f'(x) = 6x^2 + 18x$

$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow 6x^2 + 18x = 0$

$\Delta = (18)^2 - 4(6)(0)$

$\Delta = 324$

$x_1 = \frac{-18-\sqrt{324}}{2(6)} = \frac{-18-18}{12} = \frac{-36}{12} = -3$

$x_2 = \frac{-18+\sqrt{324}}{2(6)} = \frac{-18+18}{12} = \frac{0}{12} = 0$

$f(-3) = 2(-3)^3 + 9(-3)^2 - 10 = -54 + 81 - 10 = 37$

$f(0) = 2(0)^3 + 9(0)^2 - 10 = -10$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	37	$\searrow$	-10	$\nearrow$	

f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-3[\ \cup\ ]0;\,+\infty[$

$\boldsymbol{R)\ e}$

EXERCICE 139

Les points critiques de la fonction $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 10$ sont :

$a)\ x = 0\ et\ x = 2\ \ b)\ x = -3\ et\ x = 2\ c)\ x = 0\ et\ x = -10\ \ d)\ x = 0\ et\ x = -3$

(Concours 2020-2021/Analyse)

Résolution

$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 10$

$f'(x) = (2x^3)' + (9x^2)' - (10)'$

$\quad\quad = 6x^2 + 18x - 0$

$f'(x) = 6x^2 + 18x$

$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow 6x^2 + 18x = 0$

$\Delta = (18)^2 - 4(6)(0)$

$\Delta = 324$

$x_1 = \frac{-18-\sqrt{324}}{2(6)} = \frac{-18-18}{12} = \frac{-36}{12} = -3$

$x_2 = \frac{-18+\sqrt{324}}{2(6)} = \frac{-18+18}{12} = \frac{0}{12} = 0$

Les points critiques sont $0\ et - 3$

$\boldsymbol{R)\ d}$

EXERCICE 140

Soit la fonction $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$, la dérivée première de $g(x)$ est :

$a)\ g'(x) = (x-3)(x+2)$ $b) g'^{(x)} = 6x^2 - 6x - 30$ $c)\ g'(x) = 6x^2 + 6x$

$d)\ g'(x) = 6x^2 + 6x - 36$ e) aucune bonne réponse

(Concours 2020-2021/Analyse)

Résolution

$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$

$g'(x) = (2x^3)' - (3x^2)' - (36x)' + (5)'$

$= 6x^2 - 6x - 36 + 0$

$g'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

$\boldsymbol{R)\ e}$

EXERCICE 141

La fonction $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$ atteint son minimum relatif au point d'abscisse

$a)\ x = 3$ $b) x = -3$ $c)\ x = -2$ $d)\ x = 2$ $e) aucune\ bonne\ réponse$

(Concours 2020-2021/Analyse)

Résolution

$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$

$g'(x) = (2x^3)' - (3x^2)' - (36x)' + (5)'$

$= 6x^2 - 6x - 36 + 0$

$g'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 36 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$ (En divisant les deux membres par 6)

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6)$

$= 1 + 24$

$\Delta = 25$

$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2(1)} = \frac{1-5}{2} = -2$

$x_2 = \frac{-(-1)\sqrt{25}}{2(1)} = \frac{1+5}{2} = 3$

$f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 36(-2) + 5 = -16 - 12 + 72 + 5 = 49$

$f(3) = 2(3)^3 - 3(3)^2 - 36(3) + 5 = 54 - 27 - 108 + 5 = -76$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	49	$\searrow$	-76	$\nearrow$	

La fonction atteint son minimum relatif au point d'abscisse $x = 3$ et d'ordonnée $y = -76$

R) a

EXERCICE 142

Soit la fonction polynomiale suivante définie dans $\mathbb{R}$. $f(x) = x^2e^x - 2x$

La dérivée première par rapport à x, $\frac{df}{dx}$ est :

$a)\ 2xe^x \quad b) 2x^2e^x \quad c) 2xe^x - 2 \quad d)\ 2x\,e^x + x^2e^x - 2 \quad d)$ *aucune bonne réponse*

(Concours 2021-2022/Analyse)

Résolution

$f(x) = x^2e^x - 2x$

$\frac{df}{dx} = (x^2)'e^x + (x^2)(e^x)' - (2x)'$

$= 2x\,e^x + x^2e^x - 2$

$\frac{df}{dx} = 2x\,e^x + x^2e^x - 2$

R) d

EXERCICE 143

Soit la fonction polynomiale suivante définie dans $\mathbb{R}$. $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

$f(-1) = 0$.

$a)$ est la droite passant par le point (-1,0) b) Est la tangente à la fonction $f(x)$

$c)$ Est un minimum d) Est un maximum e) aucune bonne réponse

(Concours 2021-2022/Analyse)

Résolution

$f(x) = x^2 + 2x + 1$

L'équation de la tangente d'une fonction $f(x)$ en $x = a$ est donnée par :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Pour trouver le minimum ou le maximum, on doit dériver la fonction :

$f'(x) = (x^2)' + (2x)' + (1)'$

$\quad = 2x + 2 + 0$

$f'(x) = 2x + 2$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow 2x + 2 = 0$

$\quad \Leftrightarrow 2x = -2$

$\quad \Leftrightarrow x = \frac{-2}{2}$

$\quad \Leftrightarrow x = -1$

$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 1$

$\quad = 1 - 2 + 1$

$f(-1) = 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	

La fonction adment $(-1, 0)$ comme le minimum.

EXERCICE 144

Soit la fonction suivante définie dans $\mathbb{R}$. $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$

La dérivée seconde par rapport à $x, \frac{d^2f}{dx^2}$ est

$a)\ 1 \qquad b)\ 2x \qquad c)\ 2 \qquad d)\ 2x - 2 \quad e)\ aucune\ bonne\ réponse$

(Concours 2021-2022/Analyse)

Résolution

$f(x) = \frac{x-2}{x+1}$

$\frac{df}{dx} = \frac{(x-2)'(x+1)-(x-2)(x+1)'}{(x+1)^2}$

$$= \frac{1(x+1)-(x-2)1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1-x+2}{(x+1)^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{(3)'(x+1)^2-3[(x+1)^2]'}{[(x+1)^2]^2}$$

$$= \frac{0(x+1)^2-3(2)(x+1)'(x+1)^{2-1}}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{-6(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{-6}{(x+1)^3}$$

$\boldsymbol{R)\ e}$

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE82

Calculer les dérivés des fonctions suivantes définies par :

$a)\ f(x) = (2x-1)(4x+2)$

$b)\ f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{4x^2+3}$

$c)\ f(x) = \sqrt{(x+1)^3}$

$d)\ f(x) = \frac{5}{-2}$

EXERCICE AE83

Calculer les dérivés des fonctions suivantes définies par :

$a)\ f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$

$b)\ f(x) = \frac{x^2-7x+3}{5x+2}$

$c)\ f(x) = \frac{(x^2-x+1)^3}{(x^3-1)^2}$

$d)\ f(x) = (x^2+x+1)^{-7}(x-2)^{-2}$

EXERCICE AE84

On donne $f(x) = \frac{4}{3x+1}$.

Calculer $f''(2)$

EXERCICE AE85

La dérivée $\sqrt{x^2}$ est :

$a)\ 2x \quad b)\ {}^{x}/_{2} \quad c)\ \frac{x}{\sqrt{x^2}} \quad d)\ {}^{1}/_{x} \quad e)\ {}^{1}/_{x^2}$

EXERCICE AE86

La dérivée de $\log\sqrt{x^2+6x}$ est :

$a)\frac{3x}{\sqrt{x^2+6x}} \quad b)\frac{6}{\sqrt{x^2+6x}} \quad c)\frac{x+3}{x^2+6x} \quad d)\ \infty \quad e)\ 0$

EXERCICE AE87

Calculer la dérivée de $\sqrt{x^3+3}$ en 2

$a)\ 4 \quad b)\ 9 \quad c)\ \frac{6}{\sqrt{11}} \quad d)\ \frac{3}{\sqrt{10}}$

EXERCICE AE88

Calculer

$a)(5^x)'$

$b)(\ln x^2)'$

$c)\ \left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)'$

$d)\ (x^2\ln x)'$

$e)\ \left(a^{x^2}\right)'$

$f)\ \left(\frac{a^x}{x}\right)'$

$g)\ [\ln(\ln x)\ ]'$

$h)\ (e^x - e^{-2x})'$

EXERCICE AE89

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$a)\ f(x) = (x-3)(2+x^3) - 3x$

$b)\ f(x) = 2x^3 - \frac{x+3}{1-x^2}$

$c)\ f(x) = \frac{x+3}{x-1} - 3x^7$

VII. RENDRE RATIONNEL LE DENOMINATEUR D'UNE FRACTION

1er cas : Le dénominateur est un monôme :

D'une manière générale, on a :

$$\frac{a}{\sqrt[n]{x^p}} = \frac{a.\sqrt[n]{x^{n-p}}}{\sqrt[n]{x^p}.\sqrt[n]{x^{n-p}}} = \frac{a.\sqrt[n]{x^{n-p}}}{x}$$

En particulier, pour les radicaux d'indice deux, on multiplie les deux termes de la fraction par ce monôme irrationnel.

Exemples :

1) $\frac{5}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{5.\sqrt[3]{2^{3-1}}}{3\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2^{3-1}}}$

$= \frac{5.\sqrt[3]{2^2}}{3\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2^2}}$

$= \frac{5.\sqrt[3]{2^2}}{3\sqrt[3]{8}.}$

$= \frac{5.\sqrt[3]{2^2}}{3.2}$

$= \frac{5.\sqrt[3]{2^2}}{6}$

2) $\frac{1}{5\sqrt{3}} = \frac{1.\sqrt{3}}{5\sqrt{3}.\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{15}$

2e cas : Le dénominateur est un binôme ou un trinôme :

On multiplie les deux termes de la fraction par le conjugué du dénominateur.

Voici quelques cas :

Dénominateur	Conjugué	Produit
$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$	$\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$	$a - b$
$\sqrt{a} \pm b$	$\sqrt{a} \mp b$	$a - b^2$
$a \pm \sqrt{b}$	$a \mp \sqrt{b}$	$a^2 - b$
$\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$a \pm b$

$\sqrt[3]{a} \pm b$	$\sqrt[3]{a^2} \mp b\sqrt[3]{a} + b^2$	$a \pm b^3$
$a \pm \sqrt[3]{b}$	$a^2 \mp a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}$	$a^3 \pm b$

EXERCICE 145

La quantité $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ est égale à

$a) -\sqrt{2}-\sqrt{3}$ $\quad b)\sqrt{2}-\sqrt{3}$ $\quad c)\ \sqrt{2}+\sqrt{3}$ $\quad d)\ \sqrt{2}-\sqrt{3}$

(Concours 2014-2015/Algèbre)

Résolution

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1.(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3}-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-1}$$

$$= -\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 146

La quantité $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ est égale à :

$a)\frac{\sqrt{5}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2}$ $\quad b)\ \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{5-2\sqrt{6}}$ $\quad c)\ \frac{\sqrt{5}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{5-2\sqrt{6}}$ $\quad d)\ \frac{\sqrt{5}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}$ $\quad e)ABR$

(Concours 2018-2018/Algèbre)

Résolution

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}.[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}{[(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}][(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}$$

$$= \frac{\sqrt{6}.[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}.[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}{(\sqrt{2})^2+2.\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}$$

$= \frac{\sqrt{6}.[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}{2+2\sqrt{6}+3-5}$

$= \frac{\sqrt{6}.[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}{2\sqrt{6}}$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$

R) e

VIII. COMPLEMENTS

EXERCICE 147

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x+2}$. La quantité $a - b + c$ telle que pour tout $x \neq 2$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$ est égale :

$a) - 11 \quad b)\ 8 \quad c) - 10 \quad d)\ 13 \quad e)\ 12$

(Concours 2023-2024/Algèbre)

Résolution

$f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x+2}$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2} \Leftrightarrow \frac{2x^2+3x+1}{x+2} = \frac{ax(x+2)+b(x+2)+c}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+3x+1}{x+2} = \frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+3x+1}{x+2} = \frac{ax^2+(2a+b)x+(2b+c)}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \quad (1) \\ 2a + b = 3 \quad (2) \\ 2b + c = 1 \quad (3) \end{cases}$$

$(1)\ dans\ (2) \Rightarrow 2(2) + b = 3 \ \Leftrightarrow b = 3 - 4$

$\Leftrightarrow b = -1 \qquad (4)$

$(4)\ \ dans\ (3)\ \Rightarrow 2(-1) + c = 1\ \Leftrightarrow c = 1 + 2$

$\Leftrightarrow c = 3$

$a = 2, b = -1\ \ et\ c = 3$

$a - b + c = 2 - (-1) + 3$

$= 2 + 1 + 3$

$= 6$

$\boldsymbol{R)\ f}$

EXERCICE 148

Le domaine de variation de la fonction $f(x) = cosinus\ x$ est

$a)\ \mathbb{R} - \{1\}$ $b)\ ]-\infty\ ;\ +\infty[$ $c)\ \mathbb{R}$ $d)\ \mathbb{R} - \{0\}$ $e)\ [-1; 1]$

(Concours 2022-2023/Analyse)

Résolution

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $cosinus\ x \in [-1\ ; 1]$

$R)\ e$

EXERCICE 149

Soit $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{4x+9} + \sqrt{3x-8}$.

La valeur de $f(-5)$ de la fonction au point x=5 est égale à :

$a.\ -2$ $b. -3$ $c. -8$ $d. aucune\ bonne\ réponse$

(Concours 2014-2015/Algèbre)

Résolution

$f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{4x+9} + \sqrt{3x-8}$

$f(-5) = \sqrt{2 \times (-5) + 1} - \sqrt{4 \times (-5) + 9} + \sqrt{3 \times (-5) - 8}$

$= \sqrt{-9} - \sqrt{-11} + \sqrt{-23}$

La fonction n'est pas définie au point $x = -5$

$\boldsymbol{R)\ d.}$

EXERCICE 150

On considère un angle $\theta\ tel\ que \sin\theta + \cos\theta = r$.

Le nombre réel r appartient dans l'intervalle :

$a. [-1; 1]$ $b.]-1; 1[$ $c.]-2; 2]$ $d. pas\ de\ bonne\ réponse$

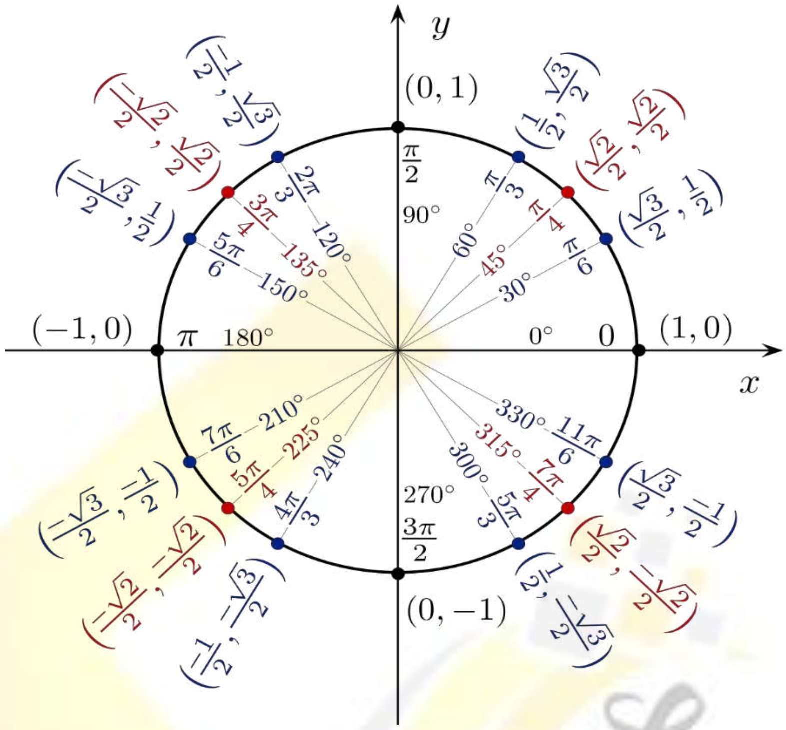
(Concours 2014-2015/Algèbre)

Résolution

$\sin\theta + \cos\theta = r$

On sait que pour tout angle θ, on a : $\sin\theta \in [-1; 1]$ et $\cos\theta \in [-1; 1]$

En regardant et en essayant de faire la somme des angles remarquables :



On conclut que $r = \sin\theta + \cos\theta \in \left[\frac{-\sqrt{3}-1}{2}; \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right]$

Ou $r = \sin\theta + \cos\theta \in [-1,366025404\ ;\ 1,366025404\ ]$

$\boldsymbol{R})\ \boldsymbol{d}$

EXERCICE 151

On considère un angle θ *tel que* $\sin\theta + \cos\theta = r$.

Le réel R=100 $\cos\theta \sin\theta$ est donné par :

$a. r^2$ $\qquad b. \frac{r^2-1}{2}$ $\qquad c. r^2 - 1$ $\quad d.$ *aucune bonne réponse*

(Concours 2014-2015/Algèbre)

Résolution

R=100 $\cos\theta \sin\theta$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{50} = 2\cos\theta \sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{50} + 1 = 2\cos\theta \sin\theta + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{50} + 1 = 2\cos\theta \sin\theta + sin^2\theta + cos^2\theta \qquad car\ sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$\Leftrightarrow \frac{R}{50} + 1 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 \quad car\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\Leftrightarrow \frac{R}{50} + 1 = r^2 \quad car\ \sin\theta + \cos\theta = r$

$\Leftrightarrow \frac{R}{50} = r^2 - 1$

$\Leftrightarrow R = 50(r^2 - 1)$

$\boldsymbol{R)\ d.}$

EXERCICE 152

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x^3} + x^2 - x - 1$. Donner la valeur de $f(2)$

$a. \sqrt{8} - 1 \quad b. \sqrt{27} + 5 \quad c. 27 - \sqrt{3} \quad d. 1 + \sqrt{8} \quad e. 2\sqrt{2} + 1$

(Concours 2018-2019/Analyse)

Résolution

$f(x) = \sqrt{x^3} + x^2 - x - 1$

$f(2) = \sqrt{2^3} + 2^2 - 2 - 1$

$= \sqrt{8} + 1$

$= \mathbf{1 + \sqrt{8}}$

$= \mathbf{2\sqrt{2} + 1}$

$\boldsymbol{R)\ d\ et\ e}$

EXERCICE 153

Soit $\theta \in \mathbb{R}\ tel\ que\ \sin\theta = a.$

$\cos(2\theta)$ exprimé en fonction de a vaut :

$a. 2a^2 - 1 \quad b. 1 - 2a^2 \quad c. 1 + a \quad d. \frac{1+a}{2}$

(Concours 2012-2013/Algèbre)

Résolution

$\cos(2\theta) = cos^2\theta - sin^2\theta$

$= 1 - sin^2\theta - sin^2\theta \quad car\ \ cos^2\theta = 1 - sin^2\theta$

$= 1 - 2sin^2\theta$

$= 1 - 2a^2$

$R)\ b$

EXERCICE 154

On considère un angle θ $tel\ que$ $\sin\theta + \cos\theta = a.$

Le réel K= $\sin\theta\cos\theta$ est donné par :

$a.\, a^2 + 1$ $\quad b.\, a^2$ $\quad c.\, a^2 - 1$ $\quad d) - 2a + 1$ $\quad e.\, pas\ de\ bonne\ réponse$

(Concours 2022-2023/Algèbre)

Résolution

$$K = \sin\theta\cos\theta \Leftrightarrow 2K = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow 2K + 1 = 2\sin\theta\cos\theta + 1$$

$$\Leftrightarrow 2K + 1 = 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta$$

$$\Leftrightarrow 2K + 1 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$$

$$\Leftrightarrow 2K + 1 = (\sin\theta + \cos\theta)^2$$

$$\Leftrightarrow 2K + 1 = a^2$$

$$\Leftrightarrow 2K = a^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{a^2-1}{2}$$

$R)\ e$

EXERCICE 155

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ $tel\ que$ $\sin\theta = a.$

Le réel $L = tg\ \theta$, exprimé en fonction de a vaut :

$a.\frac{1}{1-a}$ $\quad b.\frac{a-1}{\sqrt{1-a^2}}$ $\quad c.\sqrt{\frac{a^2}{1-a^2}}$ $\quad d.\, pas\ de\ bonne\ réponse$

(Concours 2012-2013/Algèbre)

Résolution

$$L = tg\ \theta$$

$$\Leftrightarrow L^2 = tg^2\theta$$

$$\Leftrightarrow L^2 = \frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}$$

$$\Leftrightarrow L^2 = \frac{sin^2\theta}{1-sin^2\theta}$$

$\Leftrightarrow L^2 = \frac{a^2}{1-a^2}$

$\Leftrightarrow L = \sqrt{\frac{a^2}{1-a^2}}$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 156

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $\sin\theta = a.$

Le réel K=$sin^2\theta - cos^2\theta$ exprimé en fonction de a vaut :

$a.\, 2a^2 - 1$ $\quad b.\, a^2 - 2$ $\quad c.\, 1 + a$ $\quad d.$ *pas de bonne réponse*

(Concours 2012-2013/Algèbre)

Résolution

K=$sin^2\theta - cos^2\theta$

$= sin^2\theta - (1 - sin^2\theta) \quad car\ \ cos^2\theta = 1 - sin^2\theta$

$= sin^2\theta - 1 + sin^2\theta$

$= 2sin^2\theta - 1$

$= 2a^2 - 1$

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 157

Quelles sont les expressions factorisées de : $4x^2 - 12x + 9$?

$a)\ (2x-3)^2 \quad b)(2x+3)(2x-3) \quad c)(2x+3)^2 \quad d)\ (x-\frac{3}{2})^2 \quad e)\ ABR$

(Concours 2017-2018/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

(Concours 2022-2023/Analyse)

Résolution

$4x^2 - 12x + 9$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 6x - 6x + 9 \qquad car\ 12x = 6x + 6x$

$\Leftrightarrow (4x^2 - 6x) + (-6x + 9) \qquad Associativité$

$\Leftrightarrow 2x(2x-3) - 3(2x-3) \qquad Mise\ en\ évidence$

$\Leftrightarrow (2x-3)(2x-3)$

$\Leftrightarrow (2x-3)^2$

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 158

Soit la fonction $f(x)=\sqrt{x^3}+x^2-x-1$. Deux assertions donnent la valeur de f pour $x=3$:

$a.9$ $b.\sqrt{27}+5$ $c.27-\sqrt{3}$ $d.\sqrt{9}-5$ $e.\sqrt{3^3}+5$

(Concours 2017-2018/Analyse)

(Concours 2019-2020/Analyse)

(Concours 2022-2023/Analyse)

Résolution

$f(x)=\sqrt{x^3}+x^2-x-1.$

$f(3)=\sqrt{3^3}+3^2-3-1$

$=\boldsymbol{\sqrt{3^3}+5}$

$=\boldsymbol{\sqrt{27}+5}$

$\boldsymbol{R)\ b\ et\ e}$

EXERCICE 159

On considère un angle θ $tel\ que\ \sin\theta+\cos\theta=a.$

Le réel K= $\sin\theta\cos\theta$ est donné par :

$a.a^2$ $b.\frac{a^2-1}{2}$ $c.a^2-1$ $d.aucune\ bonne\ réponse$

(Concours 2011-2012/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Algèbre)

Résolution

K= $\sin\theta\cos\theta \Leftrightarrow 2K=2\cos\theta\sin\theta$

$\Leftrightarrow 2K+1=2\sin\theta\cos\theta+1$

$\Leftrightarrow 2K+1=2\sin\theta\cos\theta+sin^2\theta+cos^2\theta$ $car\ sin^2\theta+cos^2\theta=1$

$\Leftrightarrow 2K+1=(\sin\theta+\cos\theta)^2$ $car\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$\Leftrightarrow 2K + 1 = a^2 \qquad car\ \sin\theta + \cos\theta = r$

$\Leftrightarrow 2K = a^2 - 1$

$\Leftrightarrow K = \frac{a^2-1}{2}$

$\boldsymbol{R)\ b}$

EXERCICE 160

On considère un angle $\theta\ tel\ que \sin\theta + \cos\theta = a$.

Le réel L= $(sin^3\theta + cos^3\theta)$ est donné par :

$a. a^2 \qquad b. \frac{a^2-1}{2} \qquad c. a^2 - 1 \quad d. aucune\ bonne\ réponse$

(Concours 2011-2012/Algèbre)

(Concours 2013-2014/Algèbre)

(Concours 2019-2020/Algèbre)

Résolution

L= $(sin^3\theta + cos^3\theta)$

$\Leftrightarrow L = (\sin\theta + \cos\theta)(sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + cos^2\theta) \qquad car\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$\Leftrightarrow L = (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$

$\Leftrightarrow 2L = 2(\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$

$\Leftrightarrow 2L = (\sin\theta + \cos\theta)(2(1 - \sin\theta\cos\theta)) \qquad associativité$

$\Leftrightarrow 2L = (\sin\theta + \cos\theta)(2 - 2\sin\theta\cos\theta)$

$\Leftrightarrow 2L = (\sin\theta + \cos\theta)(2 - 2\sin\theta\cos\theta - 1 + 1)$

$\Leftrightarrow 2L = (\sin\theta + \cos\theta)(3 - 2\sin\theta\cos\theta - 1)$

$\Leftrightarrow 2L = (\sin\theta + \cos\theta)(3 - 2\sin\theta\cos\theta - (sin^2\theta + cos^2\theta))$

$\Leftrightarrow 2L = (\sin\theta + \cos\theta)(3 - 2\sin\theta\cos\theta - sin^2\theta - cos^2\theta)$

$\Leftrightarrow 2L = (\sin\theta + \cos\theta)(3 - (2\sin\theta\cos\theta + sin^2\theta + cos^2\theta))$

$\Leftrightarrow 2L = (\sin\theta + \cos\theta)(3 - (\sin\theta + \cos\theta)^2)$

$\Leftrightarrow 2L = a(3 - a^2)$

$\Leftrightarrow L = \frac{a(3-a^2)}{2}$

$\boldsymbol{R}) \boldsymbol{d}.$

EXERCICE 161

Déterminer m pour que les trois nombres $\log_a 2, \log_a(5^m - 2)$, $\log_a(5^m + 2)$ soient en progression arithmétique.

(Concours 2008-2009/Algèbre)

Résolution

Trois nombres a, b et c forment une progression arithmétique si et seulement si le terme du milieu est la moyenne arithmétique des termes qui l'encadrent.

$$b = \frac{a+c}{2}$$

$\log_a 2, \log_a(5^m - 2)$, $\log_a(5^m + 2)$ Forment une progression arithmétique si et seulement si :

$$\log_a(5^m - 2) = \frac{\log_a 2 + \log_a(5^m + 2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_a(5^m - 2) = \log_a 2 + \log_a(5^m + 2)$$

$$\Leftrightarrow \log_a(5^m - 2)^2 = \log_a 2\,(5^m + 2)$$

$$\Leftrightarrow (5^m - 2)^2 = 2(5^m + 2)$$

$$\Leftrightarrow (5^m)^2 - 2 \times 5^m \times 2 + 4 = 2.5^m + 4$$

$$\Leftrightarrow 5^{2m} - 4.5^m + 4 = 2.5^m + 4$$

Posons $5^m = t$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = 2t + 4$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 - 2t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 6t = 0$$

$$\Leftrightarrow t(t - 6) = 0$$

$t_1 = 0$ (à $rejeter$) $\quad t_2 = 6$

Pour $t = 6 \Leftrightarrow 5^m = 6$

$$\Leftrightarrow \log_5 5^m = \log_5 6$$

$$\Leftrightarrow m \log_5 5 = \log_5 6$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{m = \log_5 6}$$

EXERCICE 162

On considère un angle θ $tel\ que \sin\theta + \cos\theta = a$.

Le réel M= $\sin 2\theta$ est donné par :

$a)\ 2a^2 \quad b)\ a^2 - 1 \quad c)\ 2(a^2 - 1) \quad d)\ 1$

(Concours 2013-2014/Algèbre)

Résolution

M= $\sin 2\theta$

$\Leftrightarrow M = 2\sin\theta\cos\theta$

$\Leftrightarrow M + 1 = 2\sin\theta\cos\theta + 1$

$\Leftrightarrow M + 1 = \ 2\sin\theta\cos\theta + sin^2\theta + cos^2\theta$

$\Leftrightarrow M + 1 = (\sin\theta + \cos\theta)^2$

$\Leftrightarrow M + 1 = a^2$

$\Leftrightarrow M = a^2 - 1$

$\boldsymbol{R)\ b}$

EXERCICE 163

Soit $f(x) = \sqrt{2x+3} - \sqrt{4x+9} + \sqrt{3x-8}$.

La valeur de $f(-5)$ de la fonction au point x=-5 est égale à :

a. -2 b. 2 c. $\frac{1}{4}$ d. aucune bonne réponse

(Concours 2019-2020 / Algèbre)

Résolution

$f(x) = \sqrt{2x+3} - \sqrt{4x+9} + \sqrt{3x-8}$

$f(-5) = \sqrt{2(-5)+3} - \sqrt{4(-5)+9} + \sqrt{3(-5)-8}$

$= \sqrt{-10+3} - \sqrt{-20+9} + \sqrt{-15-8}$

$= \sqrt{-7} - \sqrt{-11} + \sqrt{-23}$

On sait que la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas dans $\mathbb{R}$. Donc la fonction n'est pas définie au point x=-5

$\boldsymbol{R)\ d}$

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE90

Le domaine de variation de la fonction $f(x) = tan\ x$ est

$a)\ \mathbb{R} - \{1\}$ $b)\ ]-\infty\ ;\ +\infty[$ $c)\ \mathbb{R}$ $d)\ \mathbb{R} - \{0\}$ $e)\ [-1; 1]$

EXERCICE AE91

Soit $f(x) = \sqrt{2x+5} - \sqrt{4x+26} + \sqrt{3x-8}$.

La valeur de $f(2)$ de la fonction au point x=5 est égale à :

$a.\ 3$ $b. 6$ $c. \sqrt{-2}$ $e. 3 - 6$ $e. aucune\ bonne\ réponse$

EXERCICE AE92

Factoriser les expressions suivantes :

$a)\ 8x^2 - 14x + 3$

$b)\ 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

$c)\ x^2 - x + \frac{1}{4}$

EXERCICE AE93

Soit $\theta \in \mathbb{R}\ tel\ que\ \sin\theta = a.$

Le réel K=$sin^2\theta - cos^2\theta + \tan^2\theta$ exprimé en fonction de a vaut :

$a. 2a^2 - 1 + \frac{a^2}{1-a^2}$ $b. 2a^2 - 1 + \frac{1-a^2}{a^2}$ $c. 1 + a$ $d. 2a^2 - 1$

DEUXIÈME PARTIE : TRIGONOMETRIE ET CALCUL

I. UNITES D'ARCS ET D'ANGLES

$(360^{\circ} = 400\ gr = 2\pi\ rad\ )$

$\Leftrightarrow (180^{\circ} = 200\ gr = \pi\ rad)$

I.1 Conversion Degré-grade

$180^{\circ} = 200\ gr$

$\Leftrightarrow \frac{180^{\circ}}{180} = \frac{200}{180} gr$

$\Leftrightarrow 1^0 = \frac{10}{9} gr$

Pour convertir degré en grade, il suffit de multiplier le nombre de degré donné par $^{10}/_{9}$ pour avoir sa valeur correspondante en grade.

Inversement, pour convertir de grade en degré, il suffit de multiplier le nombre donné par $^{9}/_{10}$.

Exemples:

1) Convertir

a) 50°= ? gr
b) 270°= ? gr

Résolution :

$a)$ On sait que $1^0 = \frac{10}{9} gr$

$\Rightarrow 50° = 50 \times \frac{10}{9} gr$

$50° = 55,555 \dots\ gr$

$b)$ On sait que $1^0 = \frac{10}{9} gr$

$\Rightarrow 270° = 270 \times \frac{10}{9} gr$

$50° = 300\ gr$

2) 100 gr= ? °

On sait que $1\ gr = \frac{9}{10} gr$

$\Rightarrow 100° = 100 \times \frac{9}{10} gr$

$100\ gr = 90°$

I.2 Conversion Degré-radians

$$180^{\circ} = \pi\, rad$$

$$\Leftrightarrow \frac{180^{\circ}}{180} = \frac{\pi}{180}\, rad$$

$$\Leftrightarrow 1^{0} = \frac{\pi}{180}\, rad$$

Pour convertir degré en radians, il suffit de multiplier le nombre de degré donné par $\frac{\pi}{180}$ pour avoir sa valeur correspondante en radians.

Inversement, pour convertir de grade en degré, il suffit de multiplier le nombre donné par $180/_{\pi}$.

Exemples :

Convertir :

$a)$ 45°= ? rad

$b)$ $\frac{2\pi}{3}\, rad = ?°$

Résolution

$a)$ On sait que $1^{0} = \frac{\pi}{180}\, rad$

$$\Rightarrow 45° = 45 \times \frac{\pi}{180}\, rad$$

45°=$\frac{\pi}{4}\, rad$

$b)$ On sait que 1 rad=$180/_{\pi}$ °

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{3}\, rad = \frac{2\pi}{3} \times \frac{180}{\pi}$$

$$\frac{2\pi}{3}\, rad = 120°$$

I.3 Conversion grade-radians

$$200\, gr = \pi\, rad$$

$$\Leftrightarrow \frac{200}{200}\, gr = \frac{\pi}{200}\, rad$$

$$\Leftrightarrow 1\, gr = \frac{\pi}{200}\, rad$$

Pour convertir grade en radians, il suffit de multiplier le nombre de grade donné par $\frac{\pi}{200}$ pour avoir sa valeur correspondante en radians.

Inversement, pour convertir de grade en degré, il suffit de multiplier le nombre donné par ${}^{200}/_{\pi}$.

I.4 Conversion Dégré décimal – Dégré minute, seconde

Pour convertir un dégré décimal en degré minute et seconde, on procède comme suit :

- Multiplier la partie décimale par 60.
- Après multiplication, la partie entière trouvée constitue le nombre de minutes.
- Si dans le nombre de minutes, il y a une partie décimale, la multiplier par 60 pour avoir la valeur correspondante en seconde.

Exemple

Convertir le degré décimal suivant en degré minute seconde $25°, 48$

$$\begin{aligned} 25°, 48 &= 25° + (0{,}48 \times 60) \\ &= 25° + 28{,}8' \\ &= 25°28' + (0{,}8) \times 60 \\ &= 25°\, 28'48'' \end{aligned}$$

Pour convertir le degré minute seconde en degré décimal, on procède comme suit : On additionne le nombre de degré, le nombre de minutes divisé par 60 et le nombre de seconde divisé par 3600.

$$d°m's'' = d + \frac{m}{60} + \frac{s}{3600}$$

Exemple :

Convertir en degré decimale la valeur suivante : $34°\, 48'56''$

$$\begin{aligned} 34°\, 48'25'' &= 34 + \frac{48}{60} + \frac{56}{3600} \\ &= 34 + 0{,}8 + 0{,}015555555555 \\ &= 34{,}81555 \ldots ° \end{aligned}$$

EXERCICE 164

Convertir en degré décimal l'angle au centre $\alpha = 58°25'53''$

Réponse :

1. $59{,}1849°$
2. $57{,}6378\,°$
3. $58{,}4314°$
4. $4{,}3559°$
5. $25{,}3857\,°$

(Concours 2022-2023/Trigo et calcul)

Résolution

$\alpha = 58°25'53''$

$= 58 + \frac{25}{60} + \frac{53}{3600}$

$= 58 + 0{,}4167 + 0{,}0147$

$= 58{,}4314\,°$

$R)\ 3$

EXERCICE 165

Convertir $50{,}8836°$ en grades

Réponse :

(Concours 2022-2023/Trigo et calcul)

Résolution

On sait que $90° = 100\ grades \Rightarrow \frac{90}{90}° = \frac{100}{90}\ grades$

$\Leftrightarrow 1° = \frac{10}{9}\ grades$

D'où $50{,}8836° = 50{,}8836 \times \frac{10}{9}\ grades$

$= 56{,}5373\ grades$

EXERCICE 166

Compléter le tableau suivant :

Angle Θ en degré	Angle Θ en radian
30°	$\pi/6$
…..	$\pi/3$
270°	…..
360°	….

(Concours 2016-2017/Trigo et calcul)

Résolution

On sait que 1 rad=$180/_{\pi}$ °

$\Rightarrow \frac{\pi}{3}\,rad = \frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi}$

$\frac{\pi}{3}\,rad = 60°$

On sait que $1^0 = \frac{\pi}{180}\,rad$

$\Rightarrow 270° = 270 \times \frac{\pi}{180}\,rad$

45°=$\frac{3\pi}{2}\,rad$

$\Rightarrow 360° = 360 \times \frac{\pi}{180}\,rad$

$360° = 2\pi\,rad$

Le tableau complété est :

Angle Θ en degré	Angle Θ en radian
30°	$\pi/6$
60°	$\pi/3$
270°	$\frac{3\pi}{2}$
360°	2π

EXERCICE 167

Compléter le tableau suivant :

Angle ϴ en degré	Angle ϴ en radian
30°	$\pi/6$
…..	$4\pi/3$
180°	…..
…..	$\pi/2$

(Concours 2018-2019/Trigo et calcul)

Résolution

On sait que 1 rad=$180/\pi$ °

$\Rightarrow \frac{4\pi}{3}\,rad = \frac{4\pi}{3} \times \frac{180}{\pi}$

$\frac{4\pi}{3}\,rad = 240°$

On sait que $1^0 = \frac{\pi}{180}\,rad$

$\Rightarrow 180° = 180 \times \frac{\pi}{180}\,rad$

180°=$\pi\,rad$

1 rad=$180/\pi$ °

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\,rad = \frac{\pi}{2} \times \frac{180}{\pi}$

$\frac{\pi}{2}\,rad = 90°$

Le tableau complété est :

Angle ϴ en degré	Angle ϴ en radian
30°	$\pi/6$
240°	$4\pi/3$
180°	π
90°	$\pi/2$

EXERCICE 168

Que vaut en radians un angle de 315° ?

1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{3\pi}{4}$ 3. 2π 4. $\frac{7\pi}{4}$ 5. $\frac{5\pi}{3}$

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

Résolution

On sait que $180\,° = \pi\, rad$

$$\Leftrightarrow \frac{180\,°}{180} = \frac{\pi}{180}\, rad$$

$$\Leftrightarrow 1° = \frac{\pi}{180}\, rad$$

Donc $135° = 135 \times \frac{\pi}{180}\, rad$

$$135\,° = \frac{3\pi}{4}$$

***R*) 2**

EXERCICE 169

Que vaut en degré l'angle $\frac{4\pi}{3}\, rad$?

1. $360\,°$ 2. $120°$ 3. $45°$ 4. $135°$ 5. $240°$

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

Résolution

On sait que $\pi\, rad = 180\,°$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{\pi}\, rad = \frac{180}{\pi}\,°$$

$$\Leftrightarrow 1\, rad = \frac{180}{\pi}$$

Donc $\frac{4\pi}{3}\, rad = \frac{4\pi}{3} \times \frac{180}{\pi}$

$$= \frac{720\pi}{3\pi}$$

$$= 240°$$

***R*) 5**

EXERCICE 170

Soit un angle au centre de $56° \, 27'48''$. En degré décimal, cet angle au centre vaut :

$a)\ 56°, 14159$ $\quad b)\ 56°, 25584$ $\quad c)\ 56°, 00000$ $\quad d)\ 56°, 0081$ $\quad e)\ 56°, 46333$

(Concours 2020-2021/Trigo et calcul)

Résolution

$$56° \, 27'48'' = \left(56 + \frac{27}{60} + \frac{48}{3600}\right)°$$

$$= 56 + 0{,}45 + 0{,}01333333$$

$$= 56{,}4633333333$$

$\boldsymbol{R)\ e}$

EXERCICE 171

La période d'un pendule est donnée par la relation $p = 2\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$ où L est la longueur (en mètre), θ est l'angle d'oscillation et $g = 9{,}8$ (constante de gravité). La valeur de l'angle θ vaut en degré si on donne $L = 26\ m, p = 2{,}3\ s$

$a)\ 120°$ $\quad b)\ 150°$ $\quad c)\ 60°$ $\quad d)\ 45°$ $\quad e)\ pas\ de\ bonne\ réponse$

(Concours 2020-2021/Trigo et calcul)

Résolution

$$p = 2\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

$$p^2 = \left(2\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}\right)^2$$

$$p^2 = 4\frac{L\cos\theta}{g}$$

$$p^2 = \frac{4\,L\,\cos\theta}{g}$$

$$4\mathrm{L}\cos\theta = p^2 g$$

$$\cos\theta = \frac{p^2 g}{4L}$$

$$= \frac{(2{,}3)^2 \times 9{,}8}{4 \times 26}$$

$$= \frac{5,29 \times 9,8}{104}$$

$$= \frac{51,842}{104}$$

$\cos\theta = 0,498480769 \Rightarrow \theta = Arc\cos 0,498480769$

$\theta = 60,1004607°$

R*) *c

EXERCICE 172

Dans un cercle, l'angle au centre mesure $45°\,25'40''$. En degré décimal, cet angle vaut :

$1)\ 18°, 117 \quad 2)\ 30°, 328 \quad 3)\ 40'' \quad 4)\ 35° \quad 5) 45°, 427$

(Concours 2021-2022/Trigo et calcul)

Résolution

$$45°\,25'40'' = \left(45 + \frac{25}{60} + \frac{40}{3600}\right)°$$

$$= 45 + 0,41666666666666 + 0,01111111111$$

$$= 45,42777777777777777777$$

***R*) 5**

EXERCICE 173

La conversion de $45°\,25'40''$ en grade vaut :

$1)\ 50\ gr \quad 2)\ 20\ gr \quad 3)\ 58\ gr \quad 4)\ 15\ gr \quad 5)\ Aucune\ réponse\ n'est\ vraie$

(Concours 2021-2022/Trigo et calcul)

Résolution

Convertissons d'abord $45°\,25'40''$ en degré décimal :

$$45°\,25'40'' = \left(45 + \frac{25}{60} + \frac{40}{3600}\right)°$$

$$= 45 + 0,41666666666666 + 0,01111111111$$

$$= 45,42777777777777777777$$

$45°\,25'40'' = 45,43°$

$45, 43° = ?\ gr$

On sait que $90\,° = 100\ gr$

$$\Leftrightarrow \frac{90}{90}\,° = \frac{100}{90}\ gr$$

$$\Leftrightarrow 1\,° = \frac{10}{9}\ gr$$

$$45{,}43\,° = 45{,}43\ \times \frac{10}{9}$$

$$= \frac{454{,}3}{9}$$

$$= 50{,}4777777777\ gr$$

***R*) 1**

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE94

Evaluer en grades et en radians les angles suivants :

a) $15°$

b) 53°45'

c) 200°30'

EXERCICE AE95

Evaluer en degrés et en radians les angles dont les mesures en grades sont :

a) 50
b) 124
c) 150
d) 25
e) 335
f)200
g) 65
h) 50,75

EXERCICE AE96

Evaluer en degrés et en grades les angles dont les mesures en radians sont :

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{11\pi}{6}$

EXERCICE AE97

Convertir en degré décimal l'angle au centre $\alpha = 28°50'36''$

a) $28,8433°$ b) $28{,}83$ c) $36,833333\,°$ d) $28{,}5036°$

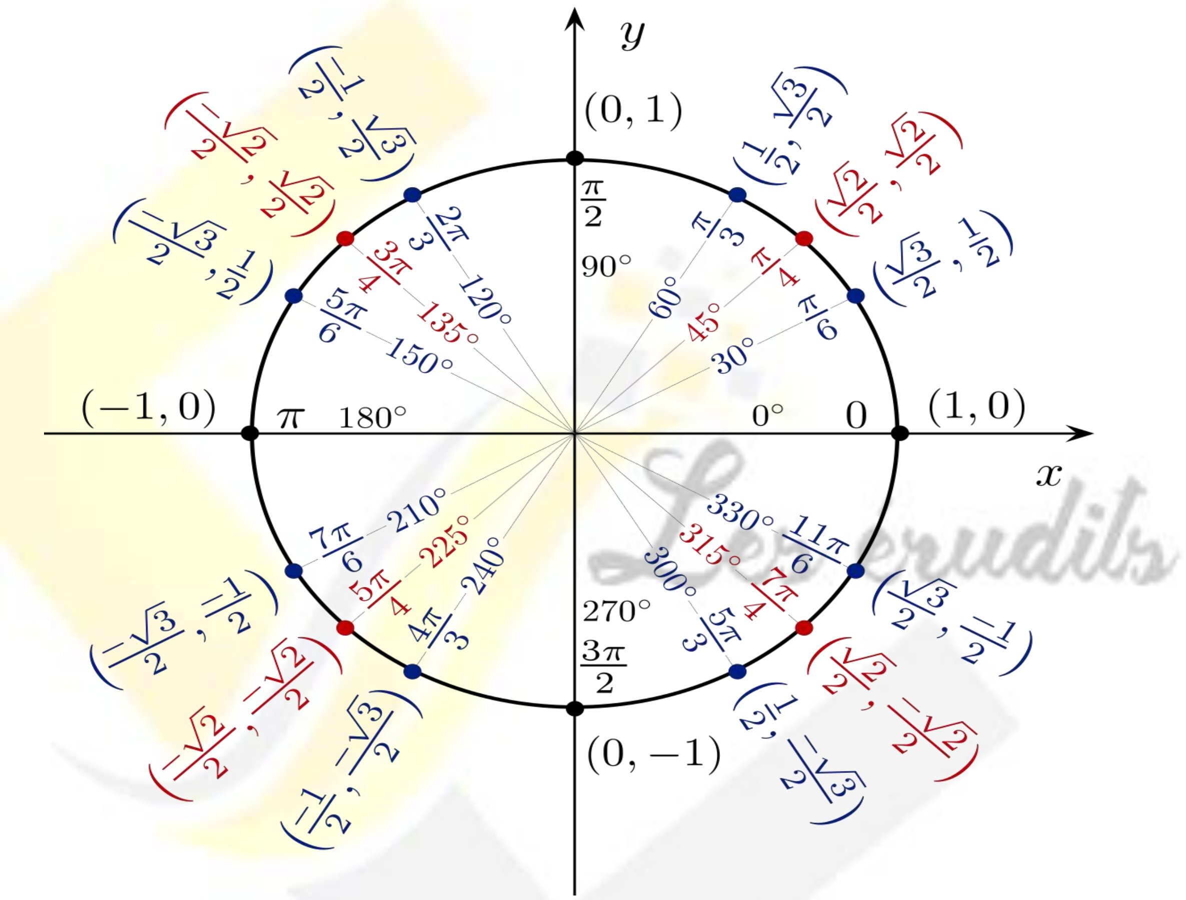
EXERCICE AE98

a) Convertir $20{,}856°$ en grades

b) La conversion de $25°\,15'20''$ en grade vaut :........

c) Dans un cercle, l'angle au centre mesure $15°\,45'30''$. En degré décimal, cet angle vaut :...........

II. RAPPORTS TRIGONOMETRIQES DES QUELQUES ANGLES REMARQUABLES



La première valeur est pour le cos et la deuxième pour sinus.

θ	Premier quadrant					Deuxième quadrant				Troisième quadrant				Quatrième quadrant			
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
	0π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\theta$	$\|\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\|\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\|\|$
$\sec\theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\|\|$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\|\|$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\|\|$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$cosec\ \theta$	$\|\|$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	-1	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\|\|$

EXERCICE 174

On donne $y = \sin(30°) + \cos(60°)$. Notre y est donné par :

$a. 6 \quad b. 3 \quad c. \frac{1}{2} \quad d. 1 \quad e. Aucune\ bonne\ réponse$

(Concours 2023-2024/Trigo et calcul)

Résolution

$y = \sin(30°) + \cos(60°)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$y = 1$

$R)\ d$

EXERCICE 175

Trouver la valeur de y avec l'équation : $y = \tan(30°) \times \cot(30°)$

$a. y = -1 \quad b.\ y = 1 \quad c. y = 30 \quad d.\ \ y = 20 \quad e. y = 14$

(Concours 2023-2024/Trigo et calcul)

Résolution

$y = \tan(30°) \times \cot(30°)$

$= \frac{\sin 30°}{\cos 30°} \times \frac{\cos 30°}{\sin 30°}$

$y = 1$

$\boldsymbol{R)\ b}$

EXERCICE 176

Donner la valeur numérique de :

$Sin\ 30° =$	$sin\ (2\pi + 30°) =$
$Sin\ 60° =$	$sin\ (2\pi + 60°) =$
$tan\ 45° =$	$tan\ (\pi + 45°) =$

(Concours 2016-2017/Trigo et calcul)

Résolution

$Sin\ 30° = \frac{1}{2}$	$sin\ (2\pi + 30°) = \ sin\ 30° = \frac{1}{2}$

$Sin\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tan\ 45° = 1$

$sin\ (2\pi + 60°) = sin\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tan\ (\pi + 45°) = tan\ 45° = 1$

EXERCICE 177

Donner la valeur numérique de :

$Sin\ 30° =$

$cos\ 120° =$

$tan\ 60° =$

$sin\ (\pi + 60°) =$

$cotg\ (\pi + 45°) =$

(Concours 2018-2019/Trigo et calcul)

Résolution

$Sin\ 30° = {}^{1}/_{2}$

$cos\ 120° = {}^{-1}/_{2}$

$tan\ 60° = \sqrt{3}$

$cotg\ (\pi + 45°) = cotg\ 45° = 1$

$sin\ (\pi + 60°) = -\,sin\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

EXERCICE 178

sin 60 ° vaut :

1) 0 2) 7 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(Concours 2021-2022/Trigo et calcul)

Résolution

$\boldsymbol{R)\ 4}$

EXERCICE 179

$tg\ 45°$ vaut :

1) 1 2) 0 3) 2 4)5 5) $\sqrt{3}$

(Concours 2021-2022/Trigo et calcul)

Résolution

$\boldsymbol{R)\ 1}$

III. RELATIONS ET GRANDES FORMULES TRIGONOMETRIQUES

III.1 Relations fondamentales

$cos^2\,\alpha + sin^2\alpha = 1$

$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\,\alpha}$

III.2 Quelques relations dérivées

$sin^2\alpha = 1 - cos^2\,\alpha$

$cos^2\,\alpha = 1 - sin^2\alpha$

$1{+}cot^2\alpha = cosec^2\alpha$

$sec^2\alpha + cosec^2\alpha = sec^2\alpha.cosec^2\alpha$

$sec^2\,\alpha + tan^2\alpha = 1$

$1{+}tan^2\alpha = sec^2\alpha$

$sin^2\alpha = \frac{tan^2\alpha}{1+tan^2\alpha}$

$cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tan^2\alpha}$

III.3 Angles opposés

$\cos(-a) = \cos a$

$\sin(-a) = -\sin a$

$\tan(-a) = -\tan\ a$

$\cot(-a) = -\cot a$

$\sec\,(-a) = \sec a$

$\operatorname{cosec}(-\mathrm{a}) = -\operatorname{cosec} a$

III.4 Angles complémentaires et anti-complémentaires

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot\ a$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$

$\sec\ \left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \operatorname{cosec} a$

$\operatorname{cosec}(\frac{\pi}{2} - a) = \sec a$

Anti-complémentaires

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot\ a$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$

$\sec\ \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\operatorname{cosec} a$

$\operatorname{cosec}(\frac{\pi}{2} + a) = \sec a$

III.5 Angles supplémentaires et anti- supplémentaires

Supplémentaires

$\cos(\pi - a) = -\cos a$ $\quad\quad$ $\sin(\pi - a) = \sin a$

$\tan(\pi - a) = -\tan\ a$ $\quad\quad$ $\cot(\pi - a) = -\cot a$

$\sec\,(\pi - a) = -\sec a$ $\quad\quad$ $\mathrm{cosec}(\pi - \mathrm{a}) = \mathrm{cosec}\, a$

Anti- supplémentaires

$\cos(\pi + a) = -\cos a$ $\quad\quad$ $\sin(\pi + a) = -\sin a$

$\tan(\pi + a) = \tan\ a$ $\quad\quad$ $\cot(\pi + a) = \cot a$

$\sec\,(\pi + a) = -\sec a$ $\quad\quad$ $\mathrm{cosec}(\pi + \mathrm{a}) = -\mathrm{cosec}\, a$

III.6 Formules d'addition des angles

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin \mathrm{a} \sin b$

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin \mathrm{a} \sin b$

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

III.7 Formules de multiplication par 2

$\cos 2a = cos^2 a - sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - tan^2 a}$

Relations dérivées :

$\cos 2a = 1 - 2sin^2 a$ $\quad\quad$ $sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

$\cos 2a = 2cos^2 a - 1$ $\quad\quad$ $cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$

$tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$ $\quad\quad$ $cot^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}$

III.8 Formules de division par 2

$cos\ a = cos^2\frac{a}{2} - sin^2\frac{a}{2}$ $\qquad$ $cos\ a = 2cos^2\frac{a}{2} - 1$

$cos\ a = 1 - 2sin^2\frac{a}{2}$ $\qquad$ $\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$

$\tan a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-tan^2\frac{a}{2}}$ $\qquad$ $\sin a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+tan^2\frac{a}{2}}$

$\cos a = \frac{1-tan^2\frac{a}{2}}{1+tan^2\frac{a}{2}}$

EXERCICE 180

Calculer l'expression $\cos^2(200°) + \sin^2(200°)$:

$a. \infty$ $\quad b. -1$ $\quad c.\ 1$ $\quad d. 200$ $\quad e. Aucune\ bonne\ réponse$

(Concours 2023-2024/Trigo et calcul)

Résolution

$\cos^2(200°) + \sin^2(200°) = 1$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 181

$a)$ Montrer que $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$

$b)$ Calculer $y = 2\sin 45°\cos 15°$

$c)$ 0.3183098$\times\frac{22}{7}\times 3{,}141593\times 10^6$

(Concours Trigo et calcul)

Résolution

$$a)\ \sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b + \sin a\cos b - \cos a\sin b$$
$$= \sin a\cos b + \sin a\cos b$$
$$= 2\sin a\cos b$$

$b)\ y = 2\sin 45°\cos 15°$
Ecrivons 15° comme combinaison des angles remarquables :
$15° = 45° - 30°$
$15° = 60° - 45°$

$y = 2\sin 45°\cos(45° - 30°)$

$= 2\sin 45°(\cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30°)$

$= 2.\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2})$

$= \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4})$

$= \frac{\sqrt{2}^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}^2}{4}$

$= \frac{2.\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$

$y = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$c)$ 0.3183098$\times \frac{22}{7} \times 3{,}141593 \times 10^6$

$= 0{,}3183098 \ \times 3{,}142857 \times 3141593$

EXERCICE 182

En sachant que $\cos x \ = \frac{1}{3}$. La valeur de $\sin x$ est :

$1. \frac{1}{2}$ $\quad 2. \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad 3. 1$ $\quad 4. \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\quad 5. \ \frac{2}{3}$

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

Résolution

On sait que $sin^2x + \ cos^2x = 1$

$\Leftrightarrow sin^2x = 1 - cos^2x$

$\Leftrightarrow \sin x = \sqrt{1 - cos^2x}$

Or $\cos x \ = \frac{1}{3}$

$\sin x = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$= \sqrt{1 - \frac{1}{9}}$

$= \sqrt{\frac{9-1}{9}}$

$= \sqrt{\frac{8}{9}}$

$= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}$

$= \frac{\sqrt{2^2.2}}{3}$

$\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\boldsymbol{R}$) **4**

EXERCICE 183

En fonction de $\sin x \ et \cos x$. L'expression $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ s'écrit :

1.$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$ 2.$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$ 3.$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

Résolution

On sait que $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$$

$\boldsymbol{R}$) **3**

EXERCICE 184

On suppose que $\sin\theta = 0{,}6 \ et \ \theta$ appartient au deuxième quadrant. Les valeurs de $\cos\theta$ et $\tan\theta$ sont données respectivement par :

$a) -0{,}8 \ et \ 0{,}75 \quad b) -0{,}75 \ et \ 0{,}85 \quad c) -0{,}85 \ et -0{,}75 \quad d) -0{,}75 \ et -0{,}8 \quad e) -0{,}8 \ et -0{,}75$

(Concours 2020-2021/Trigo et calcul)

Résolution

On sait que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-(0{,}6)^2}$$

$$= \sqrt{1-0{,}36}$$

$$= \sqrt{0{,}64}$$

$$\cos\theta = 0{,}8$$

Dans le deuxième quadrant, cos est négatif. Donc $\cos\theta = -0{,}8$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{0{,}6}{-0{,}8}$$

$$\tan\theta = -0{,}75$$

$\boldsymbol{R}$) $\boldsymbol{e}$

EXERCICE 185

En remarquant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$. La valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ est :

1. 0,259 2. 0,1 3. 0,966 4. 0,25 5. 0,759

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

Résolution

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$ car $\cos(a-b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$=\frac{3{,}8637033051562}{4}$$

$$=0{,}9659258262890$$

$$=0{,}966$$

***R*) 3**

EXERCICE 186

On rappelle que $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ $et\ \sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$. Les valeurs $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ sont données respectivement par :

$a)\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $b)\ \frac{\sqrt{4+\sqrt{2}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $c)\ -\frac{\sqrt{4+\sqrt{2}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ $d)\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ $e)\ ABR$

(Concours 2020-2021/Trigo et calcul)

Résolution

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}\Leftrightarrow\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\left(2.\frac{\pi}{8}\right)}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}$$

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}\Leftrightarrow\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\left(2.\frac{\pi}{12}\right)}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4}}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

R*) *d

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE99

Démontrez les égalités suivantes :

$a)$ $\frac{1}{1+\sin a}+\frac{1}{1-\sin a}=2\,sec^2 a$

$b)$ $(1+tg\ a)^2+(1-tg\ a)^2=2\,sec^2 a$

c) $\sin 3a=3\sin a-4\,sin^3 a$

EXERCICE AE100

$a)$ En remarquant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$. La valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$

$b)$ Calculer $y=\cos 15°\sin 15°$

$c)$ En sachant que $\sin x\ =\frac{5}{6}$. Trouver la valeur de $\tan x\ \ et \sec x$

IV. EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Une équation est dite trigonométrique lorsque l'inconnue x intervient par l'intermédiaire d'une ou de plusieurs fonctions trigonométriques.

IV.1 Equation en cos

IV.1.1 Equation de la forme $\cos x = cos\ \alpha$

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$$

IV.1.2 Equation de la forme $\cos x = a$

L'équation admet de solution dans $\mathbb{R}$si et seulement si $a \in [-1;1]$

On cherche un réel $\alpha\ tel\ que \cos\alpha = a$. Et l'équation peut s'écrire :

$\mathbf{cos}\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{cos\ \alpha}$, ce qui nous ramène au premier cas.

IV.1.3 Equation de la forme $\mathbf{cos}\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{cos\ v}(\boldsymbol{x})$

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = v(x) + 2k\pi \\ u(x) = -v(x) + 2k\pi \end{cases}$$

IV.2 Equation en sin

IV.2.1 Equation de la forme $\sin x = sin\ \alpha$

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \end{cases}$$

IV.2.2 Equation de la forme $\sin x = a$

L'équation admet de solution dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $a \in [-1;1]$

On cherche un réel $\alpha\ tel\ que \sin\alpha = a$. Et l'équation peut s'écrire :

$\mathbf{sin}\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{sin\ \alpha}$, ce qui nous ramène au premier cas.

IV.2.3 Equation de la forme $\sin u(x) = sin\ v(x)$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = v(x) + 2k\pi \\ u(x) = (\pi - v(x)) + 2k\pi \end{cases}$$

IV.3 Equation en tan

IV.3.1 Equation de la forme $\tan x = tan\ \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\})$

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$$

IV.3.2 Equation de la forme $\tan x = a$

On cherche un réel $\alpha\ tel\ que \tan \alpha = a$. Et l'équation peut s'écrire :

$\boldsymbol{\tan x = tan\ \alpha}$, ce qui nous ramène au premier cas.

IV.3.3 Equation de la forme $\tan u(x) = tan\ v(x)$

$$\tan \mathrm{u}(x) = \tan v(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x) + k\pi$$

EXERCICE 187

Résoudre dans le 4e quadrant l'équation $2\ cos\ x = 1$

(Concours 2015-2016/Trigo et calcul)

Résolution

2 cos x=1

$\Leftrightarrow \cos x = {}^{1}/{}_{2}$

On sait que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

L'équation devient :

$\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Déterminons la valeur de k : $x \in \left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$

Pour $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$

$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi \leq 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{6} \leq 2k\pi \leq \frac{5\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{7\pi/_6}{2\pi} \leq k \leq \frac{5\pi/_3}{2\pi}$

$\Leftrightarrow \frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{6}$

$\Leftrightarrow 0,5833 \leq k \leq 0,8333$

k n'existe pas dans $\mathbb{Z}$

Donc

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ à *rejeter*

Pour $x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$

$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$

$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi \leq 2\pi + \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{11\pi}{6} \leq 2k\pi \leq \frac{7\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{11\pi/_6}{2\pi} \leq k \leq \frac{7\pi/_3}{2\pi}$

$\Leftrightarrow \frac{11}{12} \leq k \leq \frac{7}{6}$

$\Leftrightarrow 0,91666 \leq k \leq 1,1666$ ....

$\Leftrightarrow k = 1$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{-\pi}{3} + 2.1.\pi$

$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi$

$x = \frac{5\pi}{3}$

$$S = \left\{\frac{5\pi}{3}\right\}$$

EXERCICE 188

Résoudre dans le 1er et 2e quadrants l'équation trigonométrique : $2\,sin\,x = 1$

(Concours 2011-2012/Trigo et calcul)

Résolution

$2 \sin x = 1$

$\Leftrightarrow \sin x = {}^{1}/_{2}$

1ere méthode

$\sin x = {}^{1}/_{2}$

On sait que $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

L'équation devient :

$\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Déterminons la valeur de k : $x \in [0; \pi]$

Pour $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$0 \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$

$\Leftrightarrow 0 - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi \leq \pi - \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq 2k\pi \leq \frac{5\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{-\pi/6}{2\pi} \leq k \leq \frac{5\pi/6}{2\pi}$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{12} \leq k \leq \frac{5}{12}$

$\Leftrightarrow -0{,}083 \leq k \leq 0{,}417$

$\Leftrightarrow k = 0$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Pour $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$0 \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$

$\Leftrightarrow 0 - \frac{5\pi}{6} \leq 2k\pi \leq \pi - \frac{5\pi}{6}$

$\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} \leq 2k\pi \leq \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{-5\pi/6}{2\pi} \leq k \leq \frac{\pi/6}{2\pi}$

$\Leftrightarrow \frac{-5}{12} \leq k \leq \frac{1}{12}$

$\Leftrightarrow -0{,}417 \leq k \leq 0{,}083$

$\Leftrightarrow k = 0$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$

$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

2e méthode

$\sin x = {}^{1}/_{2}$

Dans le premier quadrant, c'est sin $\frac{\pi}{6}$ qui donne ${}^{1}/_{2}$.

Pour trouver sa valeur correspondante au 2e quadrant, on fait : $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$\boldsymbol{S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}}$

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE101

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$a)\ \cos 3x = \cos\frac{3\pi}{11}$

$b)\ \sin 5x - \sin\frac{8\pi}{3}$

$c)\ \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$d)\ 2\cos 2x - \sqrt{3} = 0$

$e)\ 1 + \sqrt{2}\sin\left(6x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$f)\ \sqrt{16}\cos\left(7x - \frac{2\pi}{3}\right) - 2 = 0$

EXERCICE AE102

Dans le premier quadrant, la solution de l'équation $\tan x = 1$ vaut :

$a)\frac{\pi}{4}$ $b)\frac{\pi}{2}$ $c)\frac{\pi}{3}$ $d)\frac{7\pi}{4}$ $e)\ \pi$

EXERCICE AE103

L'équation trigonométrique $\sin x = 3$ admet pour solution :

$a)\ \emptyset$ $b)\ \pi$ $c)\frac{\pi}{3}$ $d)\frac{2\pi}{3}$ $e)\ 2\pi$

EXERCICE AE104

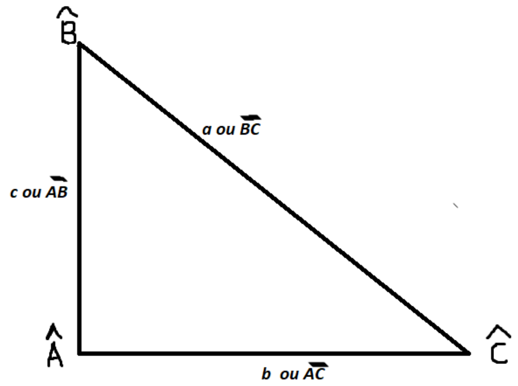
Dans le troisième quadrant, l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ admet comme solution :

$a)\frac{\pi}{3}$ $b)\frac{2\pi}{3}$ $c)\frac{4\pi}{3}$ $d)\frac{5\pi}{3}$ $e)\ \emptyset$

V. RESOLUTIONS DES TRIANGLES

Résoudre un triangle, c'est déterminer ses éléments inconnus en fonction des éléments donnés.

V.1 TRIANGLES RECTANGLES

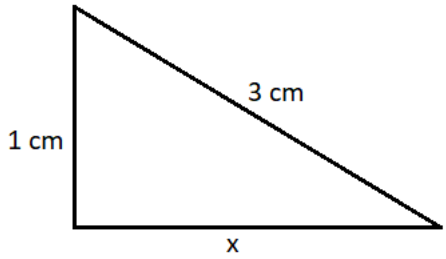


Les différents cas de résolution sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Données	Inconnues	Relations
Les côtés b et c de l'angle droit	$\hat{B}$ et $\hat{C}$ Et l'hypoténuse a	$a^2 = b^2 + c^2$ $\hat{B} + \hat{C} = 90°$ $\tan \hat{C} = \frac{c}{b}$
Un côté c de l'angle droit et un angle aigu $\hat{C}$	$\hat{B}$ et les côtés a, b	$\hat{B} + \hat{C} = 90°$ b=$c \cot \hat{C}$ $a = \frac{c}{\sin \hat{C}}$
L'hypoténuse a et un côté de l'angle droit c	$\hat{B}$, $\hat{C}$ et b	$\hat{B} + \hat{C} = 90°$ $\sin \hat{C} = \frac{c}{a}$ $a^2 = b^2 + c^2$
L'hypoténuse a et un angle aigu $\hat{C}$	$\hat{B}$, b et c	$\hat{B} + \hat{C} = 90°$ c=$a \sin \hat{C}$

EXERCICE 189

La valeur de x dans le triangle ci-dessous vaut :



$a.\ x = 8$ $\quad b. x = -8$ $\quad c. x = \sqrt{8}$ $\quad d. x = 2\sqrt{2}$ $\quad e. \pm 2\sqrt{2}$

(Concours 2023-2024/Trigo et calcul)

Résolution

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$1^2 + x^2 = 3^2 \Leftrightarrow 1 + x^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 9 - 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 8$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{8}$$
$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$$

c $et\ d\ sont\ correctes, donc\ R)\ f$

EXERCICE 190

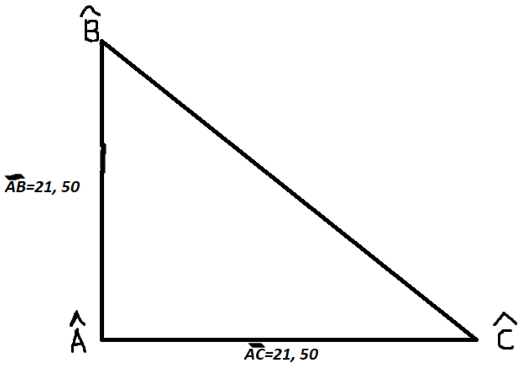
Considérer le triangle rectangle BAC tel que $\hat{A} = 90°$,

$\overline{AB} = \overline{AC} = 21{,}50\ cm.$

a) Calculer les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$
b) Calculer à 5 décimales près le côté $\overline{BC}$

(Concours Trigo et calcul)

Résolution



$a)\ \overline{AB} = 21{,}50\ cm.$
$\overline{AC} = 21{,}50\ cm$

$\hat{B}$ = ?

$\hat{C}$ =?

$\tan \hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

$\tan \hat{C} = \frac{21{,}50}{21{,}50}$

$\tan \hat{C} = 1 \Rightarrow \hat{C} = arc \tan 1$

$\boldsymbol{\hat{C} = 45°}$

$\hat{B} \ + \hat{C} = 90°$

$\hat{B} \ + 45° = 90° \Rightarrow \boldsymbol{\hat{B} = 45°}$

a) $\overline{BC}$= ?
$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$
$= (21{,}50)^2 + (21{,}50)^2$
$= 924,5$

$\Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{924,5}$

$\overline{BC} = 30,40559159\ cm$

A 5 décimales près :

$\boldsymbol{\overline{BC} = 30,40559\ cm}$

EXERCICE 191

Soit BAC un triangle rectangle en A (c'est à dire $\hat{A} = 90°$) ; calculer l'hypoténuse $\overline{BC}$ et les angles $\hat{B}$, $\hat{C}$ sachant que $\overline{AB} = \overline{AC} = 10\ cm.$

(Concours 2016-2017/ Trigo et calcul)

Résolution

$a)\ \ \overline{AB} = 10\ cm.$

$\overline{AC} = 10\ cm$

$\overline{BC}$= ?

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$

$= (10)^2 + (10\ )^2$

$= 200$

$\Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{200}$

$\overline{BC} = 14,14213562\ cm$

a) $\hat{B}$ = ?

$\hat{C} =?$

$\tan\hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

$\tan\hat{C} = \frac{10}{10}$

$\tan\hat{C} = 1 \Rightarrow \hat{C} = arc\tan 1$

$\boldsymbol{\hat{C} = 45°}$

$\hat{B}\ \ + \hat{C} = 90°$

$\hat{B}\ \ + 45° = 90° \Rightarrow \boldsymbol{\hat{B} = 45°}$

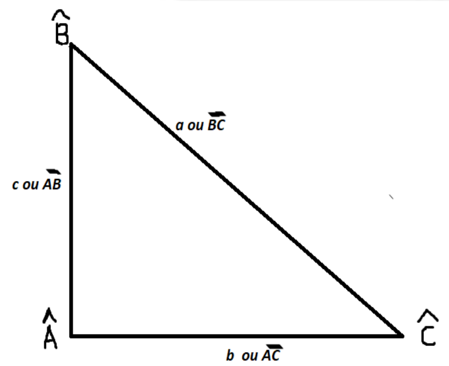
EXERCICE 192

Donner les relations trigonométriques dans un triangle rectangle

(Concours 2011-2012/Trigo et calcul)

Résolution

Soit le triangle BAC, rectangle en A



$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

$\hat{B} + \hat{C} = 90°$

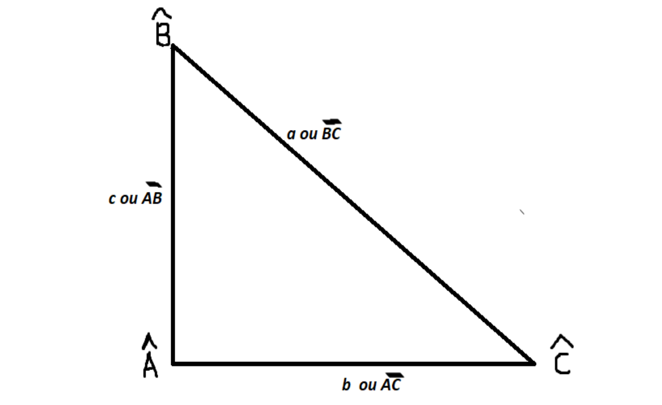
EXERCICE 193

Donner les relations entre les côtés et les angles dans un triangle rectangle :

(Concours 2011-2012/Trigo et calcul)

Résolution

Soit le triangle BAC, rectangle en A



$\sin \hat{C} = \frac{c}{a}$ $\tan \hat{C} = \frac{c}{b}$

$\cos \hat{C} = \frac{b}{a}$ $\cot \hat{C} = \frac{b}{c}$

$\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$ $\cot \hat{B} = \frac{c}{b}$

$\sin \hat{B} = \frac{b}{a}$ $\tan \hat{B} = \frac{b}{c}$

EXERCICE 194

Soit BAC un triangle rectangle en A (c'est à dire $\hat{A} = 90°$) . Sachant que $\overline{AB} = \overline{AC} = 5\ cm.$

$a)$ Calculer à 5 décimales l'hypoténuse $\overline{BC}$;

$b)$ Calculer en radian les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

(Concours 2018-2019/ Trigo et calcul)

Résolution

$a)$ $\overline{AB} = 5\ cm.$
$\overline{AC} = 5\ cm$
$\overline{BC}$= ?
$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$
$= (5)^2 + (5\ )^2$
$= 50$

$\Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{50}$

$\overline{BC} = 7,071067812\ cm$

A 5 décimales

$\overline{BC} = 7,07107\ cm$

$b)$ $\hat{B}$ = ? $\hat{C}$ =?

$\tan \hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

$\tan \hat{C} = \frac{5}{5}$

$\tan \hat{C} = 1 \Rightarrow \hat{C} = arc \tan 1$

$\boldsymbol{\hat{C} = 45°}$

$\boldsymbol{\hat{C} = \frac{\pi}{4} rad}$

$\hat{B} \quad + \hat{C} = 90°$

$\hat{B} \quad + 45° = 90° \Rightarrow \boldsymbol{\hat{B} = 45°}$

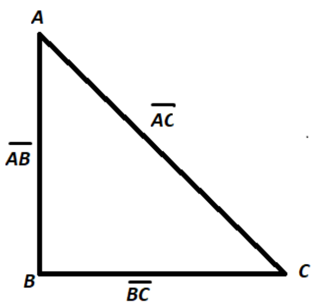
$\boldsymbol{\hat{B} = \frac{\pi}{4} rad}$

EXERCICE 195

Résoudre le triangle ABC tel que $\hat{A} = \frac{\pi}{4}, \hat{B} = \frac{\pi}{2}\ et\ \overline{BC}^2 = 90,25$

(Concours 2011-2012/Trigo et calcul)

Résolution



$\hat{A} = \frac{\pi}{4}$

$\hat{B} = \frac{\pi}{2}$

$\overline{BC}^2 = 90{,}25 \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{90{,}25} = 9,5$

Inconnues

$\hat{C} =?$

$\overline{AB} =?$

$\overline{AC} =?$

$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{4} + \hat{A} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{C} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

$\hat{C} = \frac{\pi}{4}$

$\overline{AB} = \overline{BC} \cot \hat{A}$

$= 9{,}5 \times \cot\frac{\pi}{4}$

$\boldsymbol{\overline{AB} = 9,5}$

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

$= (9{,}5)^2 + (9{,}5)^2$

$= 180,5 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{180,5}$

$\overline{AC} = 13,43502884$

EXERCICE 196

Les côtés opposé et adjacent d'un triangle rectangle mesurent respectivement 4 cm et 3 cm.

Calculer la longueur de l'hypoténuse vaut :

1) $4\ cm$ 2) $3\ cm$ 3) $5\ cm$ 4) $10\ cm$ 5) $8\ cm$

(Concours 2021-2022/Trigo et calcul)

Résolution

$b = 4\ cm \quad c = 3\ cm$

$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (Théorème\ de\ Pythagore)$

$a^2 = (4)^2 + (3)^2$

$= 16 + 9$

$a^2 = 25$

$a = \sqrt{25}$

$a = 5\ cm$

***R*) 3**

V.2 TRIANGLES QUELCONQUES

V.2.1 Relation de sinus

$$\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

V.2.2 Relation de cosinus

Dans un triangle ABC, le carré de la mesure d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, diminué du double produit des mesures de ces côtés par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{c}$$

V.2.3 Résolution des triangles quelconques

Résoudre un triangle, c'est déterminer ses trois éléments inconnus quand on en donne trois autres.

Données	Relations
On donne un côté et deux angles	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 90°$ La relation de sinus
On donne deux côtés et l'angle qu'ils forment	La relation de cosinus
On donne trois côtés	La relation de cosinus

EXERCICE 197

Un côté d'un triangle équilatéral vaut 10cm. Calculer le périmètre de ce triangle

$a.\ 30\ cm$ $\quad b.\ 100\ cm$ $\quad c.\ 1000\ cm$ $\quad d.\ 20\ cm$ $\quad e.\ 60\ cm$

(Concours 2023-2024/Trigo et calcul)

Résolution

$P = C + C + C$

Dans le cas d'un triangle équilatéral, la formule devient :

$P = 3 \times C$

$= 3 \times 10\ cm$

$P = 30\ cm$

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 198

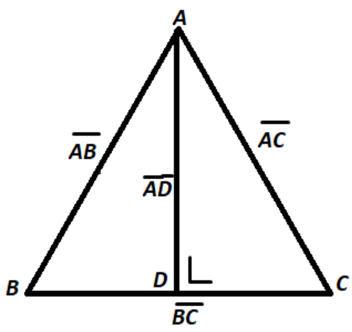
Considérer le triangle ABC tel que $\overline{AB} = \overline{AC} = 60\ cm\ et\ \hat{A} = 30°$.

$a)$ Calculer les angles $\hat{B}\ et\ \hat{C}$

$b)$ Calculer le côté $\overline{BC}$ et le segment $\overline{AD} \perp$ à $\overline{BC}$.

(Concours 2015-2016/Trigo et calcul)

Résolution



$\overline{AB} = 60\ cm$

$\overline{AC} = 60\ cm$

$\hat{A} = 30°$

Utilisons la relation de cosinus

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC}\,\overline{AC}\cos\hat{c}$

$\Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{BC}\,\overline{AC}}$

Trouvons d'abord $\overline{BC}$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AC}\,\overline{AB}\cos\widehat{A}$$

$$= 60^2 + 60^2 - 2 \times 60 \times 60 \cos 30°$$

$$\overline{BC}^2 = 964,6170928$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{964,6170928}$$

$$\boldsymbol{\overline{BC} = 31,05828541\ cm}$$

$$\cos\hat{C} = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{BC}\,\overline{AC}}$$

$$= \frac{964,6170928 + 3600 - 3600}{2 \times 31,05828541 \times 60}$$

$$= \frac{964,6170928}{3726,994249}$$

$$\cos\hat{C} = 0,258819045$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\hat{c} = 75°}$$

$$\hat{B} = ?$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

$$\Leftrightarrow 30° + \hat{B} + 75° = 180°$$

$$\Leftrightarrow \hat{B} = 180° - 30° - 75°$$

$$\boldsymbol{\hat{B} = 75°}$$

b) $\boldsymbol{\overline{BC} = 31,05828541\ cm}$

Le segment $\overline{AD} \perp$ à $\overline{BC}$ est la hauteur du triangle :

$$\overline{AD} = \frac{\overline{BC}\sin\hat{B}\sin\hat{C}}{\sin(\hat{B}+\hat{C})}$$

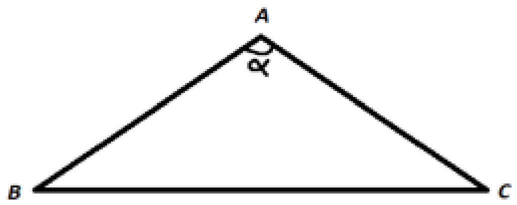
$$= \frac{31,05828541 \times \sin 75° \sin 75°}{\sin 150°}$$

$$= \frac{28,97777479}{0,5}$$

$$\overline{AD} = 57,9555\ cm$$

EXERCICE 199

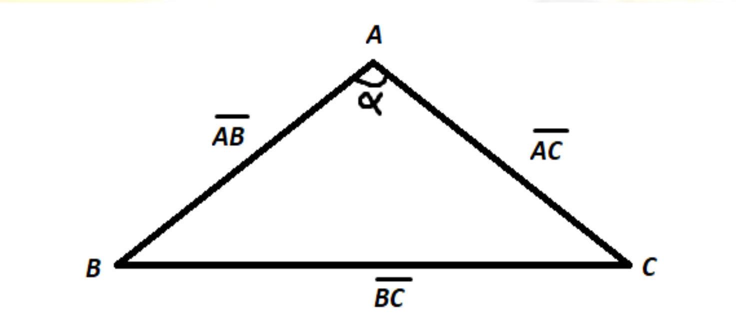
Etablir les relations indispensables pour résoudre un triangle quelconque



Connaissant les éléments suivants $\overline{AB}, \overline{AC}$ $et\ l'angle\ \alpha$

(Concours 2011-2012/Trigo et calcul)

Résolution



$\overline{BC}$ =?

$\hat{B}$ =?

$\hat{C}$ =?

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AC}\,\overline{AB}\cos\hat{A}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AC}\,\overline{AB}\cos\alpha}}$

$\cos\hat{C} = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{BC}\,\overline{AC}}$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

EXERCICE 200

Tracer le graphique de :

$a)$ y=sin x, pour $x \in\ [0; 2\pi]$

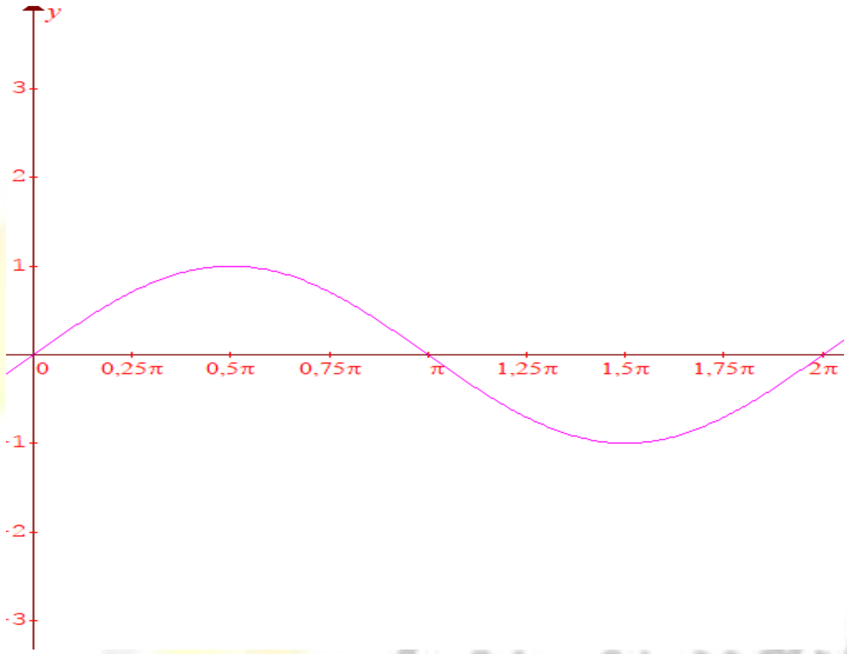
$b)$ y= cos x, pour $x \in\ [0; 2\pi]$

(Concours Trigo et calcul)

Résolution

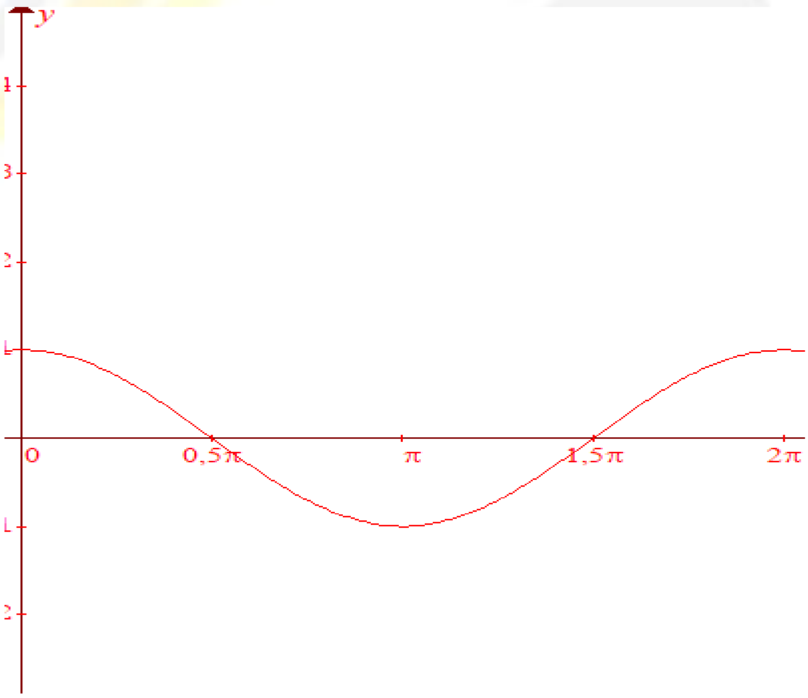
$a) y = \sin x$

X	sinX
0	0
1/8π	0,3827
1/4π	0,7071
3/8π	0,9239
1/2π	1,0
5/8π	0,9239
3/4π	0,7071
7/8π	0,3827
π	0
9/8π	-0,3827
5/4π	-0,7071
11/8π	-0,9239
3/2π	-1,0
13/8π	-0,9239
7/4π	-0,7071
15/8π	-0,3827
2π	0



$b)\ y = \cos x$

0	1,0
1/4π	0,7071
1/2π	0
3/4π	-0,7071
π	-1,0
5/4π	-0,7071
3/2π	0
7/4π	0,7071
2π	1,0



EXERCICE 201

Calculer à 5 décimales près les quantités numériques suivantes :

1) $(1999,65695)^0 =$

2) $(1999,65695)^1 =$

3) $(6666,31836) \times 0 =$

4) $\pi \div 3,14159 =$

5) $(10^6 \times 9999) \div (9999 \times 10^5) =$

(Concours 2016-2017/Trigo et calcul)

Résolution

1) $(1999,65695)^0 = 1$

A 5 décimales près:

$(1999,65695)^0 = 1,00000$

2) $(1999,65695)^1 = 1999,65695$

3) $(6666,31836) \times 0 = 0,00000$

4) $\pi \div 3,14159 = 1,00000$

5) $(10^6 \times 9999) \div (9999 \times 10^5)$

$$= \frac{10^6 \times 9999}{9999 \times 10^5}$$
$$= \frac{10^6}{10^5}$$
$$= 10^{6-5} = 10,00000$$

EXERCICE 202

Simplifier les expressions numériques suivantes :

$a)$ $10^6 \times 0,999999 \times 0 =$

$b)$ $3,14 \times \log_{10}(10^{100}) =$

(Concours 2011-2012/Trigo et calcul)

Résolution

$a)$ $10^6 \times 0,999999 \times 0 = 0$

$b)$ $3,14 \times \log_{10}(10^{100})$

$= 3.14 \times 100 \log_{10} 10$
$= 3.14 \times 100$
$= 314$

EXERCICE 203

Calculer à 4 décimales près les quantités numériques suivantes :

$a)\ (3{,}14159)^0$
$b)(3{,}14159)^1$
$c)3{,}14159 \times \log_{10}(10)^2$

(Concours 2018-2019/Trigo et calcul)

Résolution

$a)\ (3{,}14159)^0 = 1{,}0000$
$b)(3{,}14159)^1 = 3{,}1416$
$c)3{,}14159 \times \log_{10}(10)^2 = 3{,}14159 \times 2 \log_{10} 10$
$= 3{,}14159 \times 2$
$= 6{,}28918$
$= 6{,}2892$

EXERCICE 204

La moyenne proportionnelle de 2 nombres (4, 7) est :

1. 5, 5 2. $2\sqrt{7}$ 3. 5,0 4. $4\sqrt{7}$ 5. $\frac{7}{4}$

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

Rappel et Résolution

Etant donné deux réels de même signe a et b, la moyenne proportionnelle à a et b est le réel x tel que $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$

La moyenne proportionnelle de 4 et 7 vaut :

$\frac{4}{x} = \frac{x}{7}$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \times 7$

$\Leftrightarrow x^2 = 28$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{28}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2^2 \times 7}$

$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{7}$

***R*) 2**

EXERCICE 205

La quatrième proportionnelle à 3 nombres (2, -1, 7) est :

$1. -\frac{7}{2}$ $\quad$ $2.\ 8$ $\quad$ $3.\ 2$ $\quad$ $4. -2$ $\quad$ $5. \frac{3}{4}$

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

Rappel et Résolution

Etant donné trois réels a, b et c, la quatrième proportionnelle des termes a, b et c est le réel x tel que : $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

La quatrième proportionnelle de 2, -1 et 7 vaut :

$\frac{2}{-1} = \frac{7}{x}$

$\Leftrightarrow 2x = (-1) \times 7$

$\Leftrightarrow 2x = -7$

$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$

$\boldsymbol{R)\ 1}$

EXERCICE 206

La solution de l'équation $\frac{3}{x-3} + \frac{4}{2x+1} = \frac{31}{4x-7}$ est :

$1.\ \left(4;\ -\frac{31}{17}\right)$ $\quad$ $2.\ (2;39)$ $\quad$ $3.\ (4;31)$ $\quad$ $4. (2;31)$ $\quad$ $5. \left(4;\ -\frac{39}{22}\right)$

(Concours 2019-2020/Trigo et calcul)

Résolution

$C.P.: x - 3 \neq 0\ et\ 2x + 1 \neq 0\ \ et\ 4x - 7 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 3 \quad et\ 2x \neq -1 \quad et\ 4x \neq 7$

$\Leftrightarrow x \neq 3 \quad et\ x \neq {}^{-1}/_{2} \quad et\ x \neq {}^{7}/_{4}$

$\frac{3}{x-3} + \frac{4}{2x+1} = \frac{31}{4x-7}$

$\Leftrightarrow \frac{3(2x+1)+4(x-3)}{(x-3)(2x+1)} = \frac{31}{4x-7}$

$\Leftrightarrow \frac{6x+3+4x-12}{2x^2+x-6x-3} = \frac{31}{4x-7}$

$\Leftrightarrow \frac{10x-9}{2x^2-5x-3} = \frac{31}{4x-7}$

$\Leftrightarrow 31(2x^2 - 5x - 3) = (10x - 9)(4x - 7)$

$\Leftrightarrow 62\,x^2 - 155x - 93 = 40x^2 - 70x - 36x + 63$

$\Leftrightarrow 62\,x^2 - 155x - 93 - 40x^2 + 70x + 36x - 63 = 0$

$\Leftrightarrow 22x^2 - 49x - 156 = 0$

$a = 22\,; b = -49\ \ et\ c = -156$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-49)^2 - 4 \times (22)(-156)$

$= 2\,401 + 13\,728$

$\Delta = 16\,129$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{49-\sqrt{16129}}{2\times22} = \frac{49-127}{44} = \frac{-78}{44} = \frac{-39}{22}$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{49+\sqrt{16129}}{2\times22} = \frac{49+127}{44} = \frac{176}{44} = 4$

$S = \left\{4;\ \frac{-39}{22}\right\}$

R) 5

EXERCICE 207

La longueur du 48e parallèle nord sur le globe terrestre (le rayon de la terre=6370 kms) vaut :

$a)$ 1005 kms $b)$ 3547 kms $c)$ 5207 kms $d)$ 4895 kms $e)$ 2500 kms

(Concours 2020-2021/Trigo et calcul)

Résolution

La circonférence (longueur) d'une latitude (parallèle) est donnée par la formule

$L = 2\,\pi\,(\cos\theta \times R)$

R : *rayon de la terre*

θ : *le degré de la latitude*

$L = 2 \times 3{,}14\ (\cos 48° \times 6370)$

$= 6{,}28\ \times 0{,}669130606\ \times 6370$

$L = 26\,767{,}63312\ kms$

$R)\ f$

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE105

Calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtes de l'angle droit mesurent 10 cm et 24 m

EXERCICE AE106

Calculer les angles d'un triangle rectangle sachant que l'hypoténuse de ce triangle est le double de l'un des côtes de l'angle droit.

EXERCICE AE107

Résoudre les triangles dont on donne :

$a)\ a = 48;\ \hat{A} = 45°\ et\ \hat{B} = 72°$

$b)\ b = 12 \qquad c = 17 \quad et\ \hat{A} = 108°$

$c)\ a = 5; b = 9\ et\ c$ =12

EXERCICE AE108

$a)$ Soit un triangle rectangle tel que : $b = 90\ et\ C = 40°$. Chercher les autres éléments.

$b)$ Dans un triangle on sait que $b = c = 2\ et\ S = 1$, calculer les angles et la base a

EXERCICE AE109

Résoudre les triangles quelconques ci-dessous :

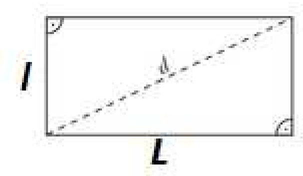
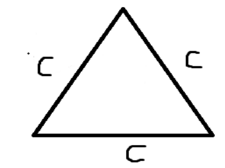
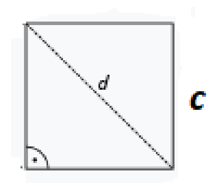
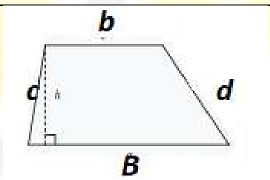
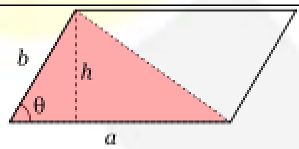
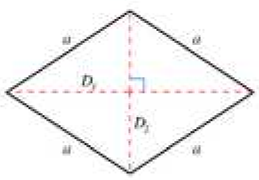
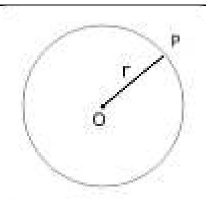
$a)\ \ a = 130, B = 20°, C = 32°$

$b)\ a = 90,\ \ b = 120,\ \ C = 75°$

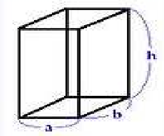
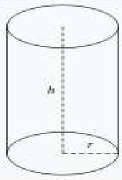
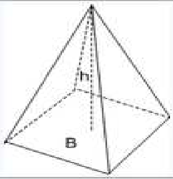
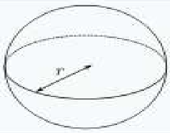
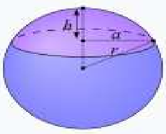
$c)\ a = 480\ , b = 675,\ \ c = 700$

TROISIÈME PARTIE : GÉOMÉTRIE

I. FORMULES DES PERIMETRES ET AIRES DE QUELQUES FIGURES GEOMETRIQUES

Nom figure	Dessin	Périmètre	Surface (Aire)	**Compléments**
Rectangle		$2L + 2l$	$L \times l$	$d = \sqrt{L^2 + l^2}$
Triangle		$c + c + c$	$\frac{B \times h}{2}$	
Carré		$c \times 4$	$C \times C$	$d = \sqrt{C^2 \times C^2}$ Ou $d = c\sqrt{2}$
Trapèze		$B + d + b + c$	$\frac{(B + b) \times h}{2}$	
Parallélogramme		$2(b + a)$	$a \times h$	
Losange		4.a	$\frac{D_1 \times D_2}{2}$	$a = \frac{1}{2}\sqrt{{D_1}^2 + {D_1}^2}$
Cercle		$2\pi r$	πr^2	$D = 2r$

II. AIRES ET VOLUMES DE QUELQUES CORPS GEOMETRIQUES

Nom	Représentation	Aire de la surface	Volume intérieur	Relations supplémentaires
Cube		$6c^2$	c^3	$\mathcal{D} = c\sqrt{3}$
Pavé droit		$2(ab + ah + bh)$	abh	$\mathcal{D} = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$
Prisme droit		P base fois h	$\mathcal{B} \times h$	
Cylindre de révolution		extrémités : $2 \times \pi r^2$ surface latérale : $2\pi rh$	$\pi r^2 h$	
Pyramide			$\frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$	
Tétraèdre régulier		$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$
Cône de révolution		base : πr^2 surface latérale : $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	
Sphère		$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	
Calotte sphérique		base : πa^2 surface courbe : $2\pi rh$	$\frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$	$r = \frac{a^2 + h^2}{2h}$

EXERCICE 208

Choisissez la bonne réponse. Un rectangle de longueur 5m et de largeur 3m a pour périmètre

$a)\ 8\,m$ $b)\ 15\,m$ $c)\ 16\,m$ $d)\ 2\,m$ $e)$ *Aucune bonne réponse*

(Concours 2021-2022/Géométrie)

Résolution

$L = 5\,m$ $l = 3\,m$

$P = 2L + 2l$

$= 2 \times 5 + 2 \times 3$

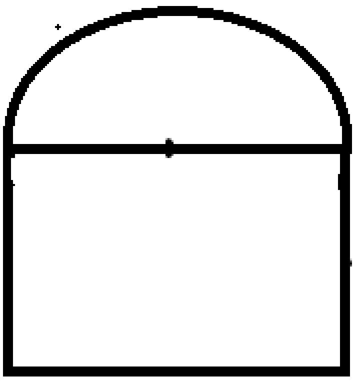
$= 10 + 6$

$P = 16\,m$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 209

L'Unikin construit un terrain de basket formé par un rectangle de 3 m sur 4 m, surplombé d'un demi-cercle centré sur le côté supérieur du rectangle (de longueur 4m).

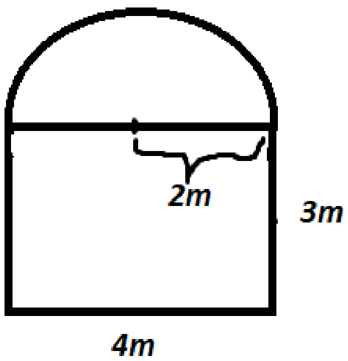


$a)$ Calculer la surface du terrain

$b)$ Si le panier se trouve au centre du cercle, quelle est la distance la plus courte que doit parcourir un joueur se trouvant au coin inférieur gauche (ou droit) pour atteindre le panier ?

(Concours 2012-2013/Géométrie)

Résolution



$a)\ S = S_{rect} + \frac{1}{2} S_{cercle}$

$S_{rect} = L \times l$
$= 4 \times 3$

$S_{rect} = 12\ m^2$

$S_{cercle} = \pi r^2$

$= 3{,}14 \times 2^2$

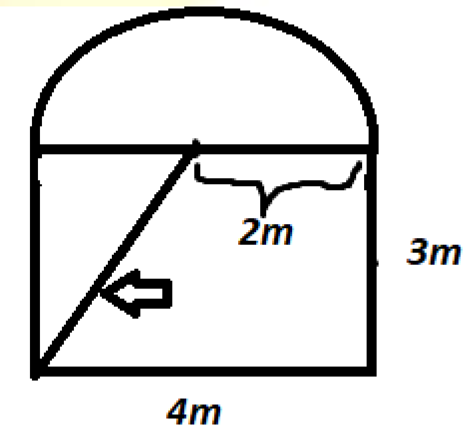
$S_{cercle} = 12,56\ m^2$

$S = S_{rect} + \frac{1}{2} S_{cercle}$

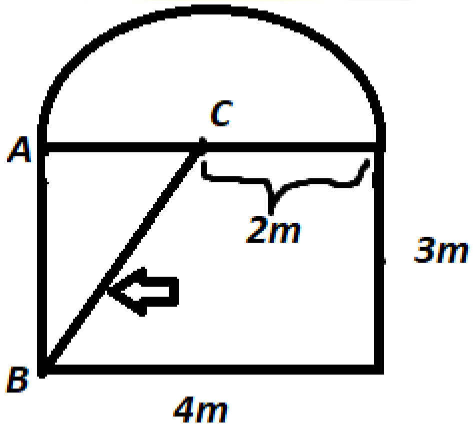
$= 12 + \frac{12{,}56}{2}$

$\boldsymbol{S = 18,28\ m^2}$

b) Le chemin le plus court est :



Calculons cette distance :



Soit, le triangle ABC rectangle en A.

Selon le théorème de Pythagore, on a :

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$

$= 2^2 + 3^2$

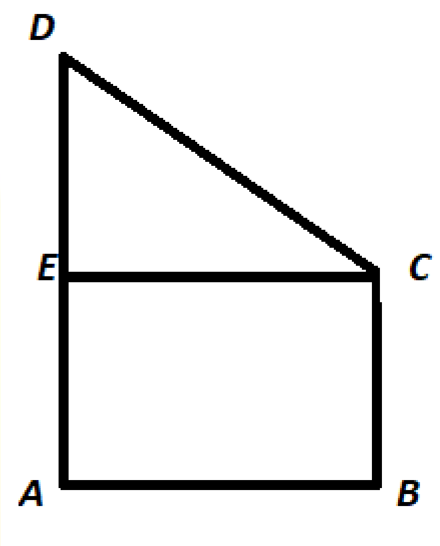
$\overline{BC}^2 = \sqrt{13}$

$\Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{13}$ m

La plus courte distance est : $\sqrt{13}$ m

EXERCICE 210

Monsieur Bukama achète un terrain découpé sur une surface de 6 m sur 4m de la forme suivante :



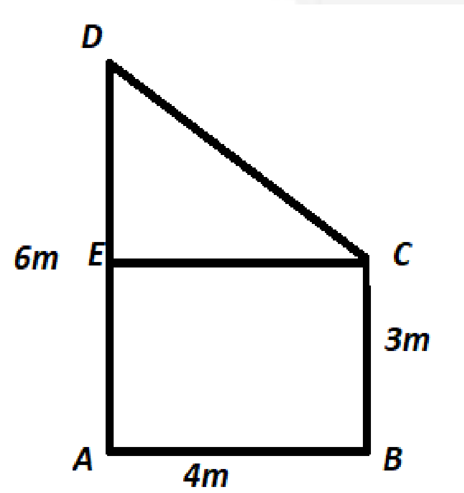
Le côté CD rejoint le sommet D au milieu C de l'autre côté parallèle à (AD).

a) Calculer la surface du terrain

b) Calculer le périmètre du terrain

(Concours 2012-2013/Géométrie)

Résolution



$a)\ S = \frac{(B+b)\times h}{2}$

$= \frac{(6+3)\times 4}{2}$

$S = 18\ m^2$

$b)\ P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}$

$\overline{AB} = 4m$ $\overline{BC} = 3m$ $\overline{CD} =?$ $\overline{AD} = 6m$

Trouvons d'abord $\overline{CD}$

Considérons le triangle CDE rectangle en E, selon le théorème de Pythagore :

$\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2$

$= 4^2 + 3^2$

$\overline{CD}^2 = \sqrt{25}$

$\Rightarrow \overline{CD} = 5\text{m}$

$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}$

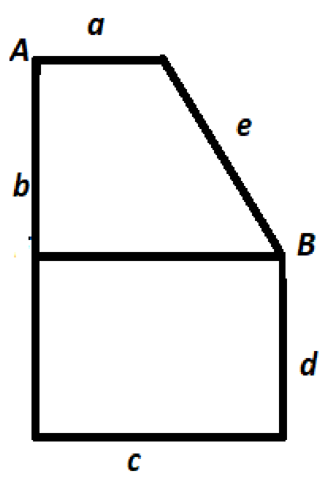
$P = 4 + 3 + 5 + 6$

$P = 18\ m$

EXERCICE 211

Monsieur X achète un terrain de forme trapézoïdale, découpé sur une surface de 6 km sur 4km.

Le 5e côté (qui est "e") formant le trapèze coupe deux côtés adjacents de la surface en leur milieu.



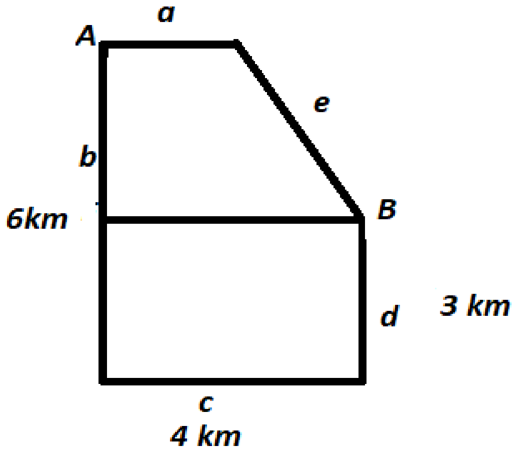
$a)$ Trouver la surface du terrain acheté

$b)$ Mr X a placé deux postes de surveillances aux coins A et B.

Trouver le plus court chemin qui mène de A à B.

(Concours 2011-2012/Géométrie)

Résolution

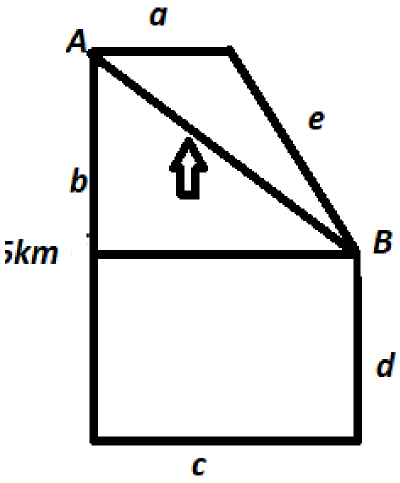


$a)\ S = \frac{(B+b)\times h}{2}$

$= \frac{(6+3)\times 4}{2}$

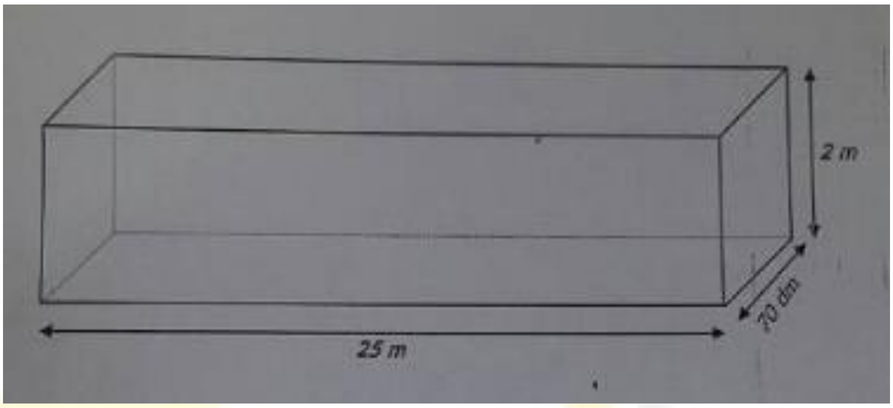
$S = 18\ km^2$

$b)$



EXERCICE 212

Dans le hall d'un hôtel, on a disposé un aquarium géant de poissons qui a la forme suivante :



a) Entourer la forme géométrique correspondante : cylindre, cube, parallélépipède, sphère.

b) Calculer la quantité d'eau nécessaire pour remplir complètement cet aquarium.

(Concours 2017-208/Géométrie)

Résolution

a) Parallélépipède

b) $V = L \times l \times h$

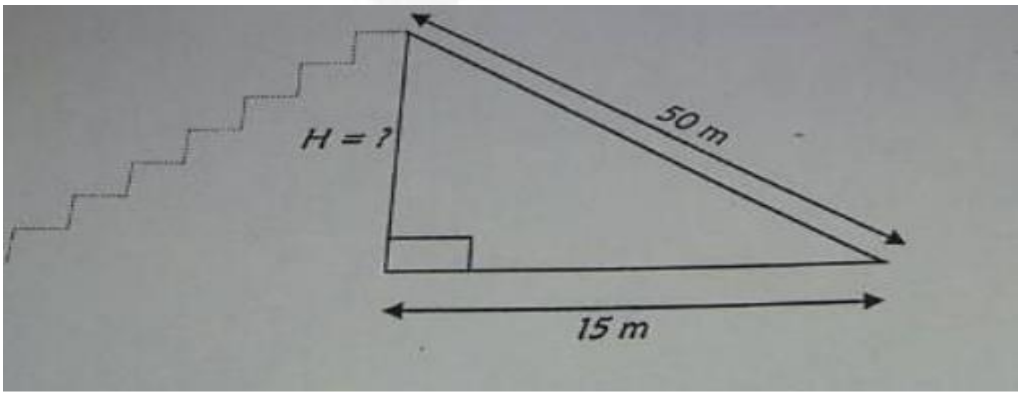
$L = 25m$ $\quad$ $l = 70\ dm = 7\ m$ $\quad$ $h = 2m$

$V = 25 \times 7 \times 2$

$V = 350\ m^3$

EXERCICE 213

Si la longueur au sol est de 15 m et que la longueur de glisse du toboggan fait 50 m. A quelle hauteur se situe le haut du toboggan ?



(Concours 2017-2018/Géométrie)

Résolution

Ça forme un triangle rectangle et selon le théorème de Pythagore, on a :

$50^2 = H^2 + 15^2$

$\Leftrightarrow 2500 = H^2 + 225$

$\Leftrightarrow H^2 = 2500 - 225$

$\Leftrightarrow H^2 = 2500 - 225$

$\Leftrightarrow H^2 = 2275$

$\Rightarrow H = \sqrt{2275}$

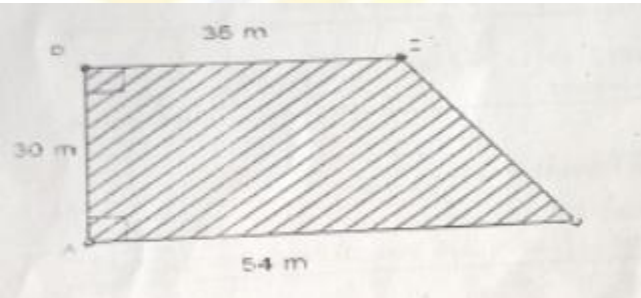
$H = 47,69696007\ m$

EXERCICE 214

Un champ a la forme d'un trapèze rectangle comme le montre la figure ci-dessous. On demande de déterminer :

$a)$ L'aire de ce champ

$b)$ Son périmètre



(Concours /Géométrie)

Résolution

$a)\ S = \frac{(B+b)\times h}{2}$

$= \frac{(54+36)\times 30}{2}$

$S = 1350\ m^2$

$b)\ P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}$

$\overline{AB} = 54m$ $\quad \overline{BC} = ?$ $\quad \overline{CD} = 36m$ $\quad \overline{AD} = 30m$

Trouvons d'abord $\overline{BC}$

$\overline{BC}^2 = 30^2 + (54-36)^2$

$= 900 + 324$

$\overline{BC}^2 = \sqrt{1224}$

$\Rightarrow \overline{BC} = 34,98\ m$

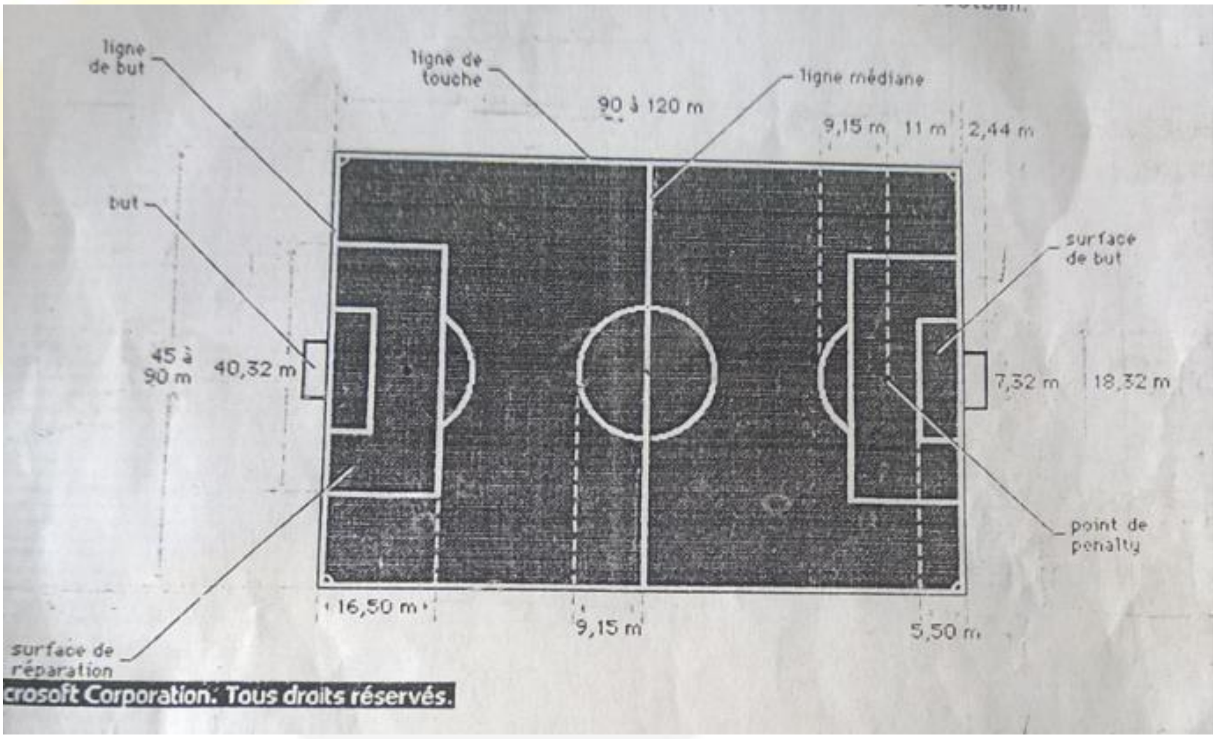
$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}$

$P = 54 + 34,98 + 36 + 30$

$P = 154,98\ m$

EXERCICE 215

On se propose de calculer les divers périmètres et aires d'un terrain de football.



1° calculer :

$a)$ Le périmètre minimum du terrain de football

$b)$ Le périmètre de la surface de réparation

$c)$ Le périmètre du rond central

$d)$ La distance entre le point de penalty et le centre du terrain

$e)$ La distance entre le rond central et un arc de cercle de la surface de réparation.

2 ° calculer :

$a)$ L'aire minimale du terrain du football

$b)$ L'aire du rond central

$c)$ L'aire de la surface de réparation

3° calculer le volume minimal de pelouse qu'il faudrait apporter pour recouvrir le terrain sachant qu'elle a une épaisseur de 8,5 cm.

(Concours 2016-2017/Géometrie)

Résolution

1°

$a)\ P = 2 \times L + 2 \times l$

$= \ 2 \times 90 + 2 \times 45$

$P = 270\ m$

$b)\ \ P = 2 \times L + 2 \times l$

$= \ 2 \times 40,32 + 2 \times 16,50$

$P = 113,64\ m$

$c)\ P = 2\pi r$

$= 2 \times 3{,}14 \times 9{,}15$

$P = 57,462\ m$

$d)\ 45 - 11 = 34\ m$

$e)\ 45 - 9{,}15 - 11 - 9{,}15 = 15{,}7\ m$

2°)

$a)\ S = L \times l$

$= 90 \times 45$

$S = 4050\ m^2$

$b)\ S = \pi r^2$

$= 3{,}14 \times (9{,}15)^2$

$S = 262,88865\ m^2$

$c)\ S = L \times l$

$= 40{,}32 \times 16{,}50$

$S = 665,28\ m^2$

3°) $V = L \times l \times h$

$L = 90\ m \qquad l = 45\ m \qquad h = 8{,}5\ cm = 0{,}085\ m$

$V = 90 \times 45 \times 0{,}085$

$V = 344,25\ m^3$

EXERCICE 216

La largeur et la longueur d'une parcelle rectangulaire de $80\ m^2$ de surface et de 42 m de périmètre sont :

$a)\ 12\ m\ et\ 7\ m \quad b)\ 15\ m\ et\ 5\ m \quad c)\ 16m\ et\ 5\ m\ d)ABR$

(Concours 2019-2020/Géométrie)

Résolution

On sait que dans un rectangle :

$S = L \times l \quad et\ \ P = 2 \times l + 2 \times L$

On a le système suivant :

$$\begin{cases} L \cdot l = 80 & (1) \\ 2l + 2L = 42 & (2) \end{cases}$$

De (1) tirons la valeur de L : $L = {}^{80}/_{l} \quad (3)$

(3) dans (2)

$2 \times \frac{80}{l} + 2l = 42$

$\Leftrightarrow \frac{160+2l^2}{l} = 42$

$\Leftrightarrow 160 + 2l^2 = 42l$

$\Leftrightarrow 2l^2 - 42l + 160 = 0$

$\Delta = (-42)^2 - 4 \times 2 \times 160$

$\Delta = 484$

$$\begin{cases} \mathrm{l}_1 = \frac{42+\sqrt{484}}{4} = 16 \\ \mathrm{l}_2 = \frac{42-\sqrt{484}}{4} = 5 \end{cases} \quad (4)$$

Remplaçons la valeur de l pour trouver L :

(4) dans (3)

L$= \frac{80}{5} = 16$

$Donc\ L = 16\ m\ et\ l = 5m$

$\boldsymbol{R)\ d)}$

EXERCICE 217

Le périmètre minimum d'un terrain de football de longueur 90 à 120 m et de largeur 45 à 90 m vaut :

$a)\ 250\ m \quad b)\ 260\ m \quad c)\ 265)\ m \quad d)\ 270\ m \quad e)\ ABR$

(Concours 2019-2020/Géométrie)

Résolution

On sait que $P = 2L + 2l$

$L = 90 \text{ à } 120\ m$

$l = 45 \text{ à } 90\ m$

Le périmètre minimum vaut :

$P = 2 \times 90 + 2 \times 45$

$\quad = 180 + 90$

$P = 270\ m$

$\boldsymbol{R)\ d}$

EXERCICE 218

Le nombre d'arêtes d'un cube vaut :

$a)\ 10 \quad b)\ 11 \quad c)\ 12 \quad d)\ 14 \quad e)\ ABR$

(Concours 2019-2020/Géométrie)

Résolution

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 219

Le nombre des diagonales d'un hexagone vaut :

a) 3 b) 5 c) 6 d) 8 e) 9 f) ABR

(Concours 2019-2020/Géométrie)

Rappel et Résolution

On sait qu'une diagonale est un segment de droite autre que le côté reliant deux sommets d'un polygone.

Les différents segments reliant les sommets sont obtenus par combinaison de n (n étant le nombre de sommets du polygone) éléments pris deux à deux.

$$C_n^2 = \frac{n\,!}{(n-2)!2!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\,!}{(n-2)!2.1}$$

$$= \frac{n\,(n-1)}{2}$$

Pour trouver les diagonales, on doit exclure les n côtés, d'où le nombre de diagonales dans un n-gone est donné par :

$$C_n^2 - n = \frac{n\,(n-1)}{2} - n$$

$$= \frac{n(n-1)-2n}{2}$$

$$= \frac{n(n-1-2)}{2}$$

$$= \frac{n(n-3)}{2}$$

Le nombre de diagonales d'un polygone ayant n sommets est donné par $\frac{n(n-3)}{2}$

Un hexagone est un polygone qui a 6 sommets, d'où le nombre de diagonales vaut :

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{6(6-3)}{2} = \frac{6\times3}{2} = 9$$

$\boldsymbol{R)\ e}$

EXERCICE 220

Choisissez la bonne réponse. Un triangle ayant deux côtés de même longueur est appelé :

$a)$ Triangle rectangle b) Triangle équilatéral c) Triangle isocèle

(Concours 2021-2022/Géométrie)

Résolution

$R)\ c$

EXERCICE 221

Enoncer le théorème de Pythagore

(Concours 2021-2022/Géométrie)

Résolution

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse égal à la somme des carrés de deux autres côtés.

EXERCICE 222

Choisissez la mauvaise réponse. Les éléments de base de la géométrie sont :

$a)$ *Le point* $b)$ *La droite* $c)$ *Le cercle* $d)$ *Le segment*

(Concours 2021-2022/Géométrie)

Résolution

$\boldsymbol{R) \ c}$

EXERCICE 223

Choisissez la mauvaise réponse. La géométrie est :

$a)$ L'étude des formes et des grandeurs de figures

$b)$ Une science de l'espace

$c)$ Une mesure de la terre

(Concours 2021-2022/Géométrie)

Résolution

$\boldsymbol{R) \ c}$

III. LA DROITE

III.1 composantes d'un vecteur de représentant (A, B)

Soient A et B deux points de coordonnées $A(a_1, a_2)\ et\ B(b_1, b_2)$..

Les composantes de $\overline{AB}\ sont\ b_1 - a_1\,; b_2 - a_2$

$\overline{AB}\binom{b_1-a_1}{b_2-a_2}$

Exemple :

Soient $A(-2,4)\ et\ B(1,3)$ deux points :

$\overline{AB}\begin{pmatrix}1-(-2)\\3-4\end{pmatrix}$

$\overline{AB}\binom{3}{-1}$

III.2 Equations d'une droite

III.2.1 Equation vectorielle d'une droite

Considérons la droite D, a et b deux de ses points.

$\overrightarrow{ap} = \lambda\overrightarrow{ab}$ est l'équation vectorielle de la droite D.

$\overrightarrow{ab}$=$\vec{u}$ est le vecteur directeur de la droite D.

$p\ est\ un\ point\ de\ la\ droite\ D$

III.2.2 Equations paramétriques d'une droite

Soit la droite D ayant un point $a(x_0, y_0)$ et $\vec{u}$=$\overrightarrow{ab}(\alpha, \beta)$ un vecteur directeur de D. Etant donné $p(x, y)$ un autre point de la droite D.

Les équations paramétriques de la droite D sont :

$\begin{cases} x=x_0+\lambda\alpha \\ y=y_0+\lambda\beta \end{cases}.$

$\lambda\ est\ un\ paramètre$

III.2.3 Equations cartésiennes

$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}$

Ou $\beta(x - x_0) = \alpha(y - y_0)$

III.2.4 Equation d'une droite passant par un point et de coefficient angulaire m donné

$(y - y_0) = m(x - x_0)$

III.2.5 Equation de la droite passant par deux points

L'équation de la droite passant par deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$..

Est :

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

III.2.6 Deux équations représentant la même droite

Soit la forme générale de l'équation cartésienne de la droite d :

$d \equiv Ay + Bx + C = 0$

Le coefficient de direction de est : $-\frac{B}{A}$

Deux équations $A_1 y + B_1 x + C_1 = 0$ et $A_2 y + B_2 x + C_2 = 0$ représentent une même droite si et seulement si $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = t$

Ou $A_1 = t\,A_2; B_1 = t\,B_2\,; C_1 = t\,C_2$

Exemple :

Les équations $9x - 21y + 6 = 0$ et $3x - 7y + 2 = 0$ représentent la même droite, car $\frac{9}{3} = \frac{-21}{-7} = \frac{6}{2} = 3$

III.3. La colinéarité de trois points

Trois points $A(x_1\,, y_1)\,; B(x_2\,, y_2)$ et $C(x_3\,, y_3)$ sont colinéaires si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad ou \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemple

Les points $A(1, 2)\,; B(2, 4)$ et $C(-1\,, -2)$ sont colinéaires car :

$$\begin{vmatrix} 2 - 1 & 4 - 2 \\ -1 - 1 & -2 - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-4) - (-2)2$$

$$= -4 + 4$$

$$= 0$$

III.4. Intersection de deux droites

Soient deux droites $d_1 \equiv A_1y + B_1x + C_1 = 0 \;\; et \; d_2 \equiv A_2y + B_2x + C_2 = 0$ telles que leurs coefficients de direction sont différents.

Les coordonnées de leur point d'intersection sont obtenues en résolvant le système :

$$\begin{cases} A_1y + B_1x + C_1 = 0 \\ A_2y + B_2x + C_2 = 0 \end{cases}$$

Il faut que le déterminant principal soit non nul pour que les deux droites soient sécantes, c'est-à-dire $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Exemple

Déterminer l'intersection des droites $d_1 \equiv -5y + 4x + 9 = 0 \;\; et \; d_2 \equiv y + x - 9 = 0$

Commençons par vérifier si les deux équations sont sécantes :

$$\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-5)(1) - 4(1)$$

$$= -5 - 4$$

$$= -9 \neq 0$$

Donc les deux droites sont sécantes et l'intersection existe, il suffit de résoudre le système formé par les équations de deux droites pour trouver les coordonnées de l'intersection :

$$\begin{cases} -5y + 4x + 9 = 0 \\ \quad y + x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y + 4x = -9 \;\; (1) \\ \quad y + x = 9 \;\; (2) \end{cases}$$

Utilisons la méthode de substitution

$De\ (2), tirons\ x : x = 9 - y\ \ (3)$

$$(3)\ dans\ (1) \;\Rightarrow\; -5y + 4(9 - y) = -9$$

$$\Leftrightarrow\; -5y + 36 - 4y = -9$$

$$\Leftrightarrow\; -9y = -9 - 36$$

$$\Leftrightarrow\; -9y = -45$$

$$\Leftrightarrow 9y = 45$$

$$\Leftrightarrow y = {}^{45}/_{9}$$

$$\Leftrightarrow y = 5 \qquad (4)$$

$$(4)\ dans\ (3) \;\Rightarrow x = 9 - 5$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

L'intersection de ces deux droites est le point $P(4,5)$

III.5. Faisceau des droites

Soit $d_1 \equiv A_1y + B_1x + C_1 = 0 \ et \ d_2 = A_2y + B_2x + C_2 = 0$ deux droites sécantes, c'est-à-dire $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

L'équation générale des droites passant par le point d'intersection de $d_1 \ et \ d_2$ est

$$\lambda_1(A_1y + B_1x + C_1) + \lambda_2(A_2y + B_2x + C_2) = 0 \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$$

$$\lambda_1A_1y + \lambda_1B_1x + \lambda_1C_1 + \lambda_2A_2y + \lambda_2B_2x + \lambda_2C_2 = 0$$

$$(\lambda_1A_1 + \lambda_2A_2)y + (\lambda_1B_1 + \lambda_2B_2)x + \lambda_1C_1 + \lambda_2C_2 = 0$$

En divisant des deux membres par λ_1, on a :

$$\frac{(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2)}{\lambda_1}y + \frac{(\lambda_1B_1+\lambda_2B_2)}{\lambda_1}x + \frac{\lambda_1C_1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2C_2}{\lambda_1} = 0$$

$\left(A_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}A_2\right)y + \left(B_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}B_2\right)x + C_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}C_2 = 0$ En posant $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \lambda$

$$(A_1 + \lambda A_2)y + (B_1 + \lambda B_2)x + C_1 + \lambda C_2 = 0$$

$$A_1y + \lambda A_2y + B_1x + \lambda B_2x + C_1 + \lambda C_2 = 0$$

$$A_1y + B_1x + C_1 + \lambda A_2y + \lambda B_2x + \lambda C_2 = 0$$

$$A_1y + B_1x + C_1 + \lambda(A_2y + B_2x + C_2) = 0$$

Trois droites $d_1 \equiv A_1y + B_1x + C_1 = 0; \ d_2 = A_2y + B_2x + C_2 = 0 \ et \ d_3 = A_3y + B_3x + C_3 = 0$ se coupent en un point ou sont concurrentes si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad Avec \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

III.6. Equation globale de deux droites

Soient deux droites $d_1 \equiv k_1y + p_1x + q_1 = 0 \ et \ d_2 \equiv k_2y + p_2x + q_2 = 0$, l'équation globale de $d_1 \ et \ d_2$ est donnée par :

$$(k_1y + p_1x + q_1)(k_2y + p_2x + q_2) = 0$$

$$k_1k_2y^2 + k_1p_2xy + k_1q_2y + p_1k_2\,xy + p_1p_2x^2 + p_1q_2x + q_1k_2y + q_1p_2x + q_1\,q_2 = 0$$

$$k_1k_2y^2 + (k_1p_2 + p_1k_2)xy + p_1p_2x^2 + (k_1q_2 + q_1k_2)y + (p_1q_2 + q_1p_2)x + q_1q_2 = 0$$

En posant $A = k_1k_2$, $2B = k_1p_2 + p_1k_2$, $C = p_1p_2$, $2D = k_1q_2 + q_1k_2$, $2E = p_1q_2 + q_1p_2$, $F = q_1\,q_2$, l'équation globale devient :

$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$

Pour que ce trinôme représente deux droites, il faut que :

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0$$

Quand on dispose de l'équation globale de deux droites, pour trouver les équations de ces droites, on considère l'équation comme un trinôme du second degré en y $(ou\ en\ x)$ et on déduit les racines.

EXERCICE 224

Soit la droite D dans la direction du vecteur $\vec{v} = (3,5)$ et passant par le point $a(2, -2)$. Trouver les équations vectorielle, paramétriques et analytique de D.

(Concours 2008-2009/Géométrie)

Résolution

Equation vectorielle

$\overrightarrow{ap} = \lambda\vec{v}$ p est un point de la droite

Equations paramétriques

$\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \end{cases}.$

Equation analytique

$\beta(x - x_0) = \alpha(y - y_0)$

$5(x - 2) = 3(y + 2)$

$\Leftrightarrow 5x - 10 = 3y + 6$

$\Leftrightarrow 5x - 10 - 3y - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 5x - 3y - 16 = 0$

EXERCICE 225

Pour quelle valeur de λ l'équation suivante représente-t-elle deux droites ?

$12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + \lambda = 0$

$a) -21 \quad b)\ 1 \quad c)\ 2 \quad d)\ 21 \quad e) -5$

(Concours 2020-2021/Géometrie)

(Concours 2023-2024/Géométrie)

Résolution

L'équation générale de deux droites a la forme générale suivante :

$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$

Elle doit vérifier la condition suivante : $\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0$

$12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + \lambda = 0$

Dans notre cas $A = 2, B = -\frac{10}{2}$ $, C = 12, D = -\frac{5}{2}$ $, E = \frac{11}{2}$ $\; et\ F = \lambda$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & -5/2 \\ -5 & 12 & 11/2 \\ -5/2 & 11/2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & -5/2 \\ -5 & 12 & 11/2 \\ -5/2 & 11/2 & \lambda \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -5 \\ -5 & 12 \\ -5/2 & 11/2 \end{matrix} = 0$$

$$\left|\begin{matrix} 2 & -5 & -5/2 \\ -5 & 12 & 11/2 \\ -5/2 & 11/2 & \lambda \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & -5 \\ -5 & 12 \\ -5/2 & 11/2 \end{matrix}$$

$\Big[(2 \times 12 \times \lambda) + (-5) \times \frac{11}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{5}{2}\right) \times (-5) \times \frac{11}{2}\Big] - \Big[\left(-\frac{5}{2}\right) \times 12 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + \frac{11}{2} \times \frac{11}{2} \times$
$2 + \lambda \times (-5) \times (-5)\Big] = 0$

$\left(24\lambda + \frac{275}{4} + \frac{275}{4}\right) - \left(\frac{300}{4} + \frac{242}{4} + 25\lambda\right) = 0$

$\left(24\lambda + \frac{275+275}{4}\right) - \left(\frac{300+242}{4} + 25\lambda\right) = 0$

$24\lambda + \frac{550}{4} - \frac{542}{4} - 25\lambda = 0$

$(24 - 25)\lambda + \frac{550-542}{4} = 0$

$-\lambda + \frac{8}{4} = 0$

$-\lambda + 2 = 0$

$-\lambda = -2$

$\lambda = 2$

R) c

EXERCICE 226

Pour que valeur de m la droite d'équation $y = mx + 3$ passe-t-elle par le point d'intersection des droites $y = x + 1 \ et \ y = 2x + 2$?

$a) \, 1 \quad b) \, 2 \quad c) \, 3 \quad d) - 1 \quad e) - 2$

(Concours 2020-2021/Géometrie)

(Concours 2023-2024/Géométrie)

Résolution

Soient trois droites $d_1 \equiv A_1 y + B_1 x + C_1 = 0 \, , d_2 \equiv A_2 y + B_2 x + C_2 = 0 \ et \ d_3 \equiv A_3 y + B_3 x + C_3 = 0$. Les trois droites sont concurrentes ou se coupent en un point si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad Avec \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Dans notre cas, les équations de droites peuvent s'écrire :

$y - x - 1 = 0 \, ; y - 2x - 2 = 0 \ \ et \ y - mx - 3 = 0$

$A_1 = 1 \, , B_1 = -1, C_1 = -1, A_2 = 1, B_2 = -2, C_2 = -2, A_3 = 1, B_3 = -m \, , C_3 = -3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2) - 1(-1)$$

$$= -2 + 1$$

$$= -1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -m & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -m & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -m \end{matrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -m & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -m \end{matrix} = 0$$

$[1(-2)(-3) + (-1)(-2)(1) + (-1)(1)(-m)] - [(1)(-2)(-1) + (-m)(-2)(1) + (-3)(1)(-1)]$

$(6 + 2 + m) - (2 + 2m + 3) = 0$

$(8 + m) - (2m + 5) = 0$

$8 + m - 2m - 5 = 0$

$-m+3=0$

$-m=-3$

$m=3$

<u>Autre méthode</u>

$y-x-1=0\,;y-2x-2=0\ \ et\ y-mx-3=0$

$A_1=1\,,B_1=-1,C_1=-1,A_2=1,B_2=-2,C_2=-2,A_3=1,B_3=-m\,,C_3=-3$

$\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & -2\end{vmatrix}=1(-2)-1(-1)$

$=-2+1$

$=-1\neq 0$

Trouvons le point d'intersection de ces deux droites

$\begin{cases} y-x-1=0 & (1)\\ y-2x-2=0 & (2)\end{cases}$

$De\ (1)\ tirons\ \ y,on\ a: y=x+1\ \ (3)$

$(3)\ dans\ (2)\ \Rightarrow x+1-2x-2=0$

$\Leftrightarrow -x-1=0$

$\Leftrightarrow -x=1$

$\Leftrightarrow x=-1 \qquad (4)$

$(4)\ \ dans\ (3)\ \Rightarrow y=-1+1$

$\Leftrightarrow y=0$

Le point d'intersection est $P(-1\,;0)$

Remplaçons les valeurs trouvées dans l'équation de la troisième droite

$y-mx-3=0$

$0-m(-1)-3=0$

$0+m-3=0$

$m=3$

$\boldsymbol{R})\ \boldsymbol{c}$

EXERCICE 227

Enoncer et illustrer graphiquement les trois cas d'égalités des triangles

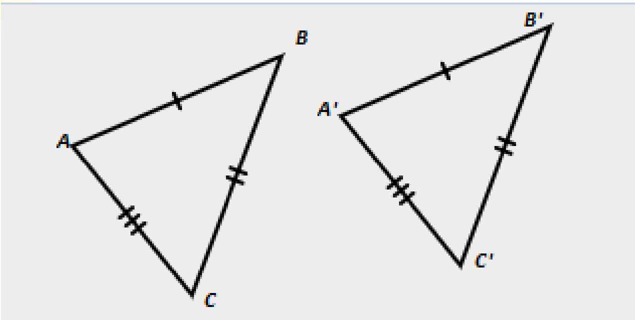
(Concours 2008-2009/Géométrie)

Résolution

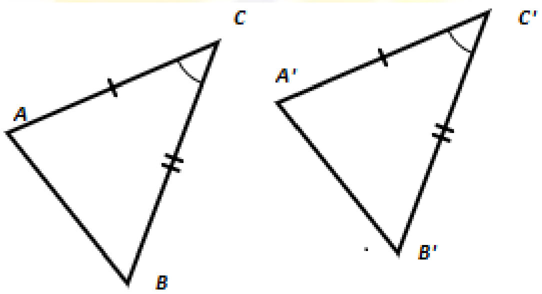
Soient deux triangles ABC et A'B'C'. Les deux triangles sont égaux lorsque l'un des trois cas suivants est vérifié :

1) Les côtés sont égaux deux à deux $(\overline{AB} = \overline{A'B'}\ ;\ \overline{AC} = \overline{A'C'}$

$et\ \overline{BC} = \overline{B'C'}$)

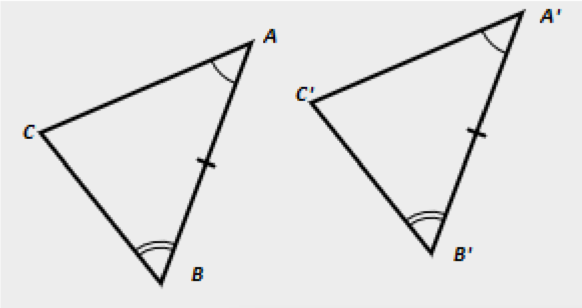


2) Les deux triangles ont un angle de même mesure compris entre des côtés deux à deux égaux.



3) Les deux triangles ont un côté de même longueur compris entre des angles de même mesure deux à deux.

$(\overline{AB} = \overline{A'B'}\ \ et\ \hat{A} = \widehat{A'};\ \hat{B} = \widehat{B'}$



EXERCICE 228

Soit le segment $[a, b]: a(-1, 3)\ et\ b(2, -4)$.

Trouver la coordonnée des points p et q, tels que $\overrightarrow{ap} = \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{qb}$

(Concours 2018-2019/Géométrie)

Résolution

Posons $p(x, y) \qquad et\ q(w, t)$.

$\overrightarrow{ap}(x + 1, y - 3)$

$\overrightarrow{pq}(w - x, t - y)$

$\overrightarrow{qb}(2 - w, -4 - t)$

$\overrightarrow{ap} = \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{qb}$

$\Leftrightarrow (x + 1, y - 3) = (w - x, t - y) = (2 - w, -4 - t)$

On a le système suivant :

$x + 1 = w - x\ (1)$

$x + 1 = 2 - w\ (2)$

$y - 3 = t - y\ (3)$

$y - 3 = -4 - t\ (4)$

De (1) : $x + 1 = w - x \Leftrightarrow x + x + 1 = w$

$$\Leftrightarrow w = 2x + 1 \quad (5)$$

(5) dans (2)

$x + 1 = 2 - (2x + 1)$

$\Leftrightarrow x + 1 = 2 - 2x - 1$

$\Leftrightarrow x + 2x = 2 - 1 - 1$

$\Leftrightarrow 3x = 0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (6)

(6) dans (5)$\Rightarrow w = 2 \times 0 + 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{w} = \mathbf{1}$

De (3) : $y - 3 = t - y$

$\Leftrightarrow y + y - 3 = t$

$\Leftrightarrow t = 2y - 3 \qquad (7)$

(7) dans (4) : $y - 3 = -4 - (2y - 3)$

$\Leftrightarrow y - 3 = -4 - 2y + 3$

$\Leftrightarrow y + 2y = -4 + 3 + 3$

$\Leftrightarrow 3y = 2$

$\Leftrightarrow y = {}^{2}/_{3}$ (8)

(8) dans (7)

$t = 2 \times \frac{2}{3} - 3$

$t = {}^{-5}/_{3}$

$p(x, y) \qquad et\ q(w, t)$

$\Leftrightarrow p(0;\ {}^{2}/_{3}) \quad et\ q\left(1;\ {}^{-5}/_{3}\right)$

EXERCICE 229

Trouver la coordonnée des extrémités du segment $[a, b]$ que les points p(2,3) et q(-1,2) partagent de telle manière que $\overrightarrow{ap} = \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{qb}$

(Concours 2018-2019/Géométrie)

Résolution

Posons $a(x, y) \qquad et\ b(w, t)$.

$\overrightarrow{ap}(2 - x, 3 - y)$

$\overrightarrow{pq}(-3, -1)$

$\overrightarrow{qb}(w + 1, t - 2)$

$\overrightarrow{ap} = \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{qb}$

$\Leftrightarrow (2 - x, 3 - y) = (-3, -1) = (w + 1, t - 2)$

On a le système suivant :

$2 - x = -3 \qquad \Rightarrow x = 5\ (1)$

$2 - x = w + 1$ (2)

$3 - y = -1 \quad\quad \Rightarrow y = 4$ (3)

$3 - y = t - 2$ (4)

(1) Dans (2) : $2 - 5 = w + 1 \Rightarrow w = -4$

(3) dans (4) : $3 - 4 = t - 2 \Rightarrow t = 1$

$a(x, y) \quad et\ b(w, t)$

$\Leftrightarrow a(5; 4) \quad et\ b(-4; 1)$

EXERCICE 230

Si dans un triangle ABC l'égalité $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ est vérifiée, alors ce triangle est rectangle en :

a) B b) A c) C d) ABR

(Concours 2019-2020/Géométrie)

Résolution

R) b

EXERCICE 231

Un triangle isocèle est :

a. un triangle qui a deux côtés de même longueur b. un triangle qui a deux angles de même mesure c. un triangle qui a un axe de symétrie d)ABR

(Concours 2019-2020/Géométrie)

Résolution

R) d

Car a et c sont correctes

EXERCICE 232

Un triangle déséquilibré est un triangle dont :

a) les trois cotés sont des longueurs différentes b) les trois angles sont de mesures différentes c) l'axe de symétrie est inexistant d) ABR

(Concours 2019-2020/Géométrie)

IV. LE CERCLE

Le cercle est l'ensemble des points du plan situés à égale distance d'un point fixe. La distance et le point fixe sont appelés respectivement rayon et centre du cercle.

L'équation du cercle de centre $C(a, b)$ et de rayon R est donnée par :

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\theta = R^2$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors l'équation devient : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Si le centre est à l'origine des axes, alors les deux équations deviennent :

$x^2 + y^2 + 2\,xy\cos\theta = R^2$

$x^2 + y^2 = R^2$

L'équation générale $Ay^2 + 2B\,xy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$ représente un cercle si $B = A\cos\theta \;\; et\; A = C$. Dans ce cas, elle s'écrit :

$Ay^2 + 2xy\,A\cos\theta + Ax^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$

$Si\ \theta = \frac{\pi}{2}\ alors\ B = 0\ \ et\ A = C$, l'équation s'écrit : $Ay^2 + Ax^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$

L'équation normalisée du cercle est $y^2 + 2xy\cos\theta + x^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, elle devient : $y^2 + x^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

Avec $\alpha = \frac{2E}{A}$; $\beta = \frac{2D}{A}$; $\gamma = \frac{F}{A}$

Donc l'équation du cercle est normalisée lorsque les coefficients de $x^2\ et\ y^2$ sont égaux à 1.

La coordonnée (a, b) du centre et le rayon R du cercle sont donnés par :

$$\begin{cases} a = -\frac{E}{A} \\ b = -\frac{D}{A} \\ a^2 + b^2 - R^2 = \frac{F}{A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = \alpha \\ -2b = \beta \\ a^2 + b^2 - R^2 = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{\alpha}{2} \\ b = -\frac{\beta}{2} \\ R^2 = a^2 + b^2 - \gamma \end{cases}$$

EXERCICE 233

Quel est le centre du cercle de l'équation $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 3$?

$a)\ (3{,}1)$ $b)\ (5,1)$ $c)\ (1,-5)$ $d)\ (-1,5)$ $e)\ (1{,}3)$

(Concours 2020-2021/Géométrie)

(Concours 2023-2024/Géométrie)

Résolution

L'équation du cercle de centre $C(a,b)$ et de rayon R est donnée par

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 3$

Par identification $a = 1, b = -5$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 234

Quel est le rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$

$a) - 4$ $b)\ 4$ $c)\ 3$ $d)\ 2$ $e) - 2$

(Concours 2020-2021/Géométrie)

(Concours 2023-2024/Géométrie)

Résolution

L'équation normalisée du cercle est : $y^2 + x^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4 \iff x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

$\alpha = -4\ ;\ \beta = 2\ ;\ \gamma = -4$

$$\begin{cases} a = -\frac{\alpha}{2} \\ b = -\frac{\beta}{2} \\ R^2 = a^2 + b^2 - \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{(-4)}{2} = 2 \\ b = -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

$R^2 = (2)^2 + (-1)^2 - (-4)$

$\quad = 4 + 1 + 4$

$R^2 = 9 \Rightarrow R = \sqrt{9}$

$R = 3$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 235

Quel est dans $\mathbb{R}_+$, le point d'intersection de la droite $y = 3x + 1$ et du cercle $x^2 + y^2 - 50 = 0$

$a)$ $(2{,}5\,;6{,}6)$ $b)$ $(1{,}1\,;2{,}2)$ $c)$ $(7{,}5\,;0{,}6)$ $d)$ $(1{,}9\,;6{,}8)$ $e)(3;)$

(Concours 2020-2021/Géométrie)

(Concours 2023-2024/Géométrie)

Résolution

Pour trouver le point d'intersection, il suffit de résoudre le système formé par les deux équations :

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \quad (1) \\ x^2 + y^2 - 50 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$(1)\ dans\ (2) \Rightarrow x^2 + (3x + 1)^2 - 50 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (3x)^2 + 2(3x)(1) + 1^2 - 50 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 9x^2 + 6x + 1 - 50 = 0$

$\Leftrightarrow 10x^2 + 6x - 49 = 0$

$\Delta = (6)^2 - 4(10)(-49)$

$= 36 + 1960$

$\Delta = 1996$

$x_1 = \frac{-6-\sqrt{1996}}{2(10)} = \frac{-6-44{,}68}{20} = \frac{-50{,}68}{20} = -2{,}5\ A\ rejeter$

$x_2 = \frac{-6+\sqrt{1996}}{2(10)} = \frac{-6+44{,}68}{20} = \frac{38{,}68}{20} = 1{,}93 \qquad (3)$

$(3)\quad dans\ (1) \Rightarrow y = 3(1{,}93) + 1$

$\Leftrightarrow y = 5{,}79 + 1$

$\Leftrightarrow y = 6{,}79$

$\Leftrightarrow y \cong 6{,}8$

$(1{,}9\,;6{,}8)$

R) d

V. MEDIATRICE D'UN SEGMENT

La médiatrice d'un segment est une droite qui coupe ce segment perpendiculairement à son milieu.

Procédure pour trouver l'équation de la médiatrice

Soit un segment $[ab]$ $tel\ que\ a(a_1, b_1)\ et\ \ b(a_2, b_2)$.

1. Trouver le milieu du segment de droite

Les coordonnées du milieu du segment sont données par la formule :

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}; \frac{b_1 + b_2}{2}\right)$$

Exemple : Soit un segment $[ab]$ $tel\ que\ a(2, 1)\ et\ \ b(-3, 3)$.

Le milieu du segment est donné par

$$\left(\frac{2-3}{2}; \frac{1+3}{2}\right)$$

Les coordonnées du milieu du segment $[ab]$ sont $\left(\frac{-1}{2}; 2\right)$

2. Trouver la pente des deux points

On trouve cette pente par la formule :

$\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$

Exemple :

Pour notre exemple, on aura :

$\frac{3-1}{-3-2}$

la pente est de ${}^{2}/_{-5} = -{}^{2}/_{5}$

3. Calculer ensuite l'inverse opposé de la pente

Dans notre cas, c'est $\frac{5}{2}$

4. Déterminer l'équation de la médiatrice sous sa forme affine :

$y = mx + b$

Ensuite, remplacer "m" de la fonction affine par l'inverse opposé de la pente.

Dans notre cas, on aura : $y = \frac{5}{2}x + b$

5. Remplacer "x" et "y" de la fonction affine par les coordonnées d'un point se trouvant sur la médiatrice. On peut prendre les coordonnées du point milieu calculées plus haut car ce point appartient aussi à la médiatrice.

Pour notre exemple, on avait trouvé : $\left(\frac{-1}{2}; 2\right)$

$y = \frac{5}{2}x + b \Leftrightarrow 2 = \frac{5}{2} \times \frac{-1}{2} + b$

$\Leftrightarrow b = 2 + \frac{5}{4}$

$b = \frac{13}{4}$

D'où la médiatrice du segment $[AB]$ $a\ pour\ équation\ y = \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}$

EXERCICE 236

Rechercher la médiatrice du segment $[AB], lorsque\ a(2p, 2q)\ et\ b(2r, 2s)$

(Concours 2018-2019/Géométrie)

Résolution

$a(2p, 2q)\ et\ b(2r, 2s)$

Le point milieu du segment a pour coordonnées $\left(\frac{2p+2r}{2}; \frac{2q+2s2}{2}\right)$

$(p + r; q + s)$

Trouvons la pente :

$\frac{2s-2q}{2r-2p} = \frac{s-q}{r-p}$

L'inverse opposé de la pente : $-\frac{r-p}{s-q}$

Soit $y = mx + b$ l'équation de la médiatrice.

$m = -\frac{r-p}{s-q}$

$y = -\frac{r-p}{s-q}x + b$

Trouvons b :

$q + s = \frac{p-r}{s-q} \times (p + r) + b$

$\Leftrightarrow b = \frac{s^2+r^2-q^2-p^2}{s-q}$

D'où l'équation de la médiatrice est : $y = -\frac{r-p}{s-q}x + \frac{s^2+r^2-q^2-p^2}{s-q}$

EXERCICE 237

Deux angles dont la somme de leurs mesures vaut 90 ° sont dits :

a) supplémentaires b) anti-supplémentaires c) complémentaires d) anti-complémentaires e) ABR

(Concours 2019-2020/Géométrie)

Résolution

$R) \ c$

QUATRIÈME PARTIE : LA PHYSIQUE

I. MECANIQUE

I.1 Multiples et sous multiples des unités des mesures

Le tableau donne la correspondance de chaque multiple ou sous multiple à l'unité

les multiples (10^{+n})		*et leurs abréviations*	*les sous multiples* (10^{-n})		*et leurs abréviations*
10^{+1}	déca	da	10^{-1}	déci	d
10^{+2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{+3}	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^{+6}	méga	M	10^{-6}	micro	µ
10^{+9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{+12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{+15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{+18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{+21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{+24}	yotta	Y			

Le tableau de la relation entre les mesures de capacité, volume et du poids :

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U
			hl	dal	l	dl	cl	ml			
			Q		kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

EXERCICE 238

Un mètre cube d'eau correspond à une masse de 1000 kg. Trouver la masse qui correspond à un décimètre cube d'eau ?

(Concours 2023-2024/Physique-Mécanique)

Résolution

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U
			Q		kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
					1						

$1\ dm^3 = 1\ kg$

EXERCICE 239

Trois ouvriers creusent un trou en 12 jours. Combien de temps mettront 6 ouvriers pour creuser un trou de même profondeur ?

(Concours 2023-2024/Physique-Mécanique)

Résolution

$Trois\ ouvriers\ =\ 12\ jours$

$Un\ ouvrier = 12\ \times 3 = 36\ jours$

$\Rightarrow 6\ ouvriers = \frac{36}{6} = 6\ jours$

EXERCICE 240

Une nanoseconde correspond à :

$a)\ 1/10^9$ s $\quad b)\ a)\ et\ c)\ sont\ correctes \quad c)\ 10^{-9}$s $\quad d) 10^9 s \quad e) ABR$

(Concours 2015-2016/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

Résolution

En regardant le tableau, 1 ns=$10^{-9}s$

$$\frac{1}{10^9}s$$

$\boldsymbol{R)\ b}$

EXERCICE 241

Laquelle des longueurs suivantes est la plus grande ?

$a)\ 10^5 cm \quad b)\ 10^5 mm \quad c) 10^7 \mu m \quad d) 10^{10} nm \quad e)\ ABR$

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

(Concours 2015-2016/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

(Concours 2022-2023/Physique-Mécanique)

Résolution

Pour une comparaison aisée, ramenons toutes ces valeurs dans une même unité, le m par exemple :

a)$10^5\ cm = 10^5.10^{-2}m = 10^3m$

b) $10^5\ mm = 10^5.10^{-3}m = 10^2m$

c) $10^7\ \mu m = 10^7.10^{-6}m = 10\ m$

d) $10^{10}\ nm = 10^{10}.10^{-9}m = 10m$

la plus grande valeur est 10^3m

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 242

Une femto seconde correspond à :

$a)\ 1/10^{-12}$ s $\quad b) -12\ s\quad c)\ 10^{-15}$s $\qquad d)10^{15}s \qquad e)ABR$

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

Résolution

En regardant le tableau, 1 femto s=$10^{-15}s$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 243

Laquelle de ces masses est la plus petite

$a)\ 10^2\ \mu g \qquad b)\ 10^3\ g\quad c)\ 1\ kg\quad d)\ 10^3\ mg\quad e)\ aucune\ de\ ces\ réponses$

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

Résolution

Convertissons toutes ces masses en g pour la bonne comparaison

$10^2\ \mu g = 10^2\ \times 10^{-6}\ g = 10^{2-6} = 10^{-4}\ g$

$10^3\ g = 10^3\ g$

$1\ kg = 1 \times 10^3 = 10^3\ g$

$10^3\ mg = 10^3 \times 10^{-3}g = 10^{3-3}g = 10^0g = 1g$

La plus petite masse est $10^{-4}\ g$

R) a

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE110

1 mètre équivaut à combien de Yottamètre :

$a)\ 10^{24}$ $b)\ 10^{-24}$ $c)\ {}^{1}/_{10^{24}}$ $d)\ 24$ $e) -24$

EXERCICE AE111

Laquelle des longueurs suivantes est la plus grande ?

$a)\ 10^2 cm$ $b)\ 10^6 mm$ $c) 10^2 \mu m$ $d) 10^9 nm$ $e)\ ABR$

EXERCICE AE112

Laquelle des longueurs suivantes est la plus petite ?

$a)\ 10^{24} Km$ $b)\ 10^6 Gm$ $c) 10^{34} \mu m$ $d) 10^{46} nm$ $e)\ ABR$

EXERCICE AE113

Laquelle de ces masses est la plus petite

$a)\ 10^3\ \mu g$ $b)\ 10^4\ g$ $c)\ 0,5\ kg$ $d)\ 10^4\ mg$ $e)\ aucune\ de\ ces\ réponses$

EXERCICE AE114

$1\ m^3$ équivaut à combien de litres ?

$a)\ 1$ $b)\ \ 1000$ $c)\ 10$ $d)\ 100$ $e)\ 0,1$

EXERCICE AE115

1 hectare équivaut à combien de m^2

$a)\ 1$ $b)\ 10$ $c)\ 100$ $d)\ 1000$ $e)\ 10000$

EXERCICE AE116

Parmi les propositions suivantes laquelle est juste :

$a)\ 1mm^3 = 1\ ml$ $b)\ 1cm^3 = 1ml$ $c)\ 1l = 0,1dm^3$ $d)\ 1cm^3\ pèse\ 1mg$ $e)\ 1l = 0,01m^3$

I.2 CINEMATIQUE

I.2.1 Mouvement rectiligne uniforme

$x = x_0 + v.t$

$si\ x_0 = 0 \Rightarrow x = v.t$

$x: l'espace\ en\ m$

$v: la\ vitesse\ en\ m/s$

$t: le\ temps\ en\ s$

I.2.2 Mouvement rectiligne uniformément varié

$x = x_0 + v_0.t + \frac{1}{2}at^2$

$si\ x_0 = v_0 = 0\ \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2$

$v = v_0 + at$

$si\ v_0 = 0\ \Rightarrow v = at$

$v^2 - {v_0}^2 = 2a(x - x_0)$

$si\ \ x_0 = v_0 = 0 \Rightarrow\ v^2 = 2ax$

Espace parcouru pendant la n^{ième} seconde :

$x = a(n - {}^1/_2)$

$x: l'espace\ en\ m$

$v: la\ vitesse\ en\ m/s$

$t: le\ temps\ en\ s$

$a: accélération\ en\ m/s^2$

I.2.3 chute libre

$h = h_0 + v_0.t + \frac{1}{2}gt^2$

$si\ x_0 = v_0 = 0\ \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2$

$v = v_0 + gt$

$si\ v_0 = 0\ \Rightarrow v = gt$

$v^2 - {v_0}^2 = 2g(h - h_0)$

$si\ \ h_0 = v_0 = 0 \Rightarrow\ v^2 = 2gh$

Chute libre de bas vers le haut :

$$h = h_0 + v_0.t - \frac{1}{2}gt^2$$

I.2.4 Mouvement rectiligne sinusoïdal

$x = a\sin(\omega t + \phi)$

$\omega = 2\pi N$

$N = \frac{1}{T}$

$v = a\omega\cos(\omega t + \phi)$

$\gamma = -\omega^2.x$

x: *elongation en m*

N: *la fréquence en Hertz(hz)*

ω: *la pulsation en rad/s*

T = *la période en s*

t: *temps en s*

a: *amplitude*

I.2.5 Mouvements circulaires

Mouvement circulaire uniforme

$\theta = \theta_0 + \omega t$

$S = S_0 + vt$

$S = R.\theta$ $\qquad v = R.\omega$

$\gamma_N = R.\omega^2$

S: *abscisse curviligne en m*

θ: *abscisse angulaire en rad*

R :*rayon de la trajectoire en m*

EXERCICE 244

Un cycliste quitte la gare centrale de la ville de Kinshasa à 3 heures se dirigeant dans une certaine direction et roule à 20 km par heure. Tands qu'un motocycliste quitte la même gare centrale à 4 heures, se dirigeant dans la même direction avec une vitesse de 45 km à l'heure. A quelle heure le motocycliste rejoint-il le cycliste ? ……………………. Et à quelle distance à partir de la centrale ?...........

(Concours 2023-2024/Physique-Mécanique)

Résolution

Cycliste	Motocycliste
$v_1 = 20\ km/h$	$v_2 = 45\ km/h$
$t_1 = t$	$t_2 = t - 1$

Le motocycliste rejoint le cycliste si $x_1 = x_2$

$$v_1 t_1 = v_2 t_2$$

$$20\ t = 45(t-1)$$

$$20\ t = 45t - 45$$

$$20\ t - 45t = -45$$

$$-25\ t = -45$$

$$25t = 45$$

$$t = {}^{45}/_{25}$$

$$t = 1{,}8\ heures$$

Heure : $3\ heures + 1,8\ heures$

$= 4\ heures + 0{,}8\ heures$

$= 4\ heures + (0{,}8\ \times 60)\ minutes$

$= 4\ h\ 48'$

Le lieu $= 20 \times 1{,}8$

$= 36\ kms$

EXERCICE 245

Une voiture soumise à une accélération horizontale (plan cartésien accélération-temps) a une vitesse qui augmente linéairement avec :

a) le temps b) la distance c) le temps au carré d) la distance au carré e) ABR

(Concours 2015-2016/Physique Mécanique)

(Concours 2011-2012/Physique Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique Mécanique)

(Concours 2021-2022/Physique Mécanique)

(Concours 2022-2023/Physique Mécanique)

Résolution

$v = v_0 + a.t$

$v_0 = 0 \Rightarrow v = at$

Comme l'accélération est constante, la vitesse augmente avec le temps.

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 246

L'expression $y = y_0 + v_0 t + 0{,}5at^2$ (où $y, y_0, t\ et\ a$ représentent respectivement la distance à l'instant t, la distance initiale, la vitesse initiale, le temps et l'accélération) est valable lorsque :

$a)$ y est constant b) v est constant c) a est constant d) toujours e)jamais

(Concours 2021-2022/Physique Mécanique)

Résolution

$y = y_0 + v_0 t + 0{,}5at^2$ est l'équation horaire du mouvement rectiligne uniformément varié, et dans ce mouvement, l'accélération est constante.

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 247

Si le déplacement d'un corps est une fonction quadratique du temps, le corps se déplace avec

$a)$ Une accélération constante b) une accélération variable c) une vitesse scalaire constante d) aucune de ces réponses

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

Résolution

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 248

Un cycliste quitte une ville A à 3h se dirigeant dans une certaine direction où il roule à 20 km par heure. Un motocycliste quitte A à 4 heures, se dirigeant dans la même direction avec une vitesse de 45 km à l'heure. Le motocycliste rejoint le cycliste à :

$a)\ 4h\ 20\,\mathrm{min} \quad b)\ 4h\ 15\ min\ c)\ 4h\ 48\ min\ \ d)4h\ 30\ min\ e)\ ABR$

(Concours 2015-2016/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

(Concours 2022-2023/Physique-Mécanique)

Résolution

$V_1 = 20\ km/h$ $\qquad$ $V_2 = 45\ km/h$

$x_1 = v_1 \times t$ $\qquad$ $x_2 = v_2 \times t_2$

Le motocycliste va rejoindre le cycliste lorsque :

$$x_1 = x_2$$

$$v_1 \times t = v_2 \times t_2$$

Or $t_2 = t - 1$

$$v_1 . t = v_2 (t - 1)$$

$$20t = 45(t - 1)$$

$$20t = 45t - 45$$

$$25t = 45$$

$$t = {}^{45}/_{25}$$

$$t = {}^{9}/_{5}\, h$$

Le motocycliste va rejoindre le cycliste à : $3h + \frac{9}{5}h$

$=4,8\ h = 4h\ 0,8 \times 60$

$=4h\ 48\ min$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 249

Un corps se déplace en ligne droite avec une accélération constante. Le graphique de l'accélération (ordonnée verticale) en fonction du temps (abscisse horizontale) est :

a) une droite verticale b) une droite horizontale c) une droite inclinée de 45° d) une parabole e) ABR

(Concours 2015-2016/Physique-Mécanique)

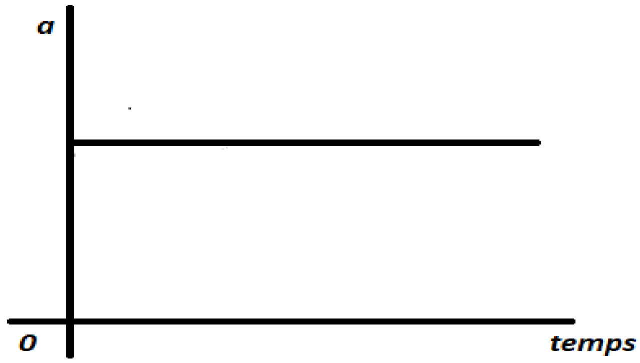
(Concours 2011-2012/Physique Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique Mécanique)

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

Résolution

L'accélération est constante quel que soit le temps :



$\color{red}{R)\ b}$

EXERCICE 250

Lorsqu'on lâche un objet d'une hauteur h_1 il frappe le sol avec une vitesse v. Lorsqu'on le lâche d'une hauteur h_2, il frappe le sol avec une vitesse 2v. Alors, on a :

$a)\ h_2 = h_1/2 \qquad b)\ h_2 = 2h_1 \qquad c)\ h_2 = 4h_1 \quad d)\ h_2 = 8h_1 \quad e)\ ABR$

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

Résolution

On sait que $v^2 - {v_0}^2 = 2g(h - h_0)$

$si\ \ h_0 = v_0 = 0 \Rightarrow\ v^2 = 2gh$

$\Rightarrow h = \frac{v^2}{2g}$

$h_1 = \frac{{v_1}^2}{2g} \qquad\qquad h_2 = \frac{{v_2}^2}{2g}$

Or $v_1 = V \qquad et\ \ v_2 = 2V$

$h_1 = \frac{V^2}{2g} \qquad\qquad h_2 = \frac{(2V)^2}{2g}$

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\frac{V^2}{2g}}{\frac{(2V)^2}{2g}}$

$\Leftrightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{V^2}{2g} \times \frac{2g}{4V^2}$

$\Leftrightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow h_2 = 4h_1$

$R)\ c$

EXERCICE 251

La vitesse d'un véhicule passe de 5 km/h à 18km/h au cours d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération 2 m/s^2. Quelle a été la durée de l'accélération et quelle est la distance parcourue ?

a) t= 5s ; d=50m   b) t=6 s ; d=60m   c) t=4s ; d=40 m
a) t=3 s ; d=30m   e) t=10s ; d=100m

(Concours 2010-2011/Physique-Mécanique)

Résolution

$V_0 = 5\ km/h = \frac{5\times1000\ m}{3600\ s} = \frac{25}{18} m/s$

$V = 18\ km/h = \frac{18\times1000\ m}{3600\ s} = 5m/s$

$a = 2\ m/s^2$

$v = v_0 + at$

$t = \frac{v-v_0}{a}$

$t = \frac{5-\frac{25}{18}}{2}$

$t = 1{,}8\ \ s$

$R)\ f$

EXERCICE 252

La vitesse scalaire d'un corps en mouvement sur une ligne droite avec une accélération positive constante augmente linéairement avec :

a) La distance b) le temps c) le déplacement d) la distance au carré e) ABR

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2018-2019/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

Résolution

$v = v_0 + a.t$

$v_0 = 0 \Rightarrow v = at$

Comme l'accélération est constante, la vitesse augmente avec le temps.

$\boldsymbol{R}) \boldsymbol{b}$

EXERCICE 253

Un objet, lancé verticalement vers le haut, retombe sous l'effet de la pesanteur. Au sommet de sa trajectoire :

a) l'accélération est nulle b) la vitesse est nulle c) l'accélération est positive d) la vitesse est supérieure à zéro e) ABR

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

Résolution

$\boldsymbol{R}) \boldsymbol{b}$

EXERCICE 254

Un corps se déplace le long d'une ligne droite en mouvement uniformément accéléré. À tout moment, la pente de la courbe représentant sa vitesse en fonction du temps est :

a) son déplacement b) la distance parcourue c) la vitesse d) le temps e) aucune de ces réponses

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

Résolution

La pente de la courbe représentant la vitesse en fonction du temps est l'accélération.

$\boldsymbol{R}) \boldsymbol{e}$

EXERCICE 255

Un corps se déplace le long d'une ligne droite avec une vitesse constante. À tout moment, la courbe représentant sa vitesse en fonction du temps est :

a) son déplacement b) la distance parcourue c) la vitesse d) une droite horizontale e) aucune de ces réponses

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

Résolution

$\boldsymbol{R}) \boldsymbol{d}$

EXERCICE 256

L'accélération de la pesanteur est toujours orientée :

a) de bas vers le haut b) de haut vers le bas c) verticalement de haut vers le bas d) de manière quelconque e)ABR

(Concours 2015-2016/Physique-Mécanique)

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

(Concours 2022-2023/Physique-Mécanique)

Résolution

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 257

L'expression $x = vot + {}^{1}/_{2}\,\Upsilon t^{2}$ (x : espace à l'instant t, vo : vitesse à l'instant t=0, ϒ : accélération) est applicable seulement si :

a. La vitesse v est constante b. t est constant c. l'accélération ϒ est constante d. x est constant e. aucune de ces réponses

(Concours 2019-2020/ Physique Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

Résolution

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 258

L'expression $x = vt$ (x : espace à l'instant t, v : vitesse) est applicable quand :

a. La vitesse scalaire est constante b. l'accélération est constante et différente de zéro c. la distance est constante d. l'accélération dépend linéairement du temps e. aucune de ces réponses

(Concours 2019-2020/ Physique Mécanique)

Résolution

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 259

L'expression $\Delta x = vo\Delta t + {}^{1}/_{2}\, a\, (\Delta t)^2$ (où x, Vo, t et a représentent respectivement la distance, la vitesse initiale, le temps et l'accélération) est valable lorsque :

a. x est constant b. v est constant c. a est constant d. toujours e. aucune de ces réponses

(Concours 2019-2020/ Physique Mécanique)

Résolution

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE117

Un corps qui a une accélération nulle :

a) peut être au repos

b) peut être en mouvement rectiligne uniforme

c) n'est soumis à aucune force

d) les assertions a) b) c) sont correctes

e) aucune de ces réponses

EXERCICE AE118

Un objet se déplace en décrivant un cercle de rayon $R = 25\,cm$ avec une vitesse dont la grandeur est indiquée par $v(t) = 3{,}6 + 1{,}2t^2$ où v est exprimé en ms^{-1}, et t en s. A $t = 2s$, l'accélération tangentielle en MKSA vaut………..; l'accélération normale en MKSA vaut……………….

EXERCICE AE119

Une voiture démarre et accélère pour atteindre une vitesse de 30m/s en 10s. Que vaut l'accélération moyenne.

EXERCICE AE120

Calculer la force nécessaire (constante) qui peut permettre d'arrêter en 4 secondes un camion de 2 Tonnes qui se déplace sur une route horizontale avec une vitesse de 60 km/h.

EXERCICE AE121

La position $z(t)$ en mètre d'un objet tombant d'une hauteur varie avec le temps t (en seconde) suivant la relation $z(t) = 100 - (4{,}9)t^2$. Evaluer la vitesse moyenne entre $t = 0\,s$ et $t = 2s$.

EXERCICE AE122

L'accélération instantanée d'un mobile en m/s^2 est donnée par $a_x(t) = 2t$ où le temps t est exprimé en seconde. Sachant qu'à l'instant t=3s, la vitesse $v_x = 5m/s$. Déterminer la position instantanée $x(t)$, si à $t = 0$, le mobile est à l'origine.

EXERCICE AE123

Une fusée parcourt dans l'espace une trajectoire rectiligne telle que son vecteur position est donnée par la loi $y(t) = At^2 - Bt^3 + C$. (A, B et C sont des constantes). L'expression de son accélération instantanée s'écrit $a(t) =$............................

EXERCICE AE124

Le mouvement d'un mobile est donné est donné par l'équation $x = 6 + (2t - 0,5t^2)$, sa vitesse au temps $t = 2\ secondes$ vaut :

$a)\ 14m/s$ $\quad b)\ 12\ m/s$ $\quad c)\ 6m/s$ $\quad d)\ 4\ m/s$ $\quad e)\ 16\ m/s$

EXERCICE AE125

Le mouvement d'un mobile vaut $x = 5\sin 2t$; sa vitesse au temps $t = \pi s$ vaut :

$a)\ 5\ m/s$ $\quad b) - 20\ m/s$ $\quad c)\ 0\ m/s$ $\quad d)\ 10\ m/s$ $\quad e)\ 8,5\ m/s$

EXERCICE AE126

Une pierre est lancée à partir du sol verticalement vers le haut à une vitesse de 25m/s. Si $g = 10\ m/s^2$, la pierre atteint sa hauteur maximale au temps :

$a) - 2,5s$ $\quad b)\ 7,5\ s$ $\quad c)\ 6\ s$ $\quad d)\ 4\ s$ $\quad e)\ 2,5\ s$

EXERCICE AE127

Le mouvement d'un mobile vaut $x = 5\sin 2\pi\left({}^{t}/_{6} + {}^{1}/_{3}\right)$ avec x donné en cm, t en seconde. Que vaut la période du mouvement ?

$a)\ 3\ s$ $\quad b)\ 4s$ $\quad c)\ 6s$ $\quad d)\ 0,16\ s$ $\quad e)\ 0,33\ s$

EXERCICE AE128

Le mouvement d'un mobile vaut $x = 5\,sin\left(2t + \frac{2\pi}{2}\right)$ avec x donné en cm, t en seconde. Que vaut la pulsation du mouvement ?

$a)2\,rad/s$ $b)\ 4\,rad/s$ $c)\ 0{,}25\,rad/s$ $d)\ 8{,}5\,rad/s$ $e)\ aucune\ réponse$

EXERCICE AE129

Pour un mobile en mouvement rectiligne uniformément varié la grandeur suivante est constante

$a)\ La\ vitesse$ $b)\ l'accélération$ $c)\ le\ temps$ $d)\ l'espace$ $e)\ aucune$

EXERCICE AE130

Un piéton parcourt 4,32 km en 1 heure. Quelle est sa vitesse moyenne :

$a)\ 1\,dm/s$ $b)\ 1{,}2\,m/s$ $c)\ 2\,m/s$ $d)\ 10\,m/s$ $e)\ autre\ solution$

EXERCICE AE131

Un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme parcourt 2 m au temps t=3s. L'équation horaire du mouvement de ce mobile vaut ?

$a) -(3/2)-(1/2)t$ $b)\ (3/2)t$ $c)\ (3/2)-(1/2)\,t$ $d)\ 1-t$ $e)néant$

EXERCICE AE132

La vitesse de croisière d'un grand avion est de 1200 km/h. Cette vitesse vaut :

$a)\ 300\,m/s$ $b)\ 333{,}33\,m/s$ $c)\ 600{,}3\,m/s$ $d)\ 343{,}5\,m/s$ $e)\ ABR$

EXERCICE AE133

Un corps solide de masse m=1kg tombe pendant une durée d'une seconde. Que vaut la variation de la vitesse si $g = 9{,}8\,m/s^2$

$a)\ 41{,}2m/s$ $b)\ 19{,}6m/s$ $c)\ 9{,}8m/s$ $d)\ 9{,}8cm/s$ $e)\ pas\ de\ bonne\ réponse$

I.3 LES MOUVEMENTS PENDULAIRES

La période du pendule pesant $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$

m: *la masse*

J: *moment d'inertie*

a: *la distance par rapport au centre de gravité du corps*

Le pendule simple est considéré comme un pendule pesant idéal.

La période du pendule simple est donnée par : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

La période d'oscillation est donnée par : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

EXERCICE 260

Une balançoire (assimilée à un pendule simple) sur laquelle est assise une personne de 60 kg a une période d'oscillation T. Si cette personne prend sur ses genoux un enfant de 30 kg, la période d'oscillation vaudra :

$a)\ T \quad b)\ T/2 \quad c)\ 2T/3 \quad d)\ 3T/3 \quad e) ABR$

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

(Concours 2015-2016/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

Résolution

La période d'oscillation est donnée par : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$m_1 = 60\ kg \qquad m_2 = 60 + 30 = 90\ kg$

$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$

$T_1{}^2 = \frac{4\pi^2 m_1}{k} \qquad T_2{}^2 = \frac{4\pi^2 m_2}{k}$

$T_1{}^2 = \frac{4\pi^2 60}{k} \qquad T_2{}^2 = \frac{4\pi^2 90}{k}$

$$\frac{T_1{}^2}{T_2{}^2} = \frac{\frac{4\pi^2 60}{k}}{\frac{4\pi^2 90}{k}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_1{}^2}{T_2{}^2} = \frac{4\pi^2 60}{k} \times \frac{k}{4\pi^2 90}$$

$\Leftrightarrow \frac{{T_1}^2}{{T_2}^2} = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 2{T_2}^2 = 3\,{T_1}^2$

$\Leftrightarrow T_2 = \sqrt{\frac{3}{2}{T_1}^2}$

Or $T_1 = T \Rightarrow\ T_2 = \sqrt{\frac{3}{2}T^2}$

$T_2 = T\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\boldsymbol{R)\ e}$

EXERCICE 261

La longueur d'un pendule simple dont la demi-période vaut 1s est égale à :

$a)\ {}^{1}/_{4}\,m$ $\quad b)\ {}^{1}/_{2}$m $\quad c)\ 1\,m \quad d)\ 2\,m \quad e)\ 4\,m$

Prendre g=10 m/s^2 $\quad et\ \pi^2 = 10$

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

Résolution

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$\Rightarrow l = \frac{T^2.g}{4\pi^2}$

$\frac{T}{2} = 1s \Rightarrow T = 2s$

$l = \frac{2^2\times 10}{4\times 10}$

$l = 1\,m$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 262

La période d'une masse de 0,75 kg au bout d'un ressort de 1, 5 s. Alors la constante de raideur de ce ressort est égale à

$a)\ 13{,}2\ kg/s^2 \quad b)\ 13{,}2\ m/N \quad c)\ 13,2\ kg/m \quad d)\ 13{,}2\ N/m$

$e)$ Les réponses a) et d) sont correctes

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

Résolution

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

$$k = \frac{4\times(3{,}14)^2\times 0{,}75}{(1{,}5)^2}$$

$$k = 13{,}14613333\ kg/s^2$$

$$k \cong 13,2 kg/s^2 = 13,2\ N/m$$

$\boldsymbol{R) e}$

EXERCICE 263

Une masse attachée à un ressort effectuant un mouvement harmonique d'amplitude Z parcourt en un cycle une distante égale à :

a. Z b. 2Z c. 4Z d. 8Z e. aucune de ces réponses

(Concours 2019-2020 /Physique-Mécanique)

Résolution

$R)\ c$

EXERCICE 264

Une masse attachée à un ressort effectuant un mouvement harmonique d'amplitude A parcourt durant une demi-période une distance égale à :

$a)\ A \quad b)\ 2A \quad c)\ 4A \quad d)\ 8\ A \quad e)\ aucune\ de\ ces\ réponses$

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

Résolution

$R)\ b$

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE134

Une masse attachée à un ressort effectuant un mouvement harmonique d'amplitude A parcourt en une période une distance égale à :

$a)\ \ A$ $\quad b)\ 2A$ $\quad c)\ 4A$ $\quad d)\ 8A$ $\quad e) aucune\ de\ ces\ réponses$

EXERCICE AE135

Soit un pendule simple de masse M et de longueur L. La longueur d'un pendule simple de masse 2M ayant une période double vaut :

Rép. $(a) L/4$ $\quad (b)\ L/2$ $\quad (c)\ 2L$ $\quad (d) 4L$ $\quad (e) aucune\ de\ ces\ réponses$

EXERCICE AE136

Un corps oscille d'un mouvement harmonique sinusoïdal selon l'équation $x(t) = 8{,}0\cos(1{,}2t + 0{,}4)$ où les quantités sont exprimées dans la famille MKSA, la période du mouvement vaut……

EXERCICE AE137

Une vague de la surface de l'océan de longueur d'onde 1,0 m et de fréquence 1,25 Hz se déplace avec une célérité de …………………

EXERCICE AE138

Un pendule simple a une période T. Que devient sa période en fonction de T si on augmente sa longueur de 50% ?

$a)\ 1,22\ T$ $\quad b)\ 2T$ $\quad c)\ T$ $\quad d)\ 2,22\ T$ $\quad e)\ 3T$

EXERCICE AE139

L'extrémité d'une lame oscille sinusoïdalement avec la loi suivante :

$x(t) = A\cos(2\pi\mu t + \rho)$ son accélération est donnée par l'expression :

$(a)\ 2\pi\mu^2 A$ $\quad (b) -2\pi\mu^2 A$ $\quad (c)\ 4\pi\mu^2 A$ $\quad (d) 4\pi\mu^2 A$ $\quad (e) aucune\ bonne\ réponse$

EXERCICE AE140

La longueur d'un pendule simple dont la demi-période vaut 1s est égale (g=accélération de la pesanteur) :

$(a)\frac{g}{2\pi}\ m \quad (b)\frac{g}{\pi^2}\ m \quad (c)\frac{\pi^2}{g}\ m \quad (d)\frac{2\pi}{g}\ m \quad (e)\ aucune\ de\ ces\ réponses$

EXERCICE AE141

Un corps oscille d'un mouvement harmonique sinusoïdal selon l'équation $x(t) = 5\cos(0{,}40t + 0{,}10)$ où les quantités sont exprimées dans la famille MKSA.

Déterminer (a) l'amplitude (b) la fréquence.

EXERCICE AE142

Une vague de la surface de l'océan de longueur d'onde 1 m et de fréquence 1,25 Hz a une vitesse de :

$a)\ 1{,}25\ m/s \quad b)\ 0{,}8\ m/s \quad c)\ 125 m/s \quad d)\ 0\ m/s \quad e)\ aucune\ de\ ces\ réponses$

I.4 DYNAMIQUE

F= $m.a$

Le poids d'un corps : $P = m.g$ (en N)

Le travail $W = F.l$ (en joule)

Le travail de la pesanteur $W = F.h$

La puissance $P = \frac{W}{t}$ (en Watt)

EXERCICE 265

Calculer la puissance de l'eau d'une pompe d'eau qui pèse 2000 kg à une distance verticale de 2 m en 4 secondes (g=10 m/s^2)

a) 2 KW b) 1, 5 KW c) 1 KW d) 0, 5 KW e) 3 KW

(Concours 2010-2011/Physique-Mécanique)

Résolution

m=2000 kg

h=2m

t=4 s

g=10 m/s^2

$P = \frac{W}{t}$

or $W = m.g.h$

$\Rightarrow P = \frac{m.g.h}{t}$

$P = \frac{2000 \times 10 \times 2}{4}$

$P = 10000\ W$

$P = 10^4.10^{-3}\ kw$

$P = 10\ kw$

$\boldsymbol{R)\ f}$

EXERCICE 266

On exerce une force sur une masse de 5 kg pour réduire sa vitesse de 7 m/s à 3 m/s en 2 s. Trouver la force en newtons :

a) 10N b) 20 N c) -10 N d) 15 N e) ABR

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

Résolution

Donnés *Inconnue*

m= 5 kg F= ?

$v_0 = 7\ m/s$

$v = 3\ m/s$

t= 2 s

$F = m.a$

$v = v_0 - at$

$3 = 7 - a.2 \Rightarrow a = 2\ m/s^2$

$F = m.a$

5×2

$F = 10\ N$

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 267

Un corps de masse m est au repos sur le plan horizontal. Selon la troisième loi de Newton, la réaction à son poids (mg) est :

a) La force normale N du plan sur le corps b) la force –mg appliquée au centre de gravité du corps c) la force de frottement qui empêche le corps de glisser d) la force de contact exercée par le corps sur le plan.

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

Résolution

$R)\ d$

EXERCICE 268

Si en l'absence de frottement une force F produit une accélération Θ lorsqu'elle agit sur une masse m, alors si l'on triple la masse et si l'on multiplie la force par 6, l'accélération qui en résulte est de :

$a)\ \Theta$ $b)\ \Theta/2$ $c)\ 2\Theta$ $d)\ \Theta/6$ $e)\ ABR$

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2018-2019/Physique-Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

Résolution

$F = m.a$

$F_1 = m_1.a_1$ $\qquad$ $F_2 = m_2.a_2$

$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1.a_1}{m_2.a_2}$

$m_2 = 3m_1 \qquad F_2 = 6F_1 \quad a_1 = \Theta$

$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1.a_1}{m_2.a_2} \Leftrightarrow \frac{F_1}{6F_1}\frac{m_1.\Theta}{3m_1.a_2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{\Theta}{3a_2}$

$\Leftrightarrow 3a_2 = 6\Theta$

$\Leftrightarrow a_2 = \frac{6\Theta}{3}$

$a_2 = 2\Theta$

R) c

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE143

Un newton est la force :

(a) nécessaire pour déplacer une masse de 1kg à 1 m/s

(b) nécessaire pour accélérer une masse de 1kg à 1m/s^2

$(c\,)$ nécessaire pour accélérer une masse de 1 g à 1cm/s^2

(d) égale au poids sur terre d'une masse de 1kg

(e) Aucune de ces réponses

EXERCICE AE144

Calculer la force nécessaire (constante) qui peut permettre d'arrêter en 4 secondes un camion de 2 Tonnes qui se déplace sur une route horizontale avec une vitesse de 60 km/h

EXERCICE AE145

Quelle est l'accélération fournie à une pierre de 10 kg lorsqu'une force résultante de 100 N lui est appliquée ?

EXERCICE AE146

Quelle force résultante est-elle nécessaire pour fournir à une voiture de 1000 kg une accélération de $3m/s^2$

EXERCICE AE147

Si une force de 20 N donne à une masse m1, une accélération de $3\;m/s^2$ et une masse m2, une accélération de $4\;m/s^2$. L'accélération produite par cette force sur une masse de m1+m2 vaut :

$a)\ 1{,}71\ m/s^2$ $b)\ 1{,}6\ m/s^2$ $c)\ 2\ m/s^2$ $d)\ 7\ m/s^2$ $e)\ 14\ m/s^2$

EXERCICE AE148

Trouver la force qui agit sur une masse de 60 kg pour que sa vitesse change de 10m/s à 20 m/s en 5 secondes

$a)\ 200N$ $b)\ 120\ N$ $c)\ 100\ N$ $d)\ 240\ N$ $e)\ Pas\ de\ bonne\ réponse$

EXERCICE AE149

Trouver la force qui agit sur une masse de 60kg pour que sa vitesse change de 20 m/s à 10m/s sur un parcours de 25m

$a) -90N$ $b) +90N$ $c) -18\ N$ $d) +280N$ $e)\ Pas\ de\ bonne\ réponse$

I.5 DILATATION DES GAZ

La pression est donnée par : $P = \frac{F}{S}$ Unité : Pascal ou N/m^2

F : la force et S : la surface

Il y a trois lois dans l'étude de la dilatation des gaz

Lois de Gay Lussac : La variation de volume sous la pression constante (Transformation isobare)

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{t_1}{t_2}$

Loi de Charles : dilatation à volume constant (Transformation isochore)

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{t_1}{t_2}$

Loi de Boyle Mariotte : Transformation à température constante (Transformation isotherme). $P_1V_1 = P_2V_2$

EXERCICE 269

Une masse d'air occupe 1000 m^3 si sa pression est réduite au $^1/_4$ de sa valeur initiale, la température étant maintenue constante. Quelle est la valeur du volume initial?

$a)$ $50\ cm^3$ $b)$ $1000\ cm^3$ $c)$ $2000\ cm^3$ $d)$ $4000\ cm^3$ $e)$ $1600cm^3$

(Concours 2010-2011/Physique-Mécanique)

Résolution

Comme la température est constante, utilisons la loi de Boyle-Mariotte.

$V_2 = 1000\ cm^3$

$P_2 = \frac{P_1}{4}$

$P_1V_1 = P_2V_2 \Rightarrow V_1 = \frac{P_2V_2}{P_1}$

$V_1 = \frac{\frac{P_1}{4} \times 1000}{P_1}$

$= \frac{250P_1}{P_1}$

$V_1 = 250\ cm^3$ $R)\ f$

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE150

Pour un gaz parfait maintenu à 50°C, si on triple le volume, alors la pression :

$a)\ triple \quad b)\ double \quad c)\ est\ réduit\ au\ tiers \quad d)\ ne\ change\ pas \quad e)\ aucune\ réponse$

EXERCICE AE151

La loi de Boyle Mariotte PV=constant n'est vraie que si le gaz parfait est maintenu à :

$a)\ Volume\ constant \quad b)\ pression\ constante \quad c)\ température\ constante \quad d)\ entropie\ constante$

EXERCICE AE152

Pour un gaz parfait maintenu à 50°C, si on réduit le volume de moitié, alors la pression :

$a)\ triple \quad b)\ double \quad c)\ est\ réduit\ au\ tiers \quad d)\ ne\ change\ pas \quad e)\ aucune\ réponse$

I.6 EQUATIONS AUX DIMENSIONS

La dimension d'une grandeur est la manière dont elle se compose à partir de sept grandeurs fondamentales. Pour trouver l'équation aux dimensions d'une grandeur, on peut utiliser sa formule et son unité.

GRANDEUR	EQUATIONS AUX DIMENSIONS	UNITES (S.I)
Longueur	L	Mètre (m)
Masse	M	Kilogramme (kg)
Temps	T	Seconde (s)
Intensité de courant électrique	I_θ	Ampère (A)
Température thermodynamique	θ	Kelvin (K)
Quantité de matière	μ	Mole (mol)
Intensité lumineuse	I_l	Candela (cd)
Superficie	L^2	Mètre carré (m^2)
Volume	L^3	Mètre cube (m^3)
Vitesse	$L.T^{-1}$	Mètre par seconde (m/s)
Accélération	$L.T^{-2}$	Mètre par seconde carrée (m/s^2)
Nombre d'onde	L^{-1}	1 par mètre (m^{-1})
Masse volumique	$L^{-3}.M$	Kilogramme par mètre cube (Kg/m^3)
Densité de courant	$L^{-2}.I_\theta$	Ampère par mètre carré (A/m^2)
Champ magnétique	$L^{-1}.I_\theta$	Ampère par mètre (A/m)
Concentration (de quantité de matière)	$L^{-3}.\mu$	Mole par mètre cube (mol/m^3)
Volume massique	$M^{-1}.L^3$	Mètre cube par kilogramme (m^3/kg)
Charge (électrique) volumique	$L^{-3}.T.I_\theta$	Coulomb par mètre cube (C/m^3)
Déplacement électrique	$L^{-2}.T.I_\theta$	Coulomb par mètre carré (C/m^2)
Permittivité	$L^{-3}.M^{-1}.T^4.I_\theta^2$	Farad par mètre (F/m)
Perméabilité	$L.M.T^{-2}.I_\theta^{-2}$	Henry par mètre (H/m)
Energie molaire	$L^2.M.T^{-2}.\mu^{-1}$	Joule par mole (J/mol)
Entropie molaire, capacité thermique molaire	$L^2.M.T^{-2}.\theta^{-1}.\mu^{-1}$	Joule par mole Kelvin (J/mol.K)
Exposition (rayons X et γ)	$M^{-1}.T.I_\theta$	Coulomb par kilogramme (C/kg)
Débit de dose absorbée	$L^2.T^{-3}$	Gray par seconde (Gy/s)

Luminance lumineuse	$L^{-2}.I_l$	Candela par mètre carré (cd/m^2)
Fréquence	T^{-1}	Hertz (Hz)
Force	$L.M.T^{-2}$	Newton (N)
Pression, contrainte	$L^{-1}.M.T^{-2}$	Pascal (Pa)
Energie, travail, quantité de chaleur	$L^2.M.T^{-2}$	Joule (J)
Puissance, flux énergétique	$L^2.M.T^{-3}$	Watt (W)
Quantité d'électricité, charge électrique	$I_\theta.T$	Coulomb (C)
Potentiel électrique, tension électrique, force électromotrice	$L^2.M.T^{-3}.I_\theta^{-1}$	Volt (V)
Capacité électrique	$L^{-2}.M^{-1}.T^4.I_\theta^2$	Farad (F)
Résistance électrique	$L^2.M.T^{-3}.I_\theta^{-2}$	Ohm (Ω)
Conductance	$L^{-2}.M^{-1}.T^3.I_\theta^2$	Siemens (S)
Flux d'induction magnétique	$L^2.M.T^{-2}.I_\theta^{-1}$	Weber (Wb)

Induction magnétique	$M.T^{-2}.I_\theta^{-1}$	Tesla (T)
Inductance	$L^2.M.T^{-2}.I_\theta^{-2}$	Henry (H)
Température Celsius	θ	Degré Celsius (°C)
Flux lumineux	I_l	Lumen (lm)
Eclairement lumineux	$L^{-2}. I_l$	Lux (lx)
Activité (rayonnements ionisants)	T^{-1}	Becquerel (Bq)
Dose absorbée, énergie communiquée massique	$L^2.T^{-2}$	Gray (Gy)
Viscosité dynamique	$L^{-1}.M.T^{-1}$	Pascal-seconde (Pa.s)
Moment d'une force	$L^2.M.T^{-2}$	Mètre-newton (N.m)
Tension superficielle	$M.T^{-2}$	Newton par mètre (N/m)
Densité de flux thermique, éclairement énergétique	$M.T^{-3}$	Watt par mètre carré (W/m^2)
Capacité thermique, entropie	$L^2.M.T^{-2}.\theta^{-1}$	Joule par Kelvin (J/K)
Chaleur massique	$L^2.T^{-2}.\theta^{-1}$	Joule par kilogramme Kelvin (J/kg.K)
Energie massique	$L^2.T^{-2}$	Joule par kilogramme (J/kg)
Conductivité thermique	$L.M.T^{-3}.\theta^{-1}$	Watt par mètre Kelvin (W/m.K)
Coefficient de convection	$M.T^{-3}.\theta^{-1}$	Watt par mètre carré Kelvin ($W/m^2.K$)
Energie volumique	$L^{-1}.M.T^{-2}$	Joule par mètre cube (J/m^3)
Champ électrique	$L.M.T^{-3}.I_\theta^{-1}$	Volt par mètre (V/m)

EXERCICE 270

Si [L] représente la dimension de la longueur et [T] celle du temps, alors les équations aux dimensions de l'accélération sont :

$a)\ [L+T^2]$ $b)[L/T]$ $c)\ [L^2/T]$ $d)\ [L/T^2]$ $e)\ ABR$

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2018-2019/Physique-Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

Résolution

On sait que a s'exprime en m/s^2

$[a] = \frac{[L]}{[T]^2}$

$[a] = [L/T^2]$

$\boldsymbol{R})\ \boldsymbol{d}$

EXERCICE 271

Laquelle des unités suivantes est différente des autres ?

a) newton-mètre par seconde b) Kilogramme-$mètre^2$ par $seconde^3$

c) joule par seconde d) watt e) aucune de ces réponses

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2018-2019/Physique-Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

Résolution

Procédons par l'analyse dimensionnelle

a) Newton est l'unité de la Force, mètre de la longueur et seconde du temps, on a :

$[F][L][T]^{-1}$ or F=m. a et l'unité de l'accélération est m$/s^2$

$[F][L][T]^{-1} \Leftrightarrow [M.L.T^{-2}][L][T]^{-1}$

$\Leftrightarrow [ML^2T^{-3}]$

b) Kilogramme-$mètre^2$ par $seconde^3$

Kilogramme est l'unité de la masse, mètre celle de la longueur et seconde du temps, on a :

$[M][L^2]/[T^3] \Leftrightarrow [ML^2T^{-3}]$

c) Joule par seconde

Joule est l'unité du travail, W=F.d or F=m.a ⇒ $W = m.a.d.$

Joule par seconde⇒ $[M][LT^{-2}][L]/[T]$

$\Leftrightarrow [ML^2T^{-3}]$

d) Watt

Watt est l'unité de la puissance et $P = \frac{w}{t} = \frac{m.a.d}{t}$

watt⇔ $[M][LT^{-2}][L]/[T]$

$\Leftrightarrow [ML^2T^{-3}]$

L'analyse dimensionnelle montre que toutes ces unités sont identiques

$\boldsymbol{R) \ e}$

EXERCICE 272

Si nous représentons les dimensions de masse, de longueur et de temps par M, L et T respectivement, alors les dimensions de l'impulsion sont :

$a)[MLT^{-1}]$ $b)$ $[ML^2T^{-2}]$ $c)[MLT^{-2}]$ $d)$ $[LTM^{-1}]$ $e)$ ABR

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2018-2019/Physique-Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

Résolution

La formule de l'impulsion est : $Impulsion = F.t$

$[Impulsion] = [F][T]$

$= [MLT^{-2}][T]$

$[Impulsion] = [MLT^{-1}]$

$\boldsymbol{R) \ a}$

EXERCICE 273

Si L représente une longueur, T un temps et M une masse, les dimensions d'une force sont :

$a)[ML^2]$ $b)$ $[MLT^{-1}]$ $c)[MLT^{-2}]$ $d)$ $[LTM^{-1}]$ $e)$ ABR

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

Résolution

$F = m.a$

$[F] = [M][a]$

Or l'unité de l'accélération est ms^{-2}

$[F] = [M][LT^{-2}]$

$[F] = [MLT^{-2}]$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 274

Les dimensions (L : longueur ; M : masse ; T : temps) de la contrainte sont :

$a)[LM^{-1}]$ $b)$ $[L^3TM^{-1}]$ $c)[M^3TL^{-1}]$ $d)$ $[MT^{-2}L^{-1}]$ $e)$ $[MT^{-3}L^{-1}]$

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

Résolution

La contrainte est donnée par la formule :

contrainte= $\frac{F}{A}$

$[contrainte] = [F]/[A]$

$[contrainte] = [MLT^{-2}]/[L^2]$

$= [MLT^{-2}L^{-2}]$

$[contrainte] = [MT^{-2}\,L^{-1}]$

$\boldsymbol{R)\ d}$

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE153

La période des oscillations T, d'un pendule de torsion composé d'une sphère de masse m et de rayon R, s'écrit :

$$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{2}{5}\,m\,R^2}{C}}$$

La dimension de la constance C   est : ....

EXERCICE AE154

La vitesse limite atteinte par un parachute lesté est fonction son poids P et de sa surface S est : $v = \sqrt{\frac{P}{kS}}$

Donner les dimensions de la constante k.

EXERCICE AE155

On donne l'équation des gaz réels par la loi de Vanderwaals :

$$C = \left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b)$$

P et V sont respectivement la pression et le volume. Déterminer les dimensions de a, b et c.

EXERCICE AE156

La vitesse d'une particule varie avec le temps selon la formule $v = at - bt^3$. Quelles sont les dimensions de $a\ et\ b$.

EXERCICE AE157

Exprimer sous la forme $x = ka^m t^n$ la position x d'une particule en fonction de son accélération a et du temps écoulé t, k étant une constante sans dimension. Trouver m et n par l'analyse dimensionnelle.

EXERCICE AE158

L'équation de mouvement d'un point matériel varie avec le temps selon la formule : $x(t) = at - bt^3$. Quelles sont les dimensions et les unités de $a\ et\ b$ dans le système international. $x(t)$ représente la position du mobile à l'instant t.

EXERCICE AE159

La vitesse v d'un mobile est donnée par l'expression $v(t) = k\,a^p t^q$ où k, a, t représentent respectivement une constante sans dimension, l'accélération et le temps. Trouver les paramètres $p\ et\ q$ en utilisant l'analyse dimensionnelle.

EXERCICE AE160

La vitesse v d'un mobile est donnée par l'expression $v(t) = k\,a^p t^q$ où k, a, t représentent respectivement une constante sans dimension, l'accélération et le temps. Trouver les paramètres $p\ et\ q$ en utilisant l'analyse dimensionnelle.

EXERCICE AE161

$x(t) = \frac{k}{\gamma^n\, t^m}$ est la position d'un mobile à l'instant t, $\gamma\ et\ k$ représentent respectivement l'accélération et une constante adimensionnelle. Trouver m et n

I.7 COMPLEMENTS

EXERCICE 275

L'aptitude que possède un corps à produire du travail à cause de sa vitesse est donnée par son…………………

(Concours 2023-2024/Physique-Mécanique)

Résolution

$R)$ Energie cinétique

EXERCICE 276

Une femme de 50 kg escalade une montagne haute de 3000 m. Quel travail effectue-t-elle en joules pour vaincre la pesanteur ?

(Accélération de la pésanteur $g = 10\, m/\, s^2$

(Concours 2023-2024/Physique-Mécanique)

Résolution

$m = 50\, kg$ $\qquad h = 3000\, m$ $\qquad g = 10\, m/\, s^2$

$W = m.g.h$

$= 50 \times 10 \times 3000$

$= 1\,500\,000\, Joules$

EXERCICE 277

Le travail s'exprime dans le système MKSA en :

$a)\ N/s$ $\qquad b)\ N$ $\qquad c)\ Nm$ $\qquad d)\ Nm/s^2$ $\qquad e)\ ABR$

(Concours 2015-2016/Physique-Mécanique)

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

(Concours 2021-2022/Physique-Mécanique)

(Concours 2022-2023/Physique-Mécanique)

Résolution

Le travail s'exprime en joules.

Or $W = F.d$

L'unité de la force dans le système MKSA est le N et celle du déplacement est le m. Donc dans le système MKSA, le travail s'exprime en Nm

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 278

Une particule de masse m en rotation avec une vitesse angulaire ω sur une orbite circulaire de rayon R, le rapport L/P (L=moment cinétique de la particule et P sa quantité de mouvement) est égal à

$a)\ m \quad b)\ mR^2 \quad c)\ R \quad d)\ \omega \quad e) ABR$

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

Résolution

$$L = mR^2 \qquad et \quad P = mv$$

Or $v = R\omega \Rightarrow P = mR\omega$

$$\frac{L}{P} = \frac{mR^2}{mR\omega}$$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{P} = \frac{R}{\omega}$$

$\boldsymbol{R)\ e}$

EXERCICE 279

Faites correspondre les grandeurs fondamentales du système MKSA à leurs unités

(Concours 2010-2011/Physique-Mécanique)

Résolution

$M: Longueur \ \rightarrow mètre$

$K: Masse \rightarrow Kilogramme$

$S: Temps \rightarrow seconde$

$A: Intensité\ du\ courant: Ampère$

EXERCICE 280

De quelle hauteur au-dessus de la surface de la terre doit on soulever une masse de 1 kg pour qu'elle ait une énergie potentielle gravitationnelle de 1 J par rapport à cette surface ?

$a)\ 9{,}8\ m \quad b)\ 1\ m \quad c)\ 0{,}10\ m \quad d)\ 0{,}01\ m \quad e) 320\ m$

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

Résolution

$E_p = m.g.h$

$\Rightarrow h = \frac{E_p}{m.g}$

$h = \frac{1}{1\times9,8}$

$h = 0,102040816\ m \cong 0,10\ m$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 281

Pour qu'une masse de 1 kg ait une énergie cinétique de 1 J, sa vitesse doit être :

$a)\ 1\ m/s$ $b) 9,8\ m/s$ $c)\ 1,414\ m/s$ $d)\ 10\ m/s$ $e)\ ABR$

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2018-2019/Physique-Mécanique)

(Concours 2020-2021/Physique-Mécanique)

Résolution

$E_c = \frac{1}{2}m.v^2$

$\Rightarrow v^2 = \frac{2\ E_c}{m}$

$v^2 = \frac{2\times1}{1}$

$v^2 = 2 \Rightarrow v = \sqrt{2}$

$v = 1,414\ m/s$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 282

Prenant l'énergie potentielle gravitationnelle nulle à l'infini, pour augmenter l'énergie potentielle gravitationnelle d'un corps de 1N de 1 J, il faut le soulever du sol d'une hauteur de :

a) Infini b) 10 m c) 1 m d) -1 m e) ABR

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

Résolution

$E_p = m.g.h$

$\Rightarrow h = \frac{E_p}{m.g}$

$h = \frac{1}{1}$

$h = 1\,m$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 283

Une fusée voyageant dans l'espace à une certaine vitesse v, met à feux ses moteurs dans le but de doubler sa vitesse et largue, en même temps, une certaine cargaison, réduisant ainsi sa masse à la moitié de sa valeur. Alors son énergie cinétique est :

a) Doublée b) triplée c) quadruplée d) est conservée e) ABR

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

(Concours 2019-2020/Physique-Mécanique)

Résolution

$E_c = \frac{1}{2}m.v^2$

$E_{c1} = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2$ $\qquad E_{c2} = \frac{1}{2}m_2{v_2}^2$

$\frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{\frac{1}{2}m_1{v_1}^2}{\frac{1}{2}m_2{v_2}^2}$

$v_2 = 2v_1 \quad m_2 = \frac{m_1}{2}$

$\frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{\frac{1}{2}m_1{v_1}^2}{\frac{1}{2}m_2{v_2}^2} \Leftrightarrow \frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{m_1{v_1}^2}{\frac{m_1}{2}(2v_1)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{m_1{v_1}^2}{\frac{m_1}{2}4{v_1}^2}$

$\Leftrightarrow \frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{m_1{v_1}^2}{2m_1{v_1}^2}$

$\Leftrightarrow \frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow E_{c2} = 2.E_{c1}$

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 284

De quelle hauteur au-dessus de la surface de la terre doit on soulever une masse de 1 kg pour qu'elle ait une énergie potentielle gravitationnelle de 1 J par rapport à cette surface ? (Accélération de la pesanteur g=$10m/s^2$)

$a)\ 9{,}8\ m \qquad b)\ 1\ m \qquad c)\ 0{,}10\ m \qquad d)\ 0{,}01\ m \qquad e)320\ m$

(Concours 2018-2019/Physique-Mécanique)

Résolution

$E_p = m.g.h$

$\Rightarrow h = \frac{E_p}{m.g}$

$h = \frac{1}{1\times 10}$

$h = 0,1\ m$

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 285

Un câble de 130 cm de long et de 2 mm de diamètre est soumis à une force de traction de 600 N. Sa longueur finale est de 130, 26 cm. Quel est le module de Young du matériau qui constitue ce câble ?

$a)\ 95{,}5\times\ 10^9 N/m^2 \qquad b)\ 10\ N/m^2 \qquad c)\ 24\times 10^9\ N/m^2$

$d)\ 1{,}91\times 10^8\ N/m^2 \quad e)ABR$

(Concours 2011-2012/Physique-Mécanique)

Résolution

Le module de Young est donné par la formule :

$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$

Avec $\sigma\ (La\ contrainte) donnée\ par:\ \sigma = \frac{F}{A}$

$\epsilon (la\ déformation)\ donnée\ par: \epsilon = \frac{L'-L}{L}$

F : la force

A : la surface

L' : longueur finale

L : longueur initiale

Données

F= 600 N

L=130 cm=1, 3 m

L'= 130,26 cm =1,3026 m

d=2 mm=2. $10^{-3}\ m$

$A = \pi r^2 = 3{,}14 \times (10^{-3})^2 = 314.10^{-8} m^2$

$\sigma = \frac{600}{314.10^{-8}} = 1,910828025.10^8\ Nm^{-2}$

$\epsilon = \frac{1{,}3026-1{,}3}{1{,}3} = 0{,}002$

$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{1{,}910828025.10^8}{0{,}002}$

$E = 955{,}4140127.10^8 N/m^2$

$E \cong 95{,}5.10^9 N/m^2$

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 286

Un Newton est la force :

a. Nécessaire pour faire déplacer une masse de 1 kg à 1m/s b. nécessaire pour accélérer une masse de 1 kg à 1 m/s^2 c. nécessaire pour accélérer une masse de 1g à 1 cm/s^2 d. égale au poids sur terre d'une masse de 1kg e. aucune de ces réponses

(Concours 2019-2020/ Physique Mécanique)

Résolution

$R)\ b$

EXERCICE 287

Si une force non nulle horizontale et constante agit sur un corps posé au repos sur une table sans frottement, le corps :

a. parfois accélère b. se meut toujours à vitesse constante c. acquiert toujours la même accélération d. accélère si la force dépasse son poids e. aucune de ces réponses.

(Concours 2019-2020/ Physique Mécanique)

Résolution

$\boldsymbol{R) \ c}$

EXERCICE 288

Soit un pendule simple de masse M et de longueur L. La longueur d'un pendule simple de masse 2M ayant une période double vaut :

$a)\ L/4 \quad b)\ L/2 \quad c)\ 2L \quad d)\ 4L \quad e) aucune\ de\ ces\ réponses$

(Concours 2019-2020/ Physique Mécanique)

Résolution

La période d'oscillation d'un pendule simple ne dépend pas de la masse accrochée au fil.

On sait que $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow T^2 = \left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)^2$

$$\Leftrightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g}$$

$$\Leftrightarrow T^2 = \frac{4\,\pi^2\,l}{g}$$

$l_1 = L \qquad T_2 = 2\,T_1 \qquad l_2 = ?$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{\frac{4\,\pi^2\,l_1}{g}}{\frac{4\,\pi^2\,l_2}{g}}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{4\,\pi^2\,l_1}{g} \times \frac{g}{4\,\pi^2\,l_2}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{l_1}{l_2}$$

$$\frac{T_1^2}{(2T_1)^2} = \frac{L}{l_2}$$

$$\frac{T_1^2}{4\,T_1^2} = \frac{L}{l_2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{L}{l_2}$$

$$l_2 = 4L$$

$\boldsymbol{R) \ d}$

II. ELECTRICITE

II. 1 ELECTROSTATIQUE

II.1.1 Force coulombienne

$F = 9.10^9 \frac{q.q'}{r^2}$

$|e| = 1{,}6 \times 10^{-19} C$

Densité électrique : $\delta = \frac{q}{s}$ (s : la surface)

F : la force en N, q : la charge en C

II.1.2 Champ électrique

$E = 9.10^9 \frac{q}{r^2}$ (En N/C)

$F = q.E$

Les lignes de champs créées par une charge négative s'orientent vers elle, tandis que celles créées par une charge positive s'éloignent d'elle.

II.1.3 Le potentiel électrique

$V = 9.10^9 \frac{q}{r}$ (en Volts)

Travail d'une force électrique : $W = q.E.d = q(V_A - V_B)$

$E = \frac{V}{r}$

II.1.4 Les condensateurs

Capacité d'un condensateur sphérique :

$C = \frac{1}{9.10^9}.\frac{R.r}{R-r}$

$R: rayon\ de\ la\ sphère\ extérieure$

$r: rayon\ de\ la\ sphère\ intérieure$

Capacité du condensateur plan

$C = \frac{1}{9.10^9}.\frac{S}{4\pi\ d}$ S : la surface

Energie d'un condensateur $E = \frac{1}{2}C.V^2$

Association des condensateurs :

En parallèle :

$V_1 = V_2 = V_e$ et $Q_e = Q_1 + Q_2$

$C_e = C_1 + C_2$

En série :

$Q_1 = Q_2 = Q_e$ et $V_e = V_1 + V_2$

$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

EXERCICE 289

La neutralité électrique de l'atome à l'état libre est due :

1. Au nombre d'électrons 2. Au nombre de protons 3. Au volume de l'atome 4. A l'égalité du nombre d'électrons et de protons 5. A la charge de neutrons

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

Résolution

$R)$ 4

EXERCICE 290

Le dispositif qui emmagasine l'énergie électrique sous forme d'un champ est appelé :

1. Générateur 2. Condensateur 3. Ampèremètre 4. Voltmètre 5. Résistance morte

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique- Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

Résolution

$R)$ 2

EXERCICE 291

Lorsque les condensateurs sont branchés en parallèle

1. Tous les condensateurs se trouvent à la même différence de potentiel 2. Le courant électrique est nul 3. La capacité équivalente est nul 4. L'énergie stockée diminué 5. Les charges s'égalisent.

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

Résolution

$R)\ 1$

EXERCICE 292

Le champ électrique créé par une charge au point situé à une distance de $4\ m\ est\ de\ 2.10^{-3}\ N/C$. Le potentiel électrique est :

1) $5.10^{-3}\ V$ 2) $8.10^{-3} V$ 3) $2.10^{-3} V$ 4) $9.10^{-3} V$ 5) $12.10^{-3} V$

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

Résolution

$E = 2.10^{-3}\ N/C$

$r = 4\ m$

$V = ?$

$E = \frac{V}{r} \Rightarrow V = E.r$

$= 2.10^{-3} \times 4$

$= 8.10^{-3}\ Volts$

$\boldsymbol{R)\ 2}$

EXERCICE 293

Elle représente l'énergie qu'il faut pour déplacer une charge électrique d'un point en un autre et peut s'exprimer en Nm/C. Cette grandeur s'appelle :

1. Capacité électrique 2. Champ électrique 3. Potentiel électrique 4. Force de Coulomb 5. Flux d'induction magnétique

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

Résolution

$R)\ 3$

EXERCICE 294

Une des affirmations suivantes est fausse :

a) Il y a deux types d'électricité : l'électricité positive et l'électricité négative

b) L'unité de la charge électrique est le Newton

c) Deux charges électriques de même type se repoussent tandis que deux charges de type contraires s'attirent.

d) L'état électrique d'un corps se détecte à l'aide d'un pendule électrique.

(Concours /Physique-Electricité)

Résolution

$\boldsymbol{R)\ b}$

EXERCICE 295

L'équation $V = 9.10^9 \frac{Q}{r}$ exprime :

Où k=constate ; Q= la charge électrique et r=distance

a) La force Coulomb

b) Le champ électrique

c) Le potentiel électrique

d) Aucune bonne réponse

(Concours /Physique-Electricité)

Résolution

$\boldsymbol{R)\ c}$

EXERCICE 296

Deux sphères de charge électrique identique sont à 10 dm l'une de l'autres. Elles se repoussent avec une force de 9N. Quelle est leur charge électrique respective ?

(Concours 2009/Physique-Electricité)

Résolution

$F = 9N \qquad r = 10\ dm = 1m$

$F = 9.10^9 \frac{Q.Q'}{r^2} \Rightarrow Q.Q' = \frac{F.r^2}{9.10^9}$

Or les deux charges sont identiques$\Rightarrow Q = Q'$

$$Q.Q' = \frac{F.r^2}{9.10^9} \Leftrightarrow Q^2 = \frac{F.r^2}{9.10^9}$$

$$= \frac{9.1^2}{9.10^9}$$

$$Q^2 = 10^{-9} \Rightarrow Q = Q' = \sqrt{10^{-9}}C$$

EXERCICE 297

Deux charges ponctuelles de $+5\mu C\ et + 8\mu C$ sont placées dans l'air, à une distance de 40 cm l'une de l'autre. Quel est, au centième près et en newton, l'intensité de la force de répulsion que ces charges exercent l'une sur l'autre ? On donne : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$ unité du système internationale

$a)\ 2{,}25 * 10^{-6}N \quad b)\ 0{,}9 * 10^{-6}N \quad c)\ 0{,}25 * 10^{-6}N \quad d)\ 1\ N \quad e) 7{,}31 * 10^{-6}N$

(Concours 2017-2018/Physique-Electricité)

Résolution

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q_1q_2}{r^2}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = K = 9.10^9$$

$$q_1 = 5\mu C = 5.10^{-6}\ C$$

$$q_2 = 8\mu C = 8.10^{-6}\ C$$

$$F = 9.10^9\frac{5.10^{-6} \times 8.10^{-6}}{(4.10^{-1})^2}$$

$$= \frac{360.10^{9-6-6}}{16.10^{-2}}$$

$$= 22{,}5.10^{-1}\ N$$

$$F = 2{,}25\ N$$

$\boldsymbol{R)\ f}$

EXERCICE 298

Deux charges ponctuelles de $+5\mu C\ et + 8\mu C$ sont placées dans l'air, à une distance de 20 cm l'une de l'autre. Quel est, au centième près et en newton, l'intensité de la force de répulsion que ces charges exercent l'une sur l'autre ? On donne : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$ unité du système internationale

$a)\ 2{,}25 * 10^{-6}N\ b)\ 3{,}60 * 10^{-6}N \quad c)\ 0{,}25 * 10^{-6}N \quad d)\ 10^{-6}\ N \quad e)\ 9{,}00 * 10^{-6}N$

(Concours 2017-2018/Physique-Electricité)

Résolution

$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = K = 9.10^9$

$q_1 = 5\mu C = 5.10^{-6}\ C$

$q_2 = 8\mu C = 8.10^{-6}\ C$

r= $20cm = 2.10^{-1}m$

$F = 9.10^9 \frac{5.10^{-6} \times 8.10^{-6}}{(2.10^{-1})^2}$

$= \frac{360.10^{9-6-6}}{4.10^{-2}}$

$= 90.10^{-1}\ N$

$F = 9\ N$

EXERCICE 299

Deux charges ponctuelles $q_1 = +10\mu C$ $\ et\ q_2 = +20\mu C$ sont placées aux points A(-20 cm) et B(40 cm) de l'axe OX.

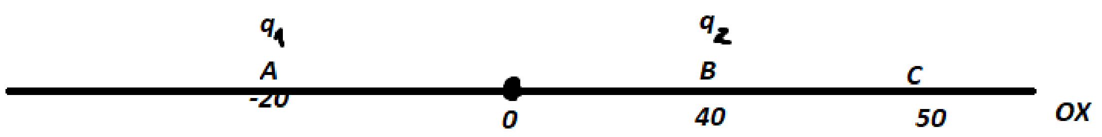
Le champ électrique résultant créé par la distribution de deux charges au point C(50 cm) de l'axe OX, exprimé en N/C et au centième près vaut :

a) $17,62 * 10^6$ $\quad b)\ 18{,}00.10^6$ $\quad c)\ 0{,}18.10^6$ $\quad d)\ 18{,}18.10^6$ $\quad e)1{,}08.10^6$

(Concours 2018-2019/Physique-Electricité)

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

Résolution



$E = k.\frac{q}{r^2}$

$q_1 = 10\ \mu C = 10^{-5}C$

$q_2 = 20\ \mu C = 2.10^{-5}\ C$

$r_1 = 70\ cm = 7.10^{-1}\ m$

$r_2 = 10\ cm = 10^{-1}\ m$

$E_1 = 9.10^9.\frac{10^{-5}}{(7.10^{-1})^2}$

$= \frac{9.10^{9-5}}{49.10^{-2}}$

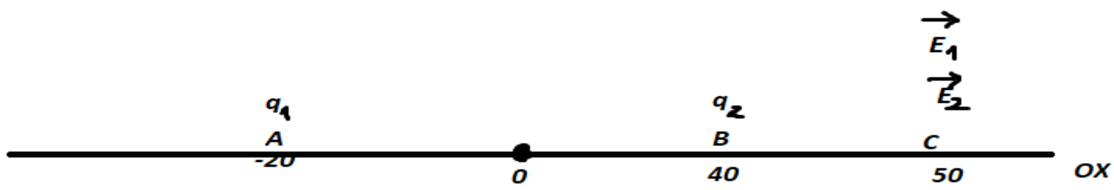
$E_1 = \frac{9}{49}.10^6\ N/C$

$E_2 = 9.10^9.\frac{2.10^{-5}}{(10^{-1})^2}$

$= 18.10^{9-5+2}$

$E_2 = 18.10^6\ N/C$

$E = E_1 + E_2$



Selon OX

$E = E_1 + E_2$

$= \frac{9}{49}.10^6 + 18.10^6$

$= \left(\frac{9}{49} + 18\right).10^6 N/C$

$E = 18{,}18367347.10^6\ N/C$

Au centième près : $E = 18{,}18.10^6\ N/C$

R) d

EXERCICE 300

Deux charges ponctuelles $q_1 = +10\mu C$ $et\ q_2 = +20\mu C$ sont placées aux points A(-20 cm) et B(40 cm) de l'axe OX.

Le potentiel électrique créé par la distribution de deux charges au point C(50 cm) exprimé en Volt et au dixième près vaut :

$a)\ 1{,}3 * 10^5$ $b)\ 19{,}3 * 10^5$ $c)\ 18{,}0 * 10^5$ $d)\ 16{,}7 * 10^5$ $e)\ 5{,}4 * 10^5$

(Concours 2018-2019/Physique-Electricité)

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

Résolution

$V = k.\frac{q}{r}$

$q_1 = 10\ \mu C = 10^{-5} C$

$q_2 = 20\ \mu C = 2.10^{-5}\ C$

$r_1 = 70\ cm = 7.10^{-1}\ m$

$r_2 = 10\ cm = 10^{-1}\ m$

$V_1 = 9.10^9 . \frac{10^{-5}}{7.10^{-1}}$

$= \frac{9.10^{9-5}}{7.10^{-1}}$

$V_1 = \frac{9}{7}.10^5\ volts$

$V_2 = 9.10^9 . \frac{2.10^{-5}}{10^{-1}}$

$= 18.10^{9-5+1}$

$V_2 = 18.10^5\ volts$

$V = V_1 + V_2$

$= \frac{9}{7}.10^5 + 18.10^5$

$= \left(\frac{9}{7} + 18\right).10^5 volts$

$V = 19{,}28571429\ volts$

Au dixième près $V = 19{,}3.10^5\ volts$

R) b

EXERCICE 301

Deux charges ponctuelles $q_1 = +10\mu C$ $et\ q_2 = +20\mu C$ sont placées aux points A(-20 cm) et B(40 cm) de l'axe OX.

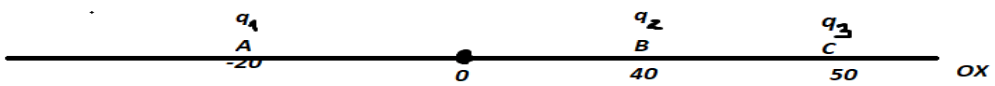
L'intensité de la force électrostatique que la distribution exerce sur une charge de +5 μC placée au point C(50 cm), exprimée en Newton, au centième près, vaut :

$a)$ 89,10 $b)$ 90,00 $c)$ 90,90 $d)$ 0,90 $e)$ 5,40

(Concours 2018-2019/Physique-Electricité)

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

Résolution



$q_1 = 10\ \mu C = 10^{-5} C$

$r_1 = 70\ cm = 7.10^{-1}\ m$

$F_{31} = k.\frac{q_1 . q_3}{r^2}$

$= 9.10^9 . \frac{10^{-5}.5.10^{-6}}{(7.10^{-1})^2}$

$q_2 = 20\ \mu C = 2.10^{-5}\ C$

$r_2 = 10\ cm = 10^{-1}\ m$

$F_{32} = k.\frac{q_2 . q_3}{r^2}$

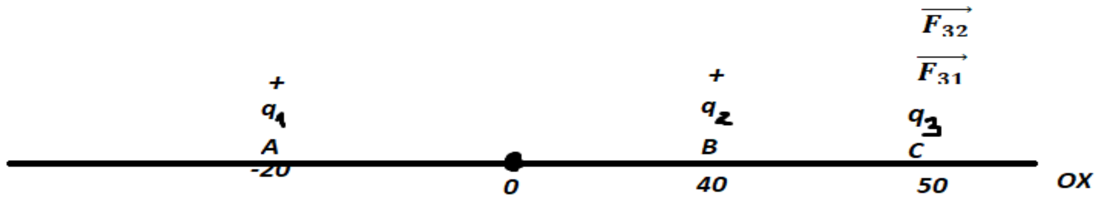
$= 9.10^9 . \frac{2.10^{-5}.5.10^{-6}}{(10^{-1})^2}$

$= \frac{45}{49} . 10^{9-5-6+2}$

$F_{31} = \frac{45}{49} \ N$

$= 90 . 10^{9-5-6+2}$

$F_{32} = 90 \ N$



Selon Ox

$F = F_{31} + F_{32}$

$= \frac{45}{49} + 90$

$F = 90{,}91836735 \ N$

Au centième près :

$F = 90{,}92 \ N$

$\boldsymbol{R) \ f}$

EXERCICE 302

Deux charges ponctuelles $q_1 = +10\mu C \quad et \ q_2 = +20\mu C$ sont placées aux points A(-20 cm) et B(40 cm) de l'axe OX.

Le travail accompli par les forces extérieures pour déplacer une charge de $+5 \ \mu C$ du point C(50cm) au point D(30cm) de l'axe OX, exprimé en Joules, au dixième près vaut :

$a) - 2{,}6 * 10^{-1} \quad b) - 9{,}2 \quad c) - 0{,}9 \quad d) - 1{,}6 \quad e) - 7{,}2$

(Concours 2018-2019/Physique-Electricité)

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

Résolution

$W = q.E.d$

$q = 5.10^{-6} \ C$

d=20cm=$2.10^{-1} \ m$

$E = k.\frac{q}{d^2}$

$E = 9.10^9.\frac{5.10^{-6}}{(2.10^{-1})^2}$

$= 11,25.10^{9-6+2}$

E=11,25.10^5 N/C

$W = 5.10^{-6}.11,25.10^5.2.10^{-1}$

$W = 112,5.10^{-6+5-1}$

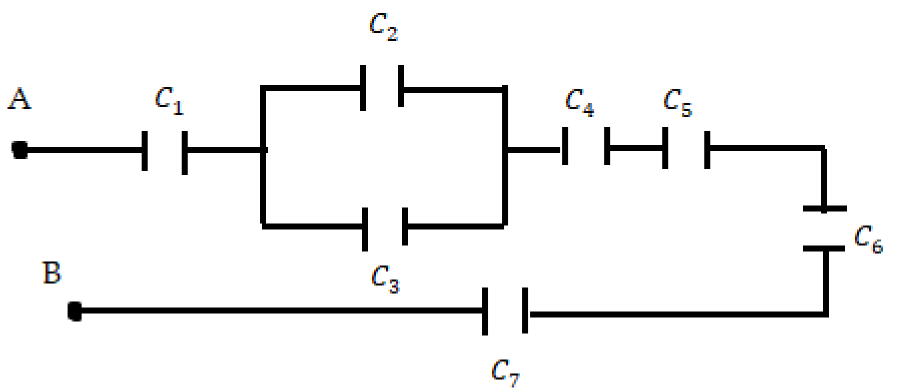
$W = 112,5.10^{-2}$ $joules$

EXERCICE 303

On donne le montage de la figure suivante, pour lequel :

$C_1 = 3\mu F, C_2 = 2\mu F, C_3 = 5\mu F, C_4 = 5\mu F, C_5 = 5\mu F, C_6 = 3\mu F, C_7 = 3\mu F$

Et $V_A - V_B = 24V$.



1. La capacité équivalente du montage vue des bornes A et B, exprimée en μF, au centième près vaut :

$a)$ 0,05 $b)$ 1,43 $c)$ 0,48 $d)$ 21,00 $e)$ 0,65

2. La charge totale condensée sur le condensateur équivalent vaut :

$a)$ 1,2μC $b)$ 49,68 μC $c)$ 15,56 μC $d)$ 120 μC $e)$ 34,32 μC

3. La charge condensée sur les armatures du condensateur C_2vaut, au centième près :

$a)$ 11 μC $b)$ 15,56 μC $c)$ 4,44 μC $d)$ 20,00 μC $e)$ 34,32 μC

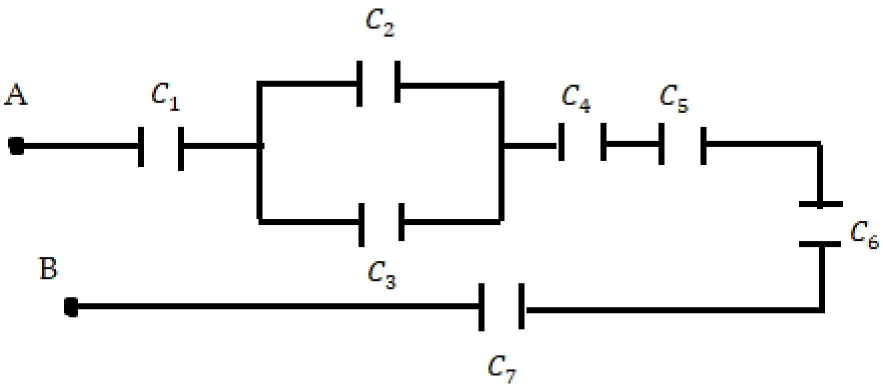
4. La tension aux bornes du condensateur C_3 vaut, au centième près :

$a)$24,00 V $b)$ 2,20V $c)$ 0,24 V $d)$ 9,9 V $e)$ 8,06 V

(Concours 2017-2018/Physique-Mécanique)

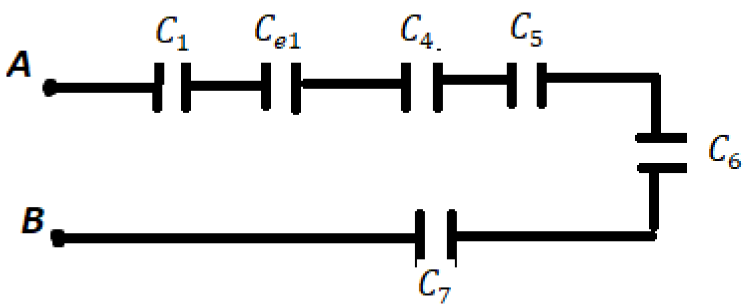
Résolution

1.



C_2 *et* C_3 sont en parallèle :

$C_{e1} = C_2 + C_3 = 2 + 5 = 7\mu F$. Le circuit devient :



Tous les condensateurs sont en série :

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{e1}} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_7}$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{35+15+21+21+35+35}{105}$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{162}{105} \Rightarrow C_e = \frac{105}{162}$$

$$C_e = 0{,}648148148\ \mu F$$

Au centième près :

$$C_e = 0{,}65\ \mu F$$

R) e

2) $Q_e = C_e \times V_{AB}$

$= \frac{105}{162} \times 24$

$Q_e = 15{,}55555556\ \mu C$

$Q_e = 15{,}56\ \mu C$

$\boldsymbol{R)\ c}$

3) $C_1, C_{e1}\ , C_4\ , C_5\ , C_6\ et\ C_7$ sont en série, c'est-à-dire :

$Q_1 = Q_{e1} = Q4 = Q_5 = Q_6 = Q_7 = Q_e = 15{,}55555556\ \mu C$

$C_2\ et\ C_3$ étant en parallèle, on a : $V_2 = V_3\ et\ Q_{e1} = Q_2 + Q_3$

$\Rightarrow Q_3 = Q_{e1} - Q_2$

Or $V = \frac{Q}{C}$

$V_2 = V_3 \Leftrightarrow \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3}$

$\Leftrightarrow \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_{e1} - Q_2}{C_3}$

$\Leftrightarrow \frac{Q_2}{2} = \frac{15{,}55555556 - Q_2}{5}$

$\Leftrightarrow 5Q_2 = 31,11111111 - 2Q_2$

$\Leftrightarrow 7Q_2 = 31{,}1111111 \Rightarrow\ Q_2 = 4{,}444444444444444\ \mu\ C$

Au centième près :

$Q_2 = 4{,}44\ \mu\ C$

$\boldsymbol{R)\ c}$

4) $V_2 = V_3 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{4{,}4444444444}{2}$= 2,222222222222 V

Au centième près :

$V_3 = 2{,}22\ V$

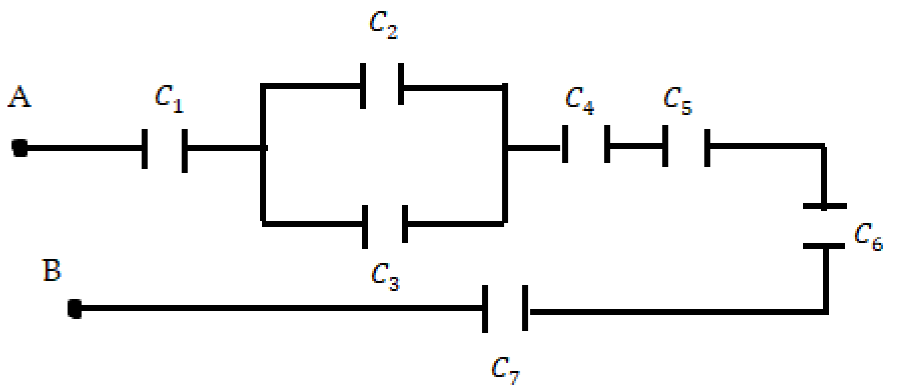
$\boldsymbol{R)\ f}$

EXERCICE 304

On donne le montage de la figure suivante, pour lequel :

$C_1 = 4\mu F, C_2 = 6\mu F, C_3 = 3\mu F, C_4 = 2\mu F, C_5 = 2\mu F, C_6 = 8\mu F, C_7 = 8\mu F$

Et $V_A - V_B = 48V$.



1) La capacité équivalente du montage vue des bornes A et B, exprimée en μF, au dixième près vaut :

$a)$ 2,0 $b)$ 1,5 $c)$ 0,5 $d)$ 0,6 $e)$ 0,3

2) La charge totale condensée sur le condensateur équivalent vaut, au dixième près :

$a)$ 24,0 μC $b)$ 28,5 μC $c)$ 72,0 μC $d)$ 14,4 μC $e)$ 15,8 μC

3) La charge condensée sur les armatures du condensateur C_2vaut :

$a)$36 μC $b)$ 17,11 μC $c)$ 24 μC $d)$ 11,40 μC $e)$ 48 μC

4) La tension aux bornes du condensateur C_3 vaut, au centième près :

$a)$6 V $b)$ 24 V $c)$ 12 V $d)$ 36 V $e)$ 3 V

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

Résolution

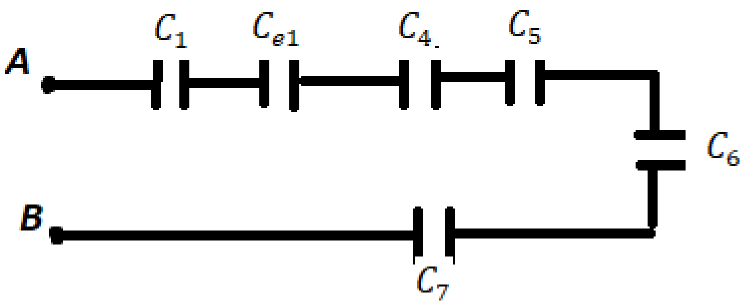
1. C_2 et C_3 sont en parallèle, on a :

$C_{e1} = C_2 + C_3$

$= 6\ \mu F + 3\ \mu F$

$C_{e1} = 9\ \mu F$

Le circuit devient :



Tous les condensateurs sont en série, on a :

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{e1}} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_7}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{18+8+36+36+9+9}{72}$$

$$= \frac{116}{72}$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{29}{18} \Rightarrow C_e = \frac{18}{29} \quad \mu F$$

$C_e = 0{,}6\ \mu F$

$R)\ d$

$2) Q_e = C_e \times V_{AB}$

$$= \frac{18}{29} \times 48$$

$$Q_e = \frac{864}{29} \quad \mu C$$

$Q_e = 29{,}8\ \mu C$

$R)\ f$

EXERCICE 305

Deux charges ponctuelles $q_1 = +20\mu C \;\; et\ q_2 = +10\mu C$ sont placées aux points A(-20 cm) et B(40 cm) de l'axe OX.

1) Le champ électrique résultant créé par la distribution de deux charges au point C(25 cm) de l'axe OX, exprimé en N/C et au centième près vaut :

a) $8{,}89 * 10^5$ $\quad b)\ 40{,}00.10^5$ $\quad c)\ 31{,}11.10^5$ $\quad d)\ 48{,}89.10^5$ $\quad e) 80{,}00.10^5$

2) Le potentiel électrique créé par la distribution de deux charges au point C exprimé en Volt et au dixième près vaut :

$a)\ 0{,}4 * 10^6$ $b)\ 0{,}6 * 10^6$ $c)\ 0{,}2 * 10^6$ $d)\ -0{,}6 * 10^6$ $e)\ 1{,}0 * 10^6$

3) L'intensité de la force électrostatique que la distribution exerce sur une charge de +5 μC placée au point C(25 cm), exprimée en Newton, au centième près, vaut :

$a)\ 15{,}55$ $b)\ 20{,}00$ $c)\ 4{,}45$ $d)\ 40{,}00$ $e)\ 5{,}00$

4) Le travail accompli par les forces extérieures pour déplacer une charge de +5 μC du point C(25cm) au point D(35cm) de l'axe OX, exprimé en Joules, au dixième près vaut :

$a)5{,}6$ $b)-1{,}3$ $c)4{,}4$ $d)5{,}0$ $e)8{,}8$

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

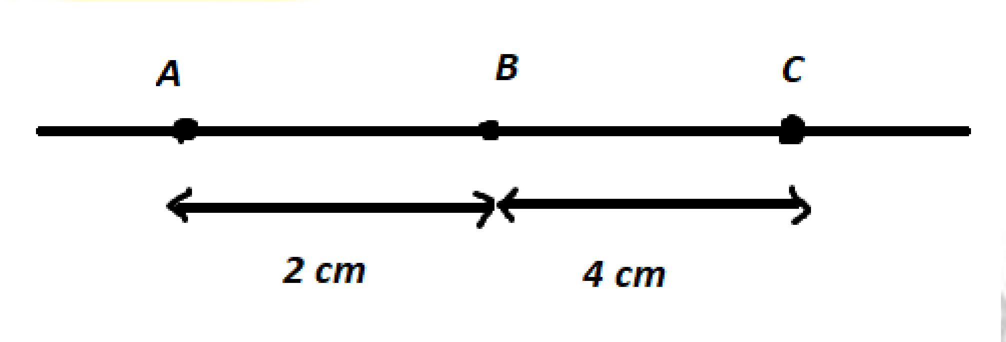
EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE162

Trois charges ponctuelles $q_1, q_2\ et\ q_3$ sont placées respectivement aux points A ; B, C. Les valeurs de ces trois charges sont $q_1 = 5\mu C, q_2 = -2\mu C$ et $q_3 = 3\mu C$. Déterminer :

a) La force résultante que les charges $q_1\ et\ q_3$ exercent sur q_2.

b) La force résultante que les charges $q_2\ et\ q_3$ exercent sur q_1.



EXERCICE AE163

Calculer la force de répulsion entre deux charges de 5 $\mu C\ et\ de\ 1\mu C$ placées à 5 cm dans l'air l'une de l'autre

EXERCICE AE164

Deux charges ponctuelles égales $q_1\ et\ q_2$ séparées à une distance d exercent l'une sur l'autre une force de $2.10^{-2}\ N$. Que devient cette force si la distance entre les deux charges est réduite de moitié et la valeur de chacune des charges est doublée.

EXERCICE AE165

Deux sphères de 30 cm et de 90 cm de rayon ont été porté au potentiel de 30000 V. La répulsion qu'elles exercent entre elles est de 3N.

A quelle distance se trouve ces deux sphères ?

EXERCICE AE166

Deux charges ponctuelles $q_1 = +20\mu C$ $et\ q_2 = +10\mu C$ sont placées aux points A(-20 cm) et B(40 cm) de l'axe OX.

1) Le champ électrique résultant créé par la distribution de deux charges au point C(25 cm) de l'axe OX, exprimé en N/C et au centième près vaut :

a) $8,89 * 10^5$ $b)\ 40,00.10^5$ $c)\ 31,11.10^5$ $d)\ 48,89.10^5$ $e) 80,00.10^5$

2) Le potentiel électrique créé par la distribution de deux charges au point C exprimé en Volt et au dixième près vaut :

$a)\ 0,4 * 10^6$ $b)\ 0,6 * 10^6$ $c)\ 0,2 * 10^6$ $d)\ -0,6 * 10^6$ $e)\ 1,0 * 10^6$

3) L'intensité de la force électrostatique que la distribution exerce sur une charge de +5 μC placée au point C(25 cm), exprimée en Newton, au centième près, vaut :

$a)\ 4,45$ $b)\ 20,00$ $c)\ 15,55$ $d)\ 40,00$ $e)\ 5,00$

4) Le travail accompli par les forces extérieures pour déplacer une charge de +5 μC du point C(25cm) au point D(35cm) de l'axe OX, exprimé en Joules, au dixième près vaut :

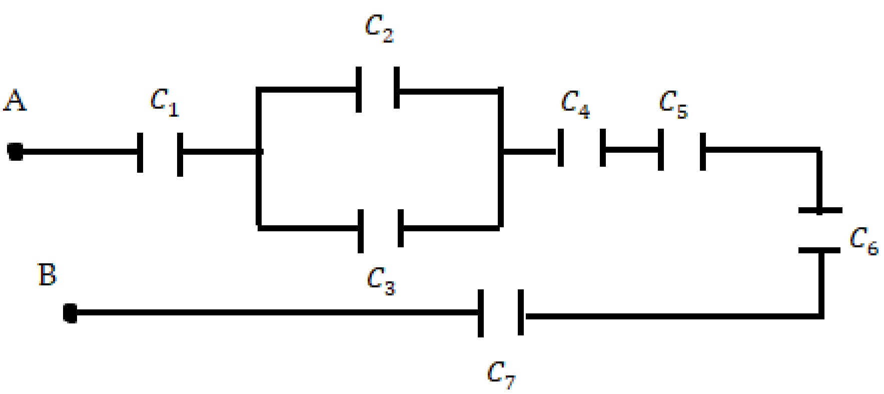
$a) -4,43$ $b) -1,3$ $c) 4,4$ $d) 8,8$ $e) 5,6$

EXERCICE AE167

On donne le montage de la figure suivante, pour lequel :

$C_1 = 4\mu F, C_2 = 6\mu F, C_3 = 3\mu F, C_4 = 2\mu F, C_5 = 2\mu F, C_6 = 8\mu F, C_7 = 8\mu F$

Et $V_A - V_B = 48V$.



1. La capacité équivalente du montage vue des bornes A et B, exprimée en μF, au dixième près vaut :

$a)\ 2,0$ $b)\ 1,5$ $c)\ 0,5$ $d)\ 0,6$ $e)\ 0,3$

2. La charge totale condensée sur le condensateur équivalent vaut, au dixième près :

$a)$ 24,0 μC $b)$ 28,5 μC $c)$ 72,0 μC $d)$ 14,4 μC $e)$ 15,8 μC

3. La charge condensée sur les armatures du condensateur C_2vaut :

$a)$36 μC $b)$ 17,11 μC $c)$ 24 μC $d)$ 11,40 μC $e)$ 48 μC

4. La tension aux bornes du condensateur C_3 vaut, au centième près :

$a)$6 V $b)$ 24 V $c)$ 12 V $d)$ 36 V $e)$ 3 V

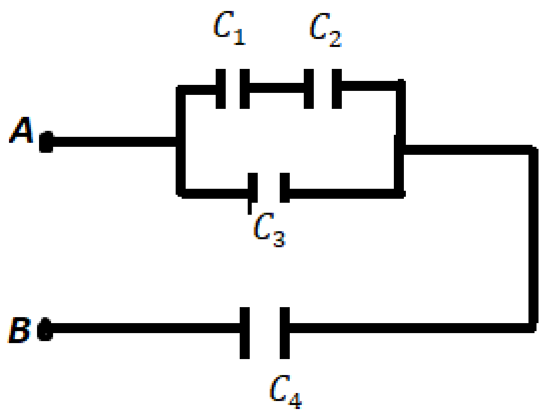
EXERCICE AE168

Dans le circuit ci-dessous, chaque condensateur a une capacité de $2\mu F$ et la différence de potentiel entre le point A et le point B est de 50V. Calculer :

$a)$ La capacité équivalente

$b)$ La charge de chaque condensateur

$c)$ La différence de potentiel aux bornes de chaque condensateur.



EXERCICE AE169

Le noyau d'un atome d'hélium possède une charge de 2 électrons tandis que celui d'un atome de néon a une charge de 10 électrons. Trouvez la force de répulsion entre les deux lorsqu'ils sont distants de 3nm.

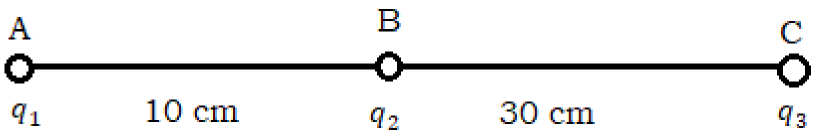
EXERCICEE AE170

Deux charges $q_1 = -2.10^{-2}C$ et $q_2 = -4.10^{-8}\ C$ sont disposées en 2 points A et B distant de 10 cm. En quel point M de AB doit placer une charge $q_3 = 3.10^{-8}\ C$ pour qu'elle soit en équilibre.

EXERCICE AE171

Trois charges q_1, q_2 et q_3 sont placées aux points A, B et C.

$q_1 = 1,67.10^{-8}\ C$, $q_2 = -1,67.10^{-8}\ C$ et $q_3 = 6,67.10^{-9}\ C$



On demande de calculer

$a)$ La force résultante que les charges q_1 et q_3 exercent sur q_2

$b)$ Le champ électrique résultant créé par les charges q_1 et q_3 au point B

$c)$ Le potentiel électrique créé par les mêmes charges au point B

EXERCICE AE172

Quelle est la capacité de l'ensemble des quatre condensateurs suivants : $C_1 = 1\ \mu F$, $C_2 = 0{,}4\ \mu F$, $C_3 = 0{,}4\ \mu F$ et $C_4 = 0{,}2\ \mu F$.

$a)$ Quand on les branche en série

$b)$ Quand on les branche en parallèles

EXERCICE AE173

Les armatures d'un condensateur plan sont de 2mm et ont pour dimensions 3cm x 4cm. Elles sont reliées à une pile de 60V. Déterminez :

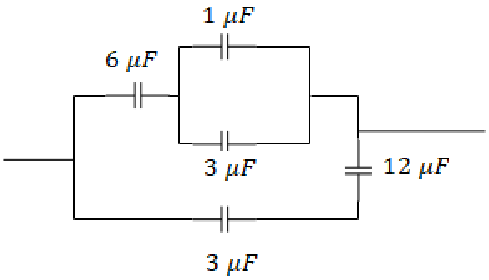
$a)$ La capacité

$b)$ La quantité de charge de chaque armature

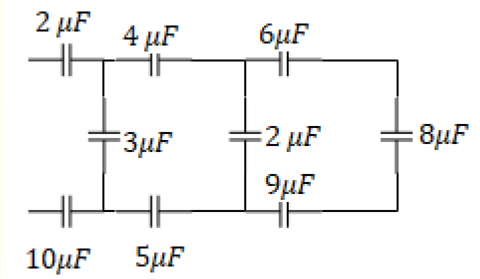
EXERCICE AE174

Calculez la capacité équivalente de groupements suivants :

$a)$



$b)$



EXERCICE AE175

Trois condensateurs de 120PF chacun sont chargés sous 500V puis connectés en série.

$a)$ La capacité du système

$b)$ La ddp entre la première et la dernière armature

$c)$ La charge sur chaque condensateur

$d)$ L'énergie emmagasinée dans le système

II.2 ELECTRODYNAMIQUE

L'intensité du courant : $I = \frac{V}{R}$

$W = V.I.t$

$P = \frac{w}{t} = V.I = R.I^2$

$W = R.I^2.t$

1 kWh=$36.10^5\ j$

La quantité de chaleur dégagée dans un conducteur :

$Q = 0{,}24.10^{-3}R.I^2.t$ (En Kcal)

Loi de Pouillet : $R = \rho\frac{l}{s}$

R : résistance en Ω

l : la longueur en m

ρ: *resistivité en* Ωm

S : section en m^2

Association des résistances :

En série :

$R = R_1 + R_2$

En parallèle : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

EXERCICE 306

Quatre résistances suivantes : $R_1 = 10\ \Omega, R_2 = 20\ \Omega, R_3 = 2\Omega\ et\ R_4 = 40\ \Omega$ sont branchées en parallèle. Ces quatre résistances sont connectées en série avec deux résistances en série $R_5 = 1\Omega\ et\ R_6 = 4\ \Omega$. La résistance équivalente de l'ensemble est :

1) 6,48 Ω 2)6,47Ω 3) 6,49Ω 4) 6,45 Ω 5) 6,44 Ω

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

Résolution

$$\frac{1}{R_{e1}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$\frac{1}{R_{e1}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{2} + \frac{1}{40}$$

$$\frac{1}{R_{e1}} = \frac{4+2+20+1}{40}$$

$$\frac{1}{R_{e1}} = \frac{27}{40}$$

$$R_{e1} = \frac{40}{27}\ \Omega$$

$$R_{e2} = R_5 + R_6$$

$$= 1 + 4$$

$$R_{e2} = 5\ \Omega$$

$$R_e = R_{e1} + R_{e2}$$

$$= \frac{40}{27} + 5$$

$$= \frac{40+135}{27}$$

$$= \frac{175}{27}$$

$$R_e = 6{,}481481\ldots\ \Omega$$

R) 1

EXERCICE 307

Un courant se bifurque entre trois points d'un circuit électrique. Les résistances des trois dérivations sont respectivement de $5\,\Omega, 3\Omega\ et\ 15\Omega$. L'ensemble est branché en série avec une résistance de $13\ \Omega$. La différence de potentiel aux bornes du groupement est de 220 V. L'intensité du courant principal est égale à :

1) $15A$ 2) $16A$ 3) $14A$ 4) $13\ A$ 5) $17A$

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

Résolution

Les trois premières résistances sont en parallèle

$$\frac{1}{R_{e1}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{R_{e1}} = \frac{3+5+1}{15}$$

$$\frac{1}{R_{e1}} = \frac{9}{15}$$

$\frac{1}{R_{e1}} = \frac{3}{5}$

$R_{e1} = \frac{5}{3}\ \Omega$

L'ensemble est branché en série avec une résistance de 13 Ω

$R_e = \frac{5}{3} + 13$

$= \frac{5+39}{3}$

$R_e = \frac{44}{3}\ \Omega$

$V = 220\ V$

$I = \frac{V}{R}$

$= \frac{220}{\frac{44}{3}}$

$= 220 \times \frac{3}{44}$

$= \frac{660}{44}$

$I = 15\ A$

$\boldsymbol{R)\ 1}$

EXERCICE 308

Le dégagement de la chaleur qui accompagne le passage du courant électrique dans un conducteur est appelé :

1. Effet joule 2. Champ électrique 3. Potentiel électrique 4. Force de Coulomb 5. Attraction électrostatique

(Concours 2022-2023/Physique – Electricité)

Résolution

$R)\ 1$

EXERCICE 309

La tension U aux bornes d'un générateur électrique est la différence de potentiel lorsque le circuit est :

1. Fermé 2. Ouvert 3. Composé des résistances en parallèle 4. Composé des résistances en série 5. Composé des condensateurs.

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

EXERCICE 310

La pile d'un téléphone est :

1. Un générateur électrique 2. Un condensateur 3. Un ampèremètre 4. Une résistance 5. Un voltimètre

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

Résolution

$R)\ 1$

EXERCICE 311

Calculez la résistance d'un fil de fer de $60\ m$ de longueur. Le diamètre du fil est de $2\ mm$ et la résistivité du fer est égale à $389.10^{-6}\ \Omega m$.

$1)2.10^{6}\Omega$ $2)2.10^{4}\Omega$ $3)2.10^{2}\Omega$ $4)2.10^{5}\Omega$ $5)2.10^{3}\Omega$

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

Résolution

$l = 60\ m = 6.10\ m$

$\rho = 389.10^{-6}\ \Omega m$

$d = 2\ mm = 2.10^{-3}\ m \quad \Rightarrow r = \frac{d}{2} = \frac{2.10^{-3}m}{2} = 10^{-3}\ m$

$S = \pi r^2 = 3{,}14\ (10^{-3})^2 = 3{,}14\ .\ 10^{-6}\ m^2$

$R = \rho \frac{l}{s}$

$= 389.10^{-6}\ \frac{60}{3{,}14\ .10^{-6}}$

$= \frac{23340}{3{,}14}$

$= 7\ 433{,}121019$

$R = 7{,}433.10^{3}\ \Omega$

$\boldsymbol{R)\ 6}$

EXERCICE 312

Lorsque les résistances sont branchées en série :

1. Toutes les résistances sont traversées par le même courant 2. Chaque résistance est traversée par son propre courant 3. La résistance équivalente est nulle 4. La résistance équivalente est égale à la somme des résistances 5. Chaque résistance a sa différence de potentiel.

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

Résolution

Les assertions 1, 4 et 5 sont correctes.

$R)$ 6

EXERCICE 313

Il transforme l'énergie électrique sous une autre forme d'énergie, il s'agit de :

1. Récepteur électrique 2. Générateur électrique 3. Ampèremètre 4. Voltmètre 5. Résistance électrique.

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

Résolution

$R)$ 1

EXERCICE 314

Le courant électrique est :

a) Un mouvement des électrons d'un point où ils sont en excès vers un point où ils sont en petit nombre.

b) La quantité des charges (nombre d'électron) qui traversent un conducteur en un temps donné.

c) La différence de concentration entre deux points permettant ainsi le passage des charges permanent.

(Concours/Physique-Electricité)

Résolution

Les assertions a et b sont correctes et l'assertion c est incertaine.

EXERCICE 315

Qu'entendez-vous par « effet joule »

a) Le passage du courant dans un liquide
b) L'échauffement consécutif au passage du courant
c) La décomposition d'une solution suite au passage du courant
d) Aucune bonne réponse

(Concours/Physique-Electricité)

Résolution

$R)\ b$

EXERCICE 316

Un courant de 20A traverse une solution de sulfate de cuivre pendant deux heures. Quelle est la masse de cuivre déposée à la cathode sachant que la masse atomique du cuivre vaut 63,5 gr ?

(Concours 2009/Physique-Electricité)

Résolution

$m = \frac{1}{96500} \cdot \frac{A}{n} . I . t$

$A: masse\ atomique \qquad n: la\ valence$

$I = 20\ A \qquad t = 2h = 7200s$

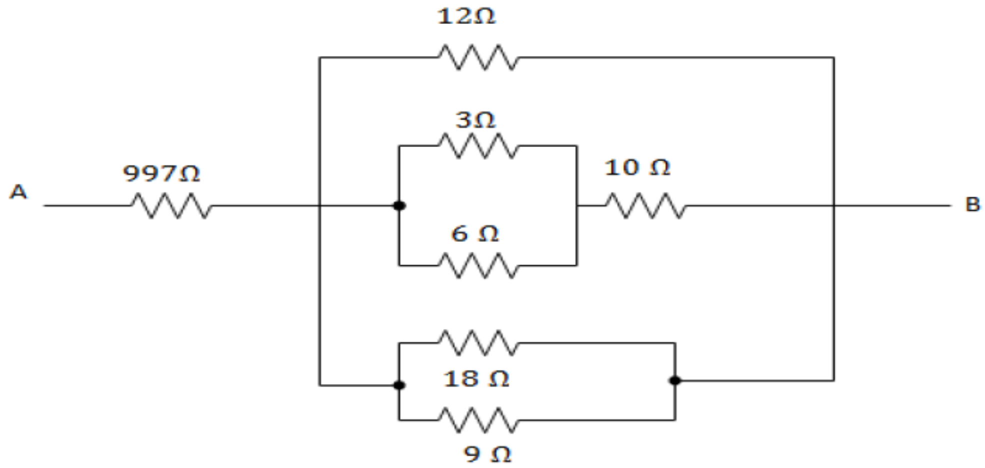
$A = 63,5\ g \qquad n = 2$

$m = \frac{1}{96500} \times \frac{63,5}{2} \times 20 \times 7200$

$m = 47{,}37823834\ gr.$

EXERCICE 317

Un récepteur électrique représenté par le circuit suivant absorbe une intensité de courant I ampères sous la tension de 220 volts. Quelle est la valeur de cette intensité de courant et quelle en est la puissance ? Quel est le cout horaire de son fonctionnement sachant que le kWh se paie 1000 FC.



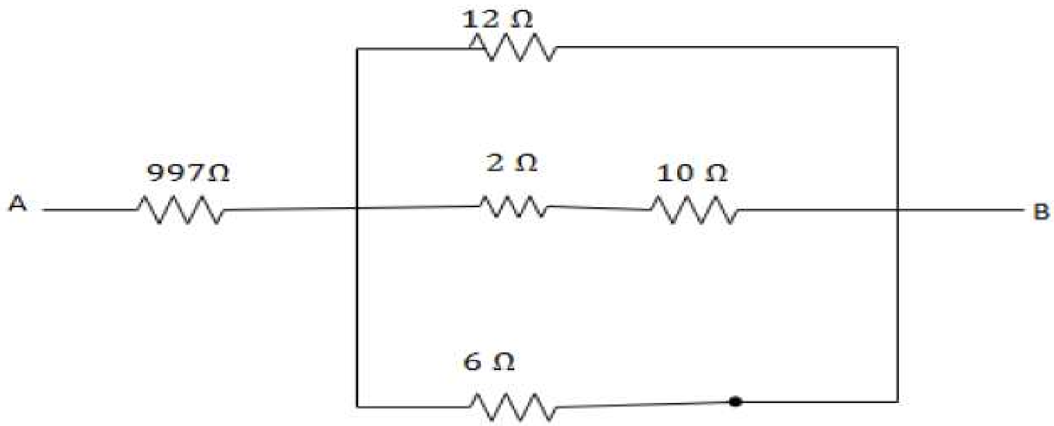
Résolution

Trouvons d'abord la résistance équivalente.

Les résistances de $3\,\Omega\, et\, 6\,\Omega$ sont en parallèle. De même que celles de $18\Omega\, et\, 9\,\Omega$

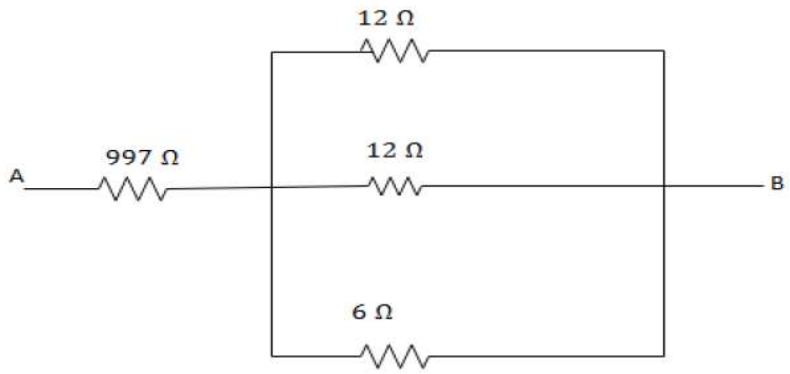
$R_{e1} = \frac{3\times6}{3+6} = 2\Omega.$ $R_{e2} = \frac{18\times9}{18+9} = 6\Omega$

Le circuit devient :



Les résistances de $2\Omega\; et\; 10\Omega$ sont en série.

$R_{e3} = 2 + 10 = 12\Omega$. Le circuit devient :



Les résistances de $12\Omega, 12\Omega$ *et de* 6Ω sont en parallèle.

$\frac{1}{R_{e4}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \Rightarrow R_{e4} = 3\Omega$. Le circuit devient :

Les deux sont en série : $R = 997 + 3 = 1000\Omega$

Le circuit devient :

$I = \frac{V}{R} \Rightarrow I = \frac{220\ volts}{1000\ \Omega}$

$I = 0{,}22\ A$

$P = R.I^2 = 1000 \times (0{,}22)^2$

$P = 48{,}4\ watts$

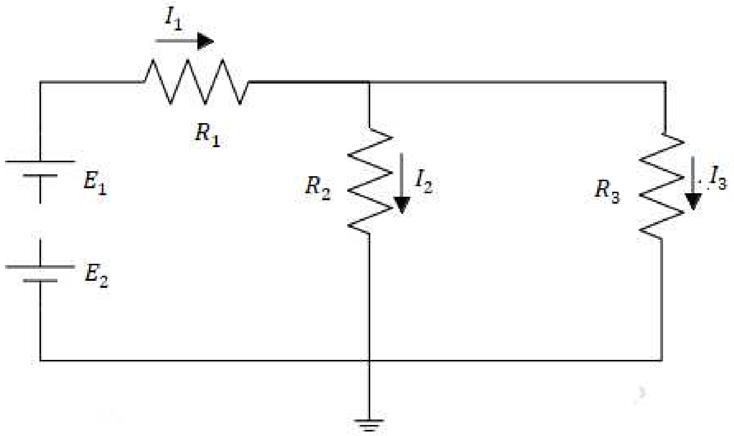
$P = 48{,}4\ watts = 48{,}4.10^{-3}\ \ Kw$

$W = P.t = 48{,}4.10^{-3} Kw \times 1h$

$W = 48{,}4.10^{-3} Kwh$

EXERCICE 318

Considérons trois résistances R_1, R_2, R_3, et deux sources continues de tension de force électromotrice E_1, E_2.



$E_1 = 16\,V;\quad E_2 = 3\,V\,;\ R_1 = R_2 = R_3 = 4\,K\Omega$

1. L'intensité du courant I_1, à un centième près et en mA (c'est-à-dire arrondi à deux chiffres après la virgule) vaut :

$a)$ 4,75 mA $b)$ 4,00 mA $c)$ 1,58 mA $d)$ 3,25 mA $e)$ 3,17 mA

2. L'intensité du courant I_2, à un centième près et en mA (c'est-à-dire arrondi à deux chiffres après la virgule) vaut :

$a)$ 0,75 mA $b)$ 1,58 mA $c)$ 4,75 mA $d)$ 4,00 mA $e)$ 3,25 mA

(Concours 2017-2018/Physique-Electricité)

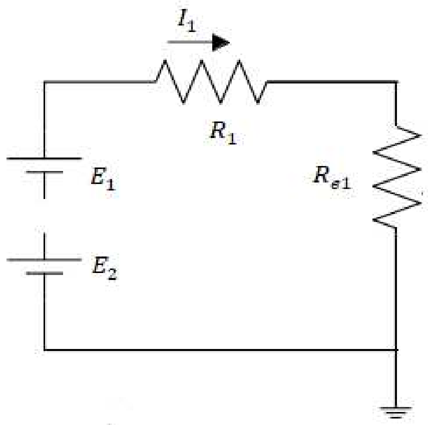
Résolution

1. Trouvons d'abord la résistance équivalente :

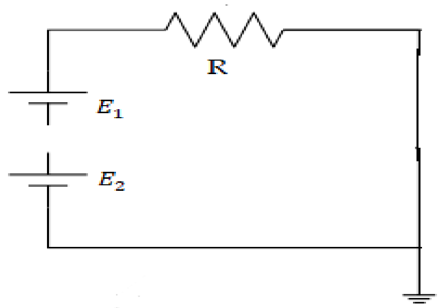
R_2 *et* R_3 *sont en parallèle*:

$R_{e1} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \Leftrightarrow R_{e1} = \frac{4\times 4}{4+4} \Rightarrow R_{e1} = 2K\Omega.$

Le circuit devient :



R_1 *et* R_{e1} *sont en série*: $R = R_1 + R_{e1}$
$R = 4 + 2 = 6\ K\Omega$
Le circuit devient :



$I_1 = \frac{16V+3V}{6\ K\Omega} \Leftrightarrow I_1 = 3{,}1666666667\ mA$
Au centième près $I_1 = 3{,}17\ mA$
R) e

2 . Utilisons la loi de diviseurs de courant :

$I_2 = \frac{R_3}{R_2+R_3} \times I_1$
$I_2 = \frac{4}{4+4} \times 3{,}1666666667\ mA$
$I_2 = 1{,}583333333\ mA$
Au centième près : $I_2 = 1{,}58\ mA$
R) b

EXERCICE 319

Trois résistances $R_1 = 4\ \Omega, R_2 = 6\ \Omega\ et\ R_3 = 12\ \Omega$ sont montés en parallèle. La résistance de 4 Ω est parcouru par un courant de 3A.

1 . La résistance équivalente du montage vaut :

$a)\ 0{,}5\ \Omega$ $\quad b)\ 13{,}09\ \Omega$ $\quad c)\ 2\Omega$ $\quad d)\ 0{,}80\Omega$ $\quad e)\ 22\Omega$

2 . La tension aux bornes du montage vaut :

$a)$ 66V $b)$1,50V c) 6V d) 12V e) 39,27V

(Concours 2017-2018/Physique-Electricité)

Résolution

1) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{3+2+1}{12}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{6}{12}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2\Omega$

$\boldsymbol{R) \ c}$

2) $V_1 = I_1 \times R_1$

$V_1 = 3 \times 4 = 12\ V$

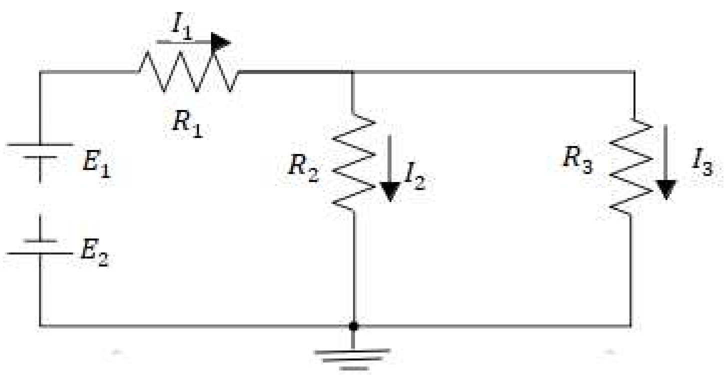
Comme elles sont en parallèle :

$V_1 = V_2 = V_3 = 12\ V$

$\boldsymbol{R) \ d}$

EXERCICE 320

Considérons trois résistances R_1, R_2, R_3, et deux sources continues de tension de force électromotrice E_1, E_2.



$E_1 = 16\ V;\quad E_2 = 3\ V\ ;\ R_1 = R_2 = R_3 = 4\ K\Omega$

1) L'intensité du courant I_1, à un centième près et en mA (c'est-à-dire arrondi à deux chiffres après la virgule) vaut :

$a)$ 3,17 mA $b)$ 4,00 mA $c)$ 2,17 mA $d)$ 3,25 mA $e)$ 4,75 mA

2) L'intensité du courant I_2, à un centième près et en mA (c'est-à-dire arrondi à deux chiffres après la virgule) vaut :

$a)$ 1,08 mA $b)$ 1,58 mA $c)$ 4,00 mA $d)$ 4,00 mA $e)$ 3,25 mA

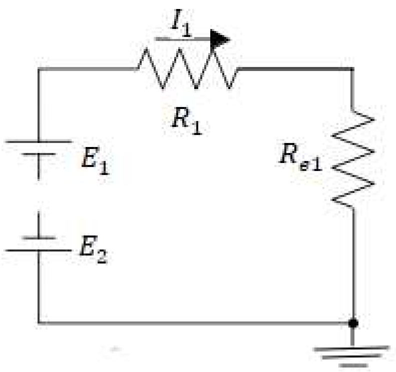
Résolution

1) Trouvons d'abord la résistance équivalente :

R_2 et R_3 $sont$ en $parallèle$:

$R_{e1} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \Leftrightarrow R_{e1} = \frac{4 \times 4}{4+4} \Rightarrow R_{e1} = 2K\Omega.$

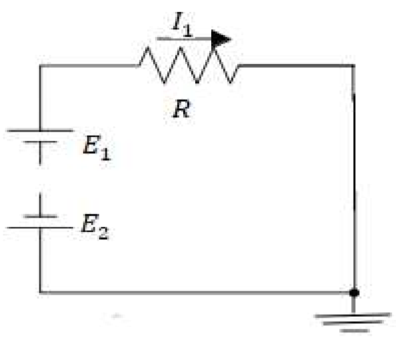
Le circuit devient :



R_1 et R_{e1} $sont$ en $série$: $R = R_1 + R_{e1}$

$R = 4 + 2 = 6\ K\Omega$

Le circuit devient :



$I_1 = \frac{16V - 3V}{6\ K\Omega} \Leftrightarrow I_1 = 2{,}166666667\ mA$

Au centième près $I_1 = 2{,}17\ mA$

$\boldsymbol{R)\ c}$

2) Utilisons la loi de diviseurs de courant :

$I_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \times I_1$

$I_2 = \frac{4}{4+4} \times 2{,}1666666667\ mA$

$I_2 = 1{,}083333333\ mA$

Au centième près : $I_2 = 1{,}08\ mA$

$\boldsymbol{R)\ a}$

EXERCICE 321

Trois résistances $R_1 = 8\,\Omega, R_2 = 12\,\Omega\ et\ R_3 = 24\,\Omega$ sont montés en parallèle. La résistance de $8\,\Omega$ est parcouru par un courant de 3A.

1. La résistance équivalente du montage vaut :

   $a)$ $0{,}54\,\Omega$ $b)$ $4\,\Omega$ $c)$ 2Ω $d)$ $52{,}36\Omega$ $e)$ $0{,}20\Omega$

2. La tension aux bornes du montage vaut :

   $a)$ $12V$ $b)$66V c) 72V d) 24V e) 36 V

(Concours 2017-2018/Physique-Electricité)

Résolution

$$1. \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{3+2+1}{12}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{6}{24}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = 4\Omega$$

$\boldsymbol{R)\ b}$

2) $V_1 = I_1 \times R_1$

$V_1 = 3 \times 8 = 24\ V$
Comme elles ont en parallèle :
$V_1 = V_2 = V_3 = 24\ V$

$\boldsymbol{R)\ d}$

EXERCICE 322

On met à votre disposition une source de tension de force électromotrice 17V et deux résistances, $R_1 = 2{,}75\ K\Omega\ et\ R_2 = 1{,}5\ K\Omega$, monter ces trois éléments de circuit dans une combinaison de circuit série et calculer :

$a)$ Le courant fourni par cette source de tension

$b)$ Les courants I_{R1}, I_{R2} qui traversent respectivement les résistances $R_1\ et\ R_2$.

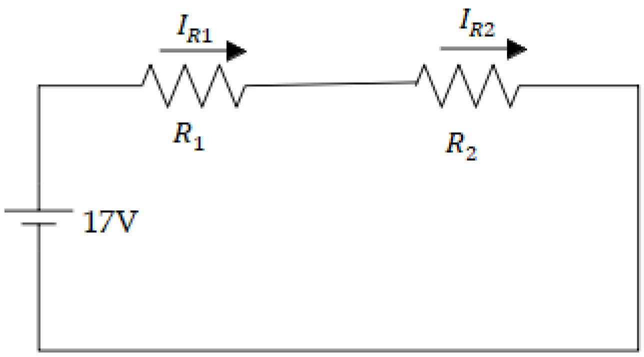
$c)$ Les différences de potentiel respectives V_{R1}, V_{R2} aux bornes des résistances $R_1\ et\ R_2$.

$d)$ La puissance P_S fourni par cette source de tension

$e)$ Les puissances respectives P_{R1}, P_{R2} dissipées dans les résistances R_1 et R_2.

(Concours/Physique-Electricité)

Résolution



$a)$ Trouvons d'abord la résistance équivalente :

Les deux résistances sont en série

$R_e = R_1 + R_2 = 2{,}75 + 1{,}5 = 4{,}25\ K\Omega$

$R_e = 4{,}25\ K\Omega = 4250\ \Omega$

$I = \frac{V}{R} \Leftrightarrow I = \frac{17V}{4250\ \Omega}$

$I = 0{,}004\ A = 4.10^{-3}\ A$

$b)$ $R_1 et\ R_2$ étant en série, on a :

$I_{R1} = I_{R2} = I = 4.10^{-3}\ A$

$c)$ $V = R.I$

$V_{R1} = R_{1.}.I_{R1} = 2750\ \Omega \times 4.10^{-3}\ A = 11\ V$

$V_{R2=R_{2.}.I_{R2}=1500\ \Omega \times 4.10^{-3}\ A=6\ V}$

$d)$ $P_S = R_e \times I^2 = 4250\ \Omega \times (4.10^{-3}A)^2 = 68.10^{-3}\ Watt$

$e)$ $P = R.I^2$

$P_{R1} = R_{1.}.(I_{R1})^2 = 2750 \times (4.10^{-3})^2 = 44.10^{-3}\ Watt$

$P_{R2} = R_{2.}.(I_{R2})^2 = 1500 \times (4.10^{-3})^2 = 24.10^{-3}\ Watt$

EXERCICE 323

Une résistance R est parcourue par un courant I. $R = 5\Omega\ et\ I = 10\ A$.

1. La tension aux bornes de cette résistance vaut :

$a. 2V \quad b. 50\ V \quad c. 0,5\ V \quad d. 15\ V \quad e. 500\ V$

2 . La puissance dégagée par effet joule, vaut :

$a. 2\ W \quad b. 250\ W \quad c. 50W \quad d. 500\ W \quad e. 15W$

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

Résolution

$R = 5\ \Omega$

$I = 10\ A$

$$1)\ V = R.I$$
$$= 5\ \Omega\ \times 10\ A$$
$$V = 50\ V\text{olts}$$

$\boldsymbol{R)\ b}$

$2)\ P = R.I^2$

$= 5 \times 10^2$

$= 5 \times 100$

$P = 500\ W$

$\boldsymbol{R)\ d}$

EXERCICE 324

Une résistance R est parcourue par un courant I. $R = 2\Omega\ et\ I = 15\ A$.

1. La tension aux bornes de cette résistance vaut :

$a. 30V \quad b. 7,5\ V \quad c. 0,13\ V \quad d. 450\ V \quad e. 60\ V$

2. La puissance dégagée par effet joule, vaut :

$a. 60\ W \quad b. 30\ W \quad c. 450W \quad d. 7,5\ W \quad e. 30W$

(Concours 2019-2020/Physique-Electricité)

Résolution

$R = 2\ \Omega$

$I = 15\ A$

1) $V = R.I.$

$= 2 \times 15$

$V = 30\ Volts$

R) a

2) $P = V.I$

$= 30 \times 15$

$P = 450\ W$

R) c

EXERCICES D'AUTO EVALUATION

EXERCICE AE176

Deux conducteurs de résistances égales à 0,2 ohm et 6 ohms mis en dérivation, lient les bornes d'un générateur électrique. Le premier conducteur est traversé par un courant de 5A.

a) Quelle est l'intensité du courant dans le second conducteur ?

b) Quelle est la valeur de la tension aux bornes du générateur ?

EXERCICE AE177

Un courant se bifurque entre deux points d'un circuit électrique. Les résistances des deux dérivations sont respectivement de 60 ohms et 90 ohms. Le ddp entre les extrémités de la bifurcation est de 45 volts. Calculez :

a) L'intensité du courant de chaque dérivation

b) L'intensité du courant total

c) La résistance équivalente de l'ensemble

EXERCICE AE178

Une pile de f.e.m. égale à 1,51V et de résistance interne égale à 1,3 ohm, débite un courant sur une résistance de 3 ohms. Calculez :

a) L'intensité du courant

b) La tension aux bornes de la pile

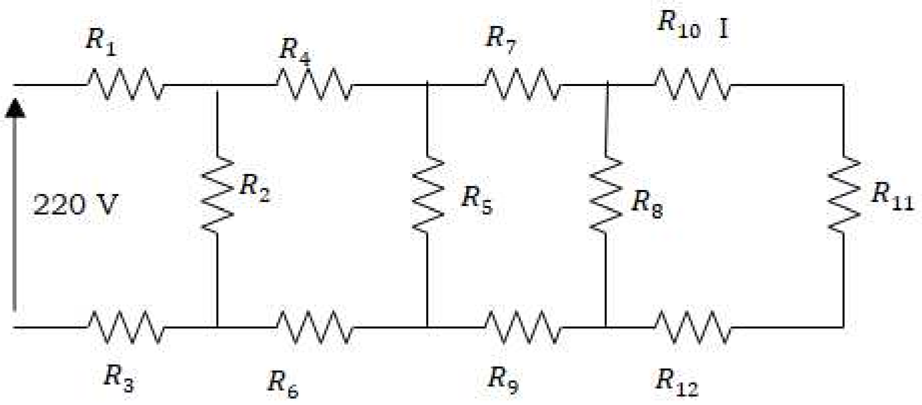
c) La puissance du générateur

EXERCICE AE179

Un fil de cuivre de section $1\ mm^2$ et de longueur 100m est soumis à une ddp de 50V. Déterminer la résistance du fil et l'énergie transformée en chaleur pendant 10 minutes. La résistivité su cuivre est de $1,68.10^{-8}\ ohm.m$

EXERCICE AE180

Soit le circuit



$R_1 = 2\Omega$	$R_2 = 3\Omega$	$R_3 = 4\Omega$	$R_4 = 8\Omega$	$R_5 = 9\Omega$	$R_6 = 1\Omega$
$R_7 = 5\Omega$	$R_8 = 10\Omega$	$R_9 = 1\Omega$	$R_{10} = 2\Omega$	$R_{11} = 3\Omega$ et	$R_{12} = 2\Omega$

Calculez :

a) La résistance équivalente

b) L'intensité du courant I

c) L'énergie transformée en chaleur

d) La puissance fournie

e) Le coût d'utilisation pendant 24 heures, si la SNEL taxe 50Fc le Kilowattheure

II.3. LE MAGNETISME

EXERCICE 325

Le flux d'induction magnétique Φ est exprimé en :

1) $Joule$ 2) $Ampère$ 3) $Volt$ 4) $Tesla$ 5) $Weber$

(Concours 2021-2022/Physique-Electricité)

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

(Concours 2023-2024/Physique-Electricité)

Résolution

$\boldsymbol{R)\ 5}$

EXERCICE 326

L'induction magnétique B est exprimée en :

1. Joule   2. Ampère   3. Volt   4. Tesla   5. Weber

(Concours 2022-2023/Physique-Electricité)

Résolution

$R)\ 4$

CINQUIÈME PARTIE : FRANÇAIS ET ANGLAIS

I. FRANÇAIS

EXERCICE 327

Texte

Malgré les bons résultats obtenus par quelques gouvernements, le planning familial n'a pas beaucoup de succès en Afrique. Cet état de chose peut s'expliquer par la force des traditions. En Afrique, on s'unit pour avoir des enfants : il est immoral d'avoir des relations sexuelles si on ne veut pas avoir d'enfants. La contraception qui permet cela est donc mal vue.

D'autre part, dans les sociétés traditionnelles Africaines, avoir un enfant ou ne pas en avoir, dépend uniquement de la femme. En cherchant à associer l'homme à cette décision, le planning familial ne tient pas assez compte de cette mentalité ? En Sierra-Leone, par exemple, certaines sociétés secrètes de femmes luttent contre cette manière de voir du plannig familial. Certaines méthodes de planification familiale ne tiennent pas compte non plus de la façon dont les couples vivent réellement ; l'homme et la femme, même s'ils sont mariés, parlent rarement ensemble de leur sexualité et tout ce que s'y rapporte. De plus, la femme n'a pas l'habitude de s'auto observer de la manière dont le recommande la méthode d'auto-observation.

La condition de la femme explique aussi en grande partie l'échec des politiques d'espacement ou de limitation des naissances. En effet, la femme est valorisée par le nombre d'enfants qu'elle a. Une femme inféconde est considérée comme un être inutile et souvent, elle est la risée de ses beaux-parents et de ses co-épouses.

QUESTIONS SUR LE TEXTE (Encerclez les bonnes réponses)

$A.$ Pour l'auteur, la planification familiale en Afrique est aujourd'hui une notion :

1. Indéniable 2. Taboue 3. Abstraite 4. Archaïque 5. Certaine

$B.$ L'auteur de ce texte est sans doute est :

1. Planificateur 2. Infirmier 3. Environnementaliste 4. Médecin 5. Biologiste

$C.$ Quel est le facteur le plus important de l'échec du planning familial dans ce texte ?

1. La conditon de la femme 2. L'immoralité des relations sexuelles 3. La force des traditions 4. Le fait de ne pas associer la femme aux décisions 5. La contraception.

(Concours 2023-2024/Français)

EXERCICE 328

A. Que signifie le préfixe ***anté*** dans les mots antécédents, antérieure ?

1. Après 2. Devant 3. Ancien 4. Avant 5. Présent

B. Que signifie le préfixe **co** dans l'expression co-épouses ?

1. Autres 2. Bel sœur 3. Second 4. Maitre

C. Ecrivez correctement la phrase ci-dessous :

La est par a femme le nombre valorisée d'enfants qu'elle.

………………………………………………………………………………

D. Complétez les pointillés par ver, vert, verre, vers dans la phrase suivante :

J'ai vu un …………….vert dans un verre………..la maison.

E. Faire le parallélisme entre la science et sa définition

(Encerclez la bonne réponse ici)

A. Phonétique	a. Etude de fonction des sons	$1. Aa - Bb - Cc - Dd - Ee$
B. Phonologie	b. Etude des noms de lieu	$2. Ab - Ba - Cd - Dc - Ee$
C. Hydronyme	c. Etude des noms de personnes	$3. Ac - Bb - Ce - Dc - Ed$
D. Anthroponyme	d. Etude descriptive des sons	$4. Ad - Ba - Ce - Dc - Eb$
E. Toponymie	e. Etude des noms de cours d'eau	$5. Aa - Bb - Ce - Dc - Eb$

F. Dans la phrase « Congo a un avenir sombre » l'adjectif sombre a pour antonyme :

1. Nouveau 2. Définitif 3. Radieux 4. Indulgent 5. Sablonneux

(Concours 2023-2024/Français)

Résolution

$A) R) 4$

$B) R) 1$

$C)$ La femme est valorisée par le nombre d'enfants qu'elle a.

$D)$

J'ai vu un ver vert dans un verre vers la maison

$E)\ R.4. Ad - Ba - Ce - Dc - Eb$

$F)\ R.3$

EXERCICE 329

Mettez le verbe principal à l'imparfait et les verbes soulignés au temps qui convient selon la concordance appliquée dans la langue écrite et soignée

1) Je veux qu'il m'avertisse ;
2) Nous ne croyons pas que cela puisse arriver ;
3) Il entre sans qu'on s'en aperçoive
4) Cette chèvre ne cesse de bêler jusqu'à ce qu'elle mettre bas
5) La modestie de ce savant n'empêche pas qu'il se sente son mérite
6) Il est généreux quoiqu'il soit économe
7) Bien qu'on l'ait averti du danger, il veut tenter l'escalade

(Concours 2019-2020/ Français)

Résolution

1) Je **voulais** qu'il m'**avertît**.
2) Nous ne **croyions** pas que cela **pût** arriver.
3) Il **entrait** sans qu'on s'en **aperçût**.
4) Cette chèvre ne **cessait** de bêler jusqu'à ce qu'elle **mit** bas.
5) La modestie de ce savant n'**empêchait** pas qu'il se **sentît** son mérite.
6) Il **était** généreux quoiqu'il **fût** économe.
7) Bien qu'on l'**eût** averti du danger, il **voulait** tenter l'escalade.

EXERCICE 330

Insérer chacun des mots suivants dans la phrase qui lui convient : chair—cher-chère-chaire

1) Même si je ne me trompe à la couleur du mets, je dois faire aujourd'hui ………………ou jamais.

2) La ………………….. est cendre, l'âme est flamme.

3) Le vrai bonheur coute peu : s'il est ………….. il n'est pas d'une bonne espèce

4) Les ……………… de professeurs à l'université sont convoitées.

(Concours 2019-2020/ Français)

Résolution

1) Même si je ne me trompe à la couleur du mets, je dois faire aujourd'hui ***cher*** ou jamais.

2) La **chair** est cendre, l'âme est flamme.

3) Le vrai bonheur coute peu : s'il est ***cher*** il n'est pas d'une bonne espèce

4) Les **chaires** de professeurs à l'université sont convoitées.

EXERCICE 331

Donnez un titre au texte ci-dessous après l'avoir lu et relu :

A son souper un glouton commande que l'on apprête pour lui un esturgeon. Sans en laisser que la tête, il soupe ; il crève. On y court : on lui donne maints clystères. On lui dit, pour faire court, qu'il mette ordre à ces affaires. Mes amis, dit le goulu, m'y voilà tout de façons qu'on m'apporte tout à l'heure le reste de mon poisson.

Titre :

Jean de la Fontaine

(Concours 2019-2020/ Français)

Résolution

R) Le glouton

EXERCICE 332

1. Qu'est-ce que la dissertation ?

2. Illustrez votre réponse en développant au choix, un des sujets repris ci-dessous :

$a.$ Peut-on parler de sociétés en avance et de sociétés en retard

$b.$ Les politiciens africains sont d'une générosité gamine, ils dépensent plus que les industriels américains

$c.$ L'homme est-il par nature un animal politique ?

$d.$ La vérité mathématique peut-elle servir de modèle à toute vérité ?

(Concours 2015-2016 /Français)

EXERCICE 333

Ah ! Cruel Est-il temps de me le déclarer ?
Qu'avez-vous fait ? Hélas je me suis crue aimée.
Au plaisir de VOUS voir mon âme accoutumée
Ne vit plus pour VOUS. Ignoriez-vous vos lois,
Quand je vous l'avouai pour la première fois ?
A quel excès d'amour m'avez-vous amenée !
Que ne nie disiez- vous Princesse infortunée,
Où vas-tu t'engager. Et quel est ton espoir ?
Ne donne point un cœur qu'on ne peut recevoir »
Ne l'avez-vous reçu. Crue que pour le rendre,
Quand de vos seules mains ce cœur voudrait dépendre ?
Tout l'Empire a vingt fois conspiré contre nous.
Il était temps encore que ne me quittiez-vous ?
Mille raisons alors consolaient ma misère
Je pouvais de ma mort accuser votre père,
Le peuple, le sénat, tout l'Empire romain,
Tout l'univers, plutôt qu'une si chère main
Leur haine, dès longtemps contre moi déclarée
M'avait à mon malheur dès longtemps préparée.
Je n'aurais pas, Seigneur, reçu ce coup cruel
Dans le temps que j'espère un bonheur immortel.
Quand votre heureux amour peut tout ce qu'il désire,
Lorsque Rome se tait, quand votre père expire.
Lorsque tout l'univers fléchit à vos genoux.
Enfin quand je n'ai plus à redouter que vous.

COMPREHENSION DU TEXTE ET GRAMMAIRE

1. Donnez un titre qui convient à ce texte

2. Quel est le signe de ponctuation le moins utilisé dans ce texte ?

3. Distinguez les phrases simples et les phrases complexes ? Les quelles dominent ?

4. Relever un exemple pour chaque modalité de la phrase que vous reconnaissez dans ce texte et précisez-la

(Concours/Français)

EXERCICE 334

Que pensez-vous des assertions reprises ci-après. Traitez un sujet au choix :

« Les politiciens africains sont d'une générosité gamine, ils dépensent plus que les industriels américains »

« Les Noirs ne lisent pas. Si vous voulez cacher quelque chose, mettez-le dans un livre »

« L'affaire de la comédie est de représenter en général, tous les défauts des hommes »

(Concours/Français)

II. ANGLAIS

EXERCICE 335

Choose the correct answer

1. My sister ……………………born on the 1st of April 1995.

   a) is *b) was* *c) had* *d) has been*

2. ………………………… you talk to him last week?

   a) do *b) does* *c) did* *d) have*

3. If I had known, I…………you!

   a) tell *b)would tell* *c) would have told* *d) told*

4. I am temped, but I feel it mat be inappropriate to………..

   a) do so *b) to be doing* *c) do such* *d) do this so*

5. I was born on…………………1990

$a)$ *the first of December* $b)$ *the one December* $c)$ *the first December* $d)$ *one of December*

(Concours 2023-2024/Anglais)

Résolution

1) $b.was$

2) $c.\ did$

3) $c.\ would\ have\ told$

4) $a.do\ so$

5) $a.\ the\ first\ of\ December$

EXERCICE 336

Fill each blank with the appropriate possessif pronoum from the given list :

mine, yours, his, hers, its, ours, yours, theirs

1. This book belongs to my brother-It's…………………
2. The phone belongs to me- It's………………..

3) The plane belongs to me and my father –It's………………

4) This box belongs to my mother – It's………………..

5. Those cookies belong to my sister's friends. Those cookies are………..

(Concours 2023-2024/Anglais)

Résolution

1) his

2) $mine$

3) $ours$

4) $hers$

5) $theirs$

EXERCICE 337

Where is the preposition

1. Despite his young age, he did a very good job. ***The preposition is :………..***
2. A boy came running toward me. ***The preposition is :……………..***
3. I basked a cake for your birthday. ***The preposition is :……………***

4. The paper is on my desk. ***The preposition is: ………………..***

5. I come from Brazil. ***The preposition is : ………………***

(Concours 2023-2024/Anglais)

Résolution

1)Despite

2) *toward*

3) *for*

4) *on*

5) *from*

EXERCICE 338

Complete the sentences with the following prepositions:

After | around | before | between | by | during | for | since | until | within | from | ago

1. Don't eat……………..meals.
2. I will be there ………………… your birthday.
3. She's always up……………….dawn.
4. They went on a trip a few days…………………..
5. The meseum is open…………………….9.30am to 6.00pm.

(Concours 2023-2024/Anglais)

EXERCICE 339

Choose between ***who, whose, which, where*** :

1. This is Paul, ……………….brother went to school with me.
2. The girl………………is in my car is my girlfriend.
3. Give me the pen………………… is on the table.
4. Tupelo is the place……………Elvis Presley was born
5. Kevin is the guy…………….lent me his car

(Concours 2023-2024/Anglais)

Résolution

1) *whose*

2) who

3) $which$

4) $where$

5) who

EXERCICE 340

Put a circle around the correct answer

1. Jane is playing …………………………………a. car   b. cards   c. yard
2. Albert is in the library. He's…………………...a. cooking   b. dancing   c.reading
3. Miss Jackson is drinking ……………..……a. Dining room b. cafeteria c. coffee
4. Walter is eating………….. ……….a. restaurant b. coffee   c. breakfast
5. The monkey is in the……………….a. bank   b. Post office   c.zoo

(Concours 2022-2023/Anglais)

Résolution

1) $b. cards$

2) $c. reading$

3) $c. coffee$

4) $c. breakfast$

5) $c. zoo$

EXERCICE 341

Fill each blank with the appropriate verb from the given list to complete each sentence below:

Advice – avoid – encourage – permit – try – allow – discourage – forbid – tend – want.

1. Young people……. to be more concerned about clothes than older people.
2. Schools sometimes don't………male students to wear earrings
3. Schools sometimes……….. students to wear jeans to class
4. Parents often…………their daughters from wearing makeup and jewelry

(Concours 2022-2023/Anglais)

Résolution

1) $tend$

2) $permit$

3) $allow$

4) $forbid$

EXERCICE 342

Choose what word doesn't belong

1. a. cloudy b. short c. raining d. cool
2. a. breakfast b. newspaper c. lunch d. dinner
3. a. guitar b. baseball c. park d. lake
4. a. evening b. before c. weekend d. week

(Concours 2022-2023/Anglais)

Résolution

1) $b. short$

2) $b. newspaper$

3) $c. park$

4) $b. before$

EXERCICE 343

Put a circle around the correct answer

1. The children are noisy. They're…………a. reading b. singing c. sleeping
2. My mother's mother is my………….. a. aunt b. sister c. grandmother
3. Betty is sitting on the………………….. a. sofa b. TV c. apartment
4. Rita is swimming at the……………….. a. beach b. beach c. bed
5. Peter is doing his……………………….. a. sink b. room c. homework

(Concours 2022-2023/Anglais)

Résolution

1) $b. singing$

2) $c. grandmother$

3) $a. sofa$

4) $a. beach$

5) $c. homework$

EXERCICE 344

Choose what word doesn't belong

1. a. East b. North c. Coast d. South
2. a. biology b. player c. analysis d. anatomy
3. a. tea b. birds c. champagne d. coffee
4. a. daughter b. mother c. Neighbor d. son
5. a. Living room b. bedroom c. kitchen d. Classroom

(Concours 2022-2023/Anglais)

Résolution

1) $c. Coast$

2) $b. player$

3) $b. birds$

4) $c. Neighbor$

5) $d. Classroom$

EXERCICE 345

Complete the sentences to have the past perfect tense

1. George was upset. By the time he got to the train, it………already……..(**to leave**)

2. I had dinner with some Mexican friends last night. I enjoyed myself because I……. (**to speak**) Spanish in a long time.

3. By the time Anita got to church, the wedding…………..…already (**to start**)

4. Peter didn't give blood last January because he………. blood the month before (**to give**)

5. I ate a piece of chocolate cake last night and felt terrible about it. I…………….. a rich dessert since started my diet (**to eat**)

(Concours 2022-2023/Anglais)

Résolution

1) ***had*** already **left**

2) *had spoken*

3) *had started*

4) *had given*

5) *had eaten*

EXERCICE 346

Fill each blank with the appropriate verb from the given list to complete each sentence below:

Advice – avoid – encourage – permit – try – allow – discourage – forbid – tend – want.

1. Some companies …….. employees to wear casual clothes to work on Fridays.
2. People sometimes…………. to shock others with theirs clothes
3. Experts……… people against wearing loud colors to job interviews.
4. On an airplane you should…….wearing clothes that are too tight.

(Concours 2022-2023/Anglais)

EXERCICE 347

Unscramble the sentences

1. piano how since we've young to the know play very were we

……………………………………………………………………………………..

2. since Paul been they and college Sara engaged have finished

………………………………………………………………………………………

3. last had Helen a night headache has since

…………………………………………………………….

4. he little the since played a boy he's viola was

………………………………………………………………….

5. history I've in I Greek interested since Athens been visited

…………………………………………………………………………………

(Concours 2022-2023/Anglais)

EXERCICE 348

Fill in the blanks with the appropriate word selected from the given list : every – hot – reads – songs – speaks – teacher – plays – sad – ugly – play – can

Bob doesn't like sports. He can't ……. Tennis or golf, but he……….. ski. When he isn't busy, he usually …………… the newspaper or ……….. chess. He………. Play very well. Sally and Bod both love music. Sally sings popular………… and ……….. they…………. the piano. Bob can't play the piano, but he………… Sing and he can………………. The violin.

(Concours 2022-2023/Anglais)

EXERCICE 349

Choose: ***reopened- attended – destroyed-installed-grades-bonus***

1. The telephone was …………………in my new apartment this afternoon.
2. Our anniversary party was ……………..by all of our friends.
3. Jennifer is very smart. She gets good……………in all her subjects.
4. The compagny couldn't increase my salary this year, but they gave me a very nice ……………………….
5. The shoe factory downtown was……………by the fire.

(Concours 2019-2020/Anglais)

Résolution

1. *reopened*

2. *attended*

3. *grades*

4. *bonus*

5 . *destroyed*

EXERCICE 350

Choose what word doesn't belong

1. a. upset b. nervous c. tired d. crowded
2. a. brother b. plumber c. teacher d. dentist
3. a. movies b. candy c. ice cream d. popcorn
4. a. end b. finish c. close d.start
5. a. windy b. cold c. cloudy d. dark

(Concours 2019-2020/Anglais)

Résolution

$1. c$

$2. a$

$3. a$

$4. d$

$5 . d$

EXERCICE 351

Compete the sentences with the past continuous tense.

1. Max and his brother …………..already……….to the beach (**to go**)
2. Diane…………………..her piano lesson yet (***to take***)
3. I……….to my parents yet (***to write***)
4. My wife and I……….already ………….dinner (***to eat***)
5. You ………….. your electric bill yet (***to pay***)

(Concours 2019-2020/Anglais)

(Concours 2020-2021/Anglais)

Résolution

$1. were\ going$

$2. was\ taking$

$3. was\ writing$

$4. were\ eating$

$5. were\ paying$

EXERCICE 352

Fill each blank with the appropriate word selected from the given list : them-her-their-my-it-its-myself-ours-ourselves-our-themselves

1. Charlie tried to fix……….. car by …………..
2. Mark and Nancy's mechanic charged…………a lot and still didn't fix…………car.
3. Betty can't find anybody to help……..fix…………..car.
4. I'm having trouble with…………car, too, ……….starts in the morning, but the windows are broken. The windows don't go up and down. I tried to fix…………..by ……….., but I couldn't

(Concours 2019-2020/Anglais)

(Concours 2020-2021/Anglais)

Résolution

1. $Her \quad herself$

2. $Them \quad their$

3. $Her \quad her$

4. $My \quad it \quad it \quad myself$

EXERCICE 353

Fill in the blanks with the appropriate word selected from the given list :

Every-Plays-speak-speaks-teacher-is-sad-ugly-themselves-theirs

Sally Nelson……….an actress. She's young and pretty, but when she acts, she can look young or old, beautiful or ……. , Happy or ………. Her husband, Bob ………….. an English ………………. He teaches students from cities around the world. His students speak Spanish, French, Russian and Arabic. Bob sometimes …………. Spanish and French with them, but he can't ………..Russian or Arabic. Sally is a good athlete. She ………….. tennis and golf well. When it's cold she skis, and when it's …………she swims…………day.

(Concours 2019-2020/Anglais)

(Concours 2020-2021/Anglais)

(Concours 2022-2023/Anglais)

Résolution

Sally Nelson **is** an actress. She's young and pretty, but when she acts, she can look young or old, beautiful or **ugly**, Happy or **sad.** Her husband, Bob **is** an English **teacher** He teaches students from cities around the world. His students speak Spanish, French, Russian and Arabic. Bob sometimes **speaks** Spanish and French with them, but he can't **speak** Russian or Arabic. Sally is a good athlete. She **plays** tennis and golf well. When it's cold she skis, and when it's ....she swims...........day.

EXERCICE 354

Choose what word doesn't belong

1. a. Grandmother b. Boyfriend c. Girlfriend d. Daughter
2. a. Sweater b. Necktie c. Belt d. Doll
3. a. East b. North c. Coast d. South
4. a. Morning b. Night c. Weekend d. Afternoon
5. a. Biology b. prayer c. analysis d. anatomy

(Concours 2020-2021/Anglais)

Résolution

1. *e*
2. *d*
3. *c*
4. *c*
5. *b*

EXERCICE 355

What's the word?

1. She spilled the........................ a. Juice b. Children c. Dog
2. I lost my............................... a. Park b. Accident c. Purse
3. He pocked himself in the........... a. Gray hair b. Eye c. Glasses
4. They tripped and.................... a. Dropped b. Fell c. Shaved
5. I was slicing a........................ a. Flat tire b. Cut c. Banana

(Concours 2020-2021/Anglais)

EXERCICE 356

Match each word from the list A with the corresponding word or phrase from the list B which has the same meaning

List A : word	**List B : same meaning**
1. demolish	$a.$ Throw violently
2. eliminate	$b.$ Shift
3. precision	$c.$ fall down
4 . search	$d.$ tear down
5. remote	$e.$ Quit
6 . leak	$f.$ Send out
7. smash	$g.$ Break
8. emit	$h.$ Far away
9. collapse	$i.$ escape accidentally
10. hurl	$j.$ seek
	$k.$ Get rid of
	$l.$ accuracy

(Concours/Anglais)

EXERCICE 357

Match each word from the list C with the corresponding word or phrase from the list D which has the opposite meaning

List C : word	**List D : opposite**
1. disconnect	$a.$ look away
2. light	$b.$ end
3. onset	$c.$ dull
4. huge	$d.$ cold
5. hot	$e.$ easy

6. sharp — f. weakness
7. bend — g. tiny
8. stare — h. tear down
9. hard — i. link
10. strength — j. break

k. heavy

l. straighten

(Concours/Anglais)

EXERCICE 358

Fill each the appropriate word selected from given list:

On-under-his-down-from-in-into-over-distracted-away-at-around-her

1. Looking…………..the microscope she saw the two cells separate and move slowly……. From each other.
2. Errors in the use of computers often occur because humans grow tired and can be……………
3. Charles took two books…………..the self, he put one of them…………the table and the other one……….his briefcase.
4. Please sit………..
5. Peter kissed…………girlfriend and put his arm……………..neck

(Concours/Anglais)

EXERCICE 359

Translate into French

1. How old are you?
2. Tired
3. Against
4. The tire
5. Wise
6. Wide

7. Again
8. To travel
9. The library
10. The bookstore

(Concours/Anglais)

EXERCICE 360

Choose what word doen't belong

1. a. river b. ocean c. park d. lake
2. a. evening b. before c. weekend d. week
3. a. movies b. candy c. ice cream d. popcorn
4. a. end b. finish c. close d. start
5. a. resume b. invitation c. interview d. script

(Concours 2019-2020/Anglais)

EXERCICE 361

Choose: bonus – success – economy – grades – received – increase

1. We hope our landlord doesn't ……………………..out rent.
2. Have you………….today's mail yet?
3. Jennifer is very smart. She gets good ………………… in all her subjects
4. The company couldn't increase my salary this year, but they give me a very nice…………………………
5. Arthur hopes his new Broadway play is a big……………

(Concours 2019-2020/Anglais)

EXERCICE 362

Match each word from the list A with the corresponding word or phrase from the list B which has the same meaning

List A : word	List B : same meaning
1. emit	$a.$ Far away
2. collapse	$b.$ timid
3. eliminate	$c.$ seek
4. search	$d.$ tear down
5. demolish	$e.$ throw violently
6. remote	$f.$ send out
7 . hurl	$g.$ clean
8. shy	$h.$ quit
9. neat	$i.$ drift
10. precision	$j.$ fall down
	$k.$ get rid of
	$l.$ accuracy

EXERCICE 363

Match each word from the list C with the corresponding word or phrase from the list D which has the opposite meaning

List C : word	List D : opposite meaning
1. stare	$a.$ tear down
2.hard	$b.$ far away
3. light	$c.$ dull
4. huge	$d.$ big
5. near	$e.$ soft
6. small	$f.$ weakness

7 . strength	*g*. tiny
8. sharp	*h*. heavy
9. bend	*i*. end
10. onset	*j*. break
	k. look away
	l. straighten

(Concours /Anglais)

EXERCICE 364

Translate into French

1. To burn
2. To waste
3. Forbidden
4. The library
5. Tired
6. Wide
7. Again
8. Against
9. The tire
10. To weight

(Concours/Anglais)

Résolution

1. brûler
2. Gaspiller
3. Intedit
4. La bibliothèque
5. Fatigué

6. Large

7. Encore

8. *Contre*

9. *Le pneu*

10. *Peser*

EXERCICE 365

Fill each blank with the appropriate word selected from the given list:

On-under-his-down-from-in-into-over-at-around-her-out-up-throw-not-of-more-they

1. Dorothy could ………. Believe it : she shook …… head………. disbelief and sait just get………………….. ………….Here! I do……want to see you……………….

2. Paul was glad to meet ………….. girlfriend again: they kissed. He put ………. arm ……………… waist and …………………… both laughed happily

3. Lisa took two books……………the self : she put one of them …………. The table and the other one………… …………………briefcase

(Concours/Anglais)

EXERCICE 366

Write each verb in the past tense

1. He (stand) ………….up and (run)……………..away
2. He (eat)…………bread and (drink)………….coffee
3. He (shake) ………….his head in disbelief and (say)………….nothing
4. He (throw) …………….. up his arms and (talk)………..very fast
5. He (go)……….in through the backdoor
6. He (sing)………………. Like a professional

(Concours/Anglais)

Résolution

1) *stood* *ran*

2) *ate* *drank*

3) *shook* *said*

4) $threw$ $talked$

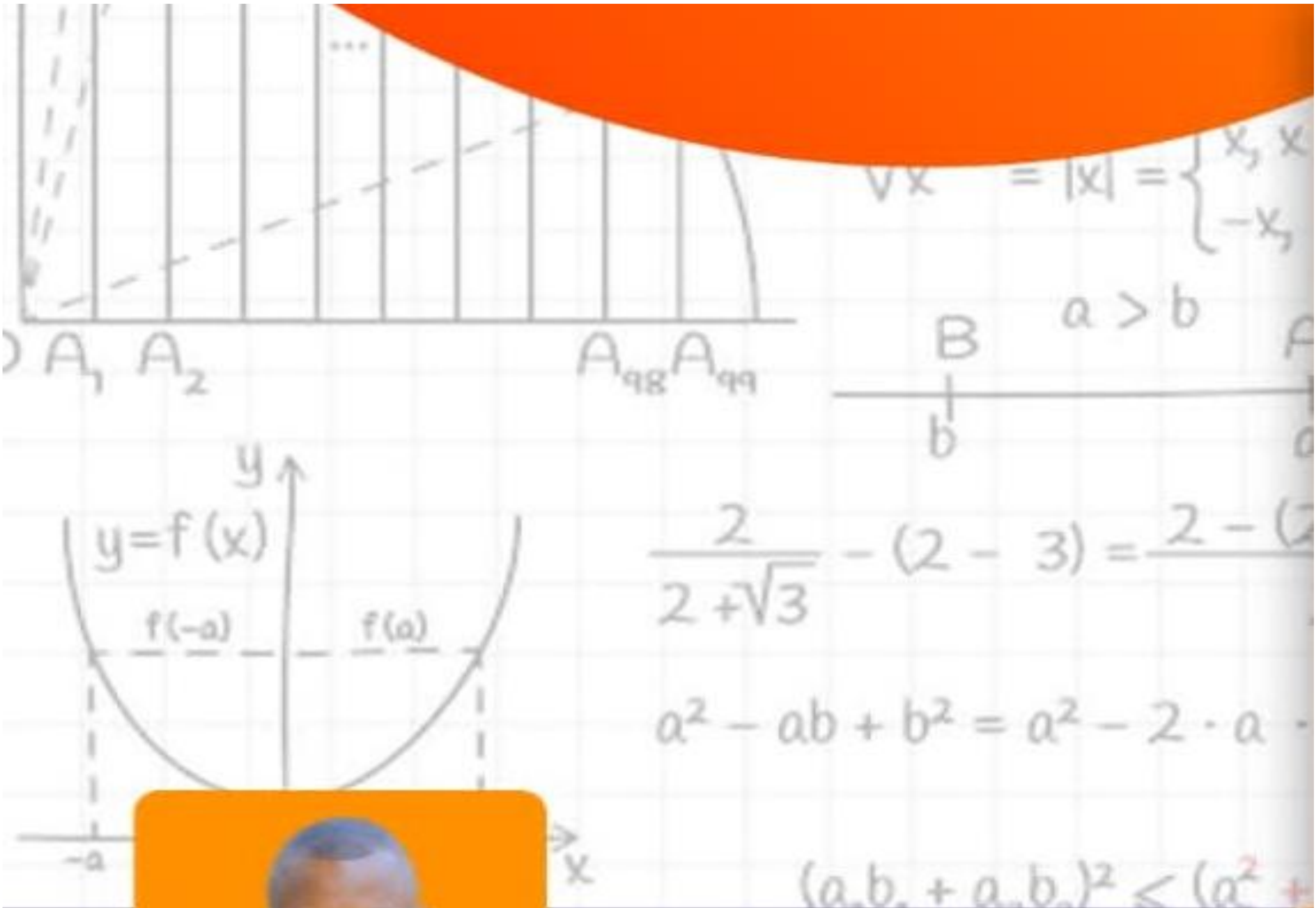
5) $went$

6) $sang$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- **KAYEMBE J.B.** et Cie, Maitriser les Maths 3, Editions Loyola, Kinshasa 2004.
- **BABETTY L.** et Cie, Maitriser les Maths 4, Editions Loyola, Kinshasa 2004
- **BABETTY L.** et Cie, Maitriser les Maths 5, Editions Loyola, Kinshasa 2001
- **BOPILI MBOTIA Richard**, Introduction à la physique, Editions Feu Torrent, Kinshasa 2015
- **ZUKA MANIANIA Baudoin,** Notes du cours de Physique générale II, UNIKIN, 2020.
- **Aimé DIUMI DIKOLO**, cours et exercices pour le concours d'admission en médecine, Wissen corporation, Edition 2021.
- www.Wikipedia.org
- www.mathematiquesFaciles.com
- www.wikiHow.com
- www.Lyc_valdedurance.ac_aix_marseille.com
- www.studyLibFr.com
- www.wissen-corp.com

Table des matières



Aimé DIUMI DIKOLO Fondateur et Coordonateur du groupe les Erudits et alliés.

Assistant à la faculté des Sciences et Technologies

+243 810834616

Il y a une vie pendant la fac et une vie aprés la fac. Ne gâchez jamais la vie après la fac à cause de la vie pendant la fac.

Un jour tout ceci deviendra un souvenir , tant que cela depend de vous, faites en sorte que ça soit un bon souvenir.

Erudits et Alliés